Université de Rennes 1
Année 2005-2006

Licence de mathématiques
F02. Intégrale de Lebesgue
et séries de Fourier

Correction de l'exercice 5 de la feuille de TD 4

1. Pour tout t de $\mathbf{R}^d$, l'application $x \mapsto f(x)\, e^{-i\langle t\,,\,x\rangle}$ est mesurable sur $\mathbf{R}^d$ et pour tout x de $\mathbf{R}^d$, l'application $t \mapsto f(x)\, e^{-i\langle t\,,\,x\rangle}$ est continue sur $\mathbf{R}^d$ (car $t \mapsto \langle t\,,\,x\rangle$ l'est). Par ailleurs on a

$$\forall t \in \mathbf{R}^d, \quad \forall x \in \mathbf{R}^d, \quad \left|f(x)\, e^{-i\langle t\,,\,x\rangle}\right| \leqslant |f(x)|\,,$$

l'inégalité étant en fait une égalité. Comme f est intégrable sur $\mathbf{R}^d$, ceci montre que $\widehat{f}$ est bien définie et continue sur $\mathbf{R}^d$ (on applique le théorème sur la continuité des intégrales à paramètres).

Pour $t \in \mathbf{R}^d \backslash \{0\}$, effectuons dans l'intégrale définissant $\widehat{f}(t)$, le changement de variables affine $u = x - \pi \frac{t}{||t||^2}$. On obtient

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(t) &= \int_{\mathbf{R}^d} f\left(u + \pi \frac{t}{||t||^2}\right)\, e^{-i\left\langle t\,,\,u+\pi\frac{t}{||t||^2}\right\rangle} du \\
&= e^{i\,\pi\frac{\langle t\,,\,t\rangle}{||t||^2}} \int_{\mathbf{R}^d} f\left(u + \pi \frac{t}{||t||^2}\right)\, e^{-i\langle t\,,\,u\rangle} du \\
&= -\int_{\mathbf{R}^d} f\left(u + \pi \frac{t}{||t||^2}\right)\, e^{-i\langle t\,,\,u\rangle} du.
\end{aligned}$$

On en déduit la relation

$$2\widehat{f}(t) = \int_{\mathbf{R}^d} f(x)\, e^{-i\langle t\,,\,x\rangle} dx - \int_{\mathbf{R}^d} f\left(x + \pi \frac{t}{||t||^2}\right)\, e^{-i\langle t\,,\,x\rangle} dx.$$

d'où

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{f}(t)\right| &= \frac{1}{2}\left|\int_{\mathbf{R}^d}\left[f(x) - f\left(x + \pi\frac{t}{||t||^2}\right)\right]\, e^{-i\langle t\,,\,x\rangle} dx\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^d}\left|f(x) - f\left(x + \pi\frac{t}{||t||^2}\right)\right|\,\left|e^{-i\langle t\,,\,x\rangle}\right| dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^d}\left|f(x) - f\left(x + \pi\frac{t}{||t||^2}\right)\right| dx \\
&= \frac{1}{2}\left|\left|\tau_{\pi\frac{t}{||t||^2}} f - f\right|\right|_1.
\end{aligned}$$

Or quand $||t||$ tend vers $+\infty$, $\pi \frac{t}{||t||^2}$ tend vers zéro, et on sait que

$$\lim_{u \to 0} ||\tau_u f - f||_1 = 0.$$

On en déduit donc que $\widehat{f}(t)$ tend vers zéro quand $||t||$ tend vers $+\infty$.

Le fait que $f \mapsto \widehat{f}$ soit une application linéaire découle immédiatement de la linéarité de l'intégrale. Pour tout $t \in \mathbf{R}^d$, on a

$$\left|\widehat{f}(t)\right| \leqslant \int_{\mathbf{R}^d} \left|f(x)\, e^{-i\langle t\,,\,x\rangle}\right| dx = \int_{\mathbf{R}^d} |f(x)|\, dx = ||f||_1 \,.$$

Ainsi

$$\left|\left|\, \widehat{f}\, \right|\right|_\infty \leqslant ||f||_1$$

ce qui montre la continuité de l'application linéaire $f \mapsto \widehat{f}$.

En fait, si f est un élément de $\mathbf{L}^1(\mathbf{R}^d)$ positif et non (presque partout) nul (par exemple $f = \mathbf{1}_K$ où K est un compact de $\mathbf{R}^d$ tel que $\lambda_d(K) > 0$) on a $\widehat{f}(0) = ||f||_1$ d'où $\left|\left|\, \widehat{f}\, \right|\right|_\infty \geqslant ||f||_1$ ce qui montre que la norme de l'application linéaire $f \mapsto \widehat{f}$ est 1.

2. On veut évaluer, pour $t \in \mathbf{R}^d$,

$$\int_{\mathbf{R}^d} \left(\int_{\mathbf{R}^d} f(x-y)\, g(y)\, dy \right) \, e^{-i\langle t\,,\,x\rangle} dx.$$

On aimerait bien sûr appliquer le théorème de Fubini.

Pour justifier l'emploi de ce théorème, il faut montrer que l'application

$$(x, y) \mapsto f(x-y)\, g(y)\, e^{-i\langle t\,,\,x\rangle}$$

est intégrable sur $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$. Or on a

$$\int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} \left| f(x-y)\, g(y)\, e^{-i\langle t\,,\,x\rangle} \right| dxdy = \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} |f(x-y)|\; |g(y)|\; dy.$$

On peut ici appliquer le théorème de Fubini pour les fonctions positives. On a donc

$$\int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} |f(x-y)|\; |g(y)|\; dy = \int_{\mathbf{R}^d} \left(\int_{\mathbf{R}^d} |f(x-y)|\, dx \right) |g(y)|\, dy.$$

Pour $y \in \mathbf{R}^d$, le fait que la mesure de Lebesgue soit invariante par translation entraîne

$$\int_{\mathbf{R}^d} |f(x-y)|\, dx = \int_{\mathbf{R}^d} |f(x)|\, dx = ||f||_1 \,.$$

Finalement

$$\int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} \left| f(x-y)\, g(y)\, e^{-i\langle t\,,\,x\rangle} \right| dxdy = ||f||_1 \; ||g||_1 < +\infty.$$

d'où l'intégrabilité cherchée.

On peut à présent appliquer le théorème de Fubini pour calculer

$$\int_{\mathbf{R}^d} \left(\int_{\mathbf{R}^d} f(x-y)\, g(y)\, dy \right) \, e^{-i\langle t\,,\,x\rangle} dx.$$

On a donc

$$\int_{\mathbf{R}^d} \left(\int_{\mathbf{R}^d} f(x-y)\, g(y)\, dy \right) \, e^{-i\langle t\,,\,x\rangle} dx \\ = \int_{\mathbf{R}^d} \left(\int_{\mathbf{R}^d} f(x-y)\, e^{-i\langle t\,,\,x\rangle} dx \right) g(y) dy.$$

Pour $y \in \mathbf{R}^d$ donné, on fait dans l'intégrale entre parenthèses le changement de variable affine $u = x - y$, on obtient

$$\int_{\mathbf{R}^d} f(x-y)\, e^{-i\langle t\,,\,x\rangle} dx = \int_{\mathbf{R}^d} f(u)\, e^{-i\langle t\,,\,u+y\rangle} du = e^{-i\langle t\,,\,y\rangle}\, \widehat{f}(t)$$

Finalement

$$\int_{\mathbf{R}^d} \left(\int_{\mathbf{R}^d} f(x-y)\, g(y)\, dy \right) \, e^{-i\langle t\,,\,x\rangle} dx \\ = \widehat{f}(t) \int_{\mathbf{R}^d} g(y)\, e^{-i\langle t\,,\,y\rangle} dy = \widehat{f}(t)\, \widehat{g}(t).$$

On a donc bien

$$\forall t \in \mathbf{R}^d, \quad \widehat{f * g}(t) = \widehat{f}(t)\; \widehat{g}(t).$$

On va déduire de cette relation ainsi que du 1. que $\mathbf{L}^1(\mathbf{R}^d)$ n'a pas d'élément neutre pour la convolution. Raisonnons par l'absurde et supposons l'existence d'un tel élément neutre, noté g. Soit f une fonction de $\mathbf{L}^1(\mathbf{R}^d)$ telle que $\int_{\mathbf{R}^d} f(x)dx \neq 0$. Pour $t \in \mathbf{R}^d$, soit f_t la fonction $x \mapsto f(x)\, e^{i\,\langle t\,,\,x\rangle}$. On a, pour tout x de $\mathbf{R}^d$, $|f_t(x)| = |f(x)|$ ce qui montre que $f_t \in \mathbf{L}^1(\mathbf{R}^d)$. En outre

$$\widehat{f_t}(t) = \int_{\mathbf{R}^d} f(x)dx \neq 0.$$

Par ailleurs on a

$$\widehat{f_t * g}(t) = \widehat{f_t}(t)\,\widehat{g}(t)$$

mais par hypothèse $f_t * g = f$, d'où

$$\widehat{f_t}(t) = \widehat{f_t}(t)\,\widehat{g}(t).$$

Comme $\widehat{f_t}(t) \neq 0$, on en déduit que $\widehat{g}(t) = 1$.

Ainsi on a montré

$$\forall t \in \mathbf{R}^d, \quad \widehat{g}(t) = 1.$$

Mais d'après le 1., $\widehat{g}(t)$ tend vers zéro quand $||t||$ tend vers $+\infty$, d'où une contradiction.

3. Soit $n > 0$. Soit $t = (t_1,\, \ldots, t_d)$ un élément de $\mathbf{R}^d$. On a alors

$$\begin{aligned}
\widehat{e_n}(t) &= \frac{1}{(2\,\pi)^d} \int_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^d} e^{-\frac{1}{n}(|x_1|+\cdots+|x_d|)}\, e^{-i\,t_1\,x_1-\cdots-i\,t_d\,x_d}\, dx_1 \ldots dx_d \\
&= \frac{1}{(2\,\pi)^d} \int_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^d} e^{-\left(\frac{|x_1|}{n}+i\,t_1\,x_1\right)-\cdots-\left(\frac{|x_d|}{n}+i\,t_d\,x_d\right)}\, dx_1 \ldots dx_d \\
&= \frac{1}{(2\,\pi)^d} \prod_{k=1}^{d} \int_{y\in\mathbf{R}} e^{-\frac{|y|}{n}+i\,t_k\,y}\, dy,
\end{aligned}$$

la dernière égalité provenant du théorème de Fubini (lecteur : pourquoi peut-on appliquer Fubini ici ?).

Or, pour tout $u \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{y\in\mathbf{R}} e^{-\frac{|y|}{n}-i\,u\,y}\, dy &= \int_{y\geqslant 0} e^{-(\frac{1}{n}+i\,u)\,y}\, dy + \int_{y\leqslant 0} e^{(\frac{1}{n}-i\,u)\,y}\, dy \\
&= \left[-\frac{1}{\frac{1}{n}+i\,u} e^{-\frac{1}{n}+i\,u)\,y}\right]_0^{+\infty} + \left[\frac{1}{\frac{1}{n}-i\,u} e^{(\frac{1}{n}-i\,u)\,y}\right]_{-\infty}^{0} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{n}-i\,u} + \frac{1}{\frac{1}{n}+i\,u} = \frac{2\,n}{1+n^2\,u^2}.
\end{aligned}$$

Finalement on a pour tout $n \geqslant 1$ et tout t de $\mathbf{R}^d$

$$\widehat{e_n}(t) = \frac{n^d}{\pi^d} \prod_{k=1}^{d} \frac{1}{1 + n^2\, t_k^2}.$$

On a donc

$$\forall n \geqslant 1, \quad \forall t \in \mathbf{R}^d, \quad \widehat{e_n}(t) = n^d\, f(n\, t)$$

où f est la fonction définie par

$$\forall t \in \mathbf{R}^d, \quad f(t) = \frac{1}{\pi^d} \prod_{k=1}^{d} \frac{1}{1 + t_k^2}.$$

On vérifie facilement que $f \in \mathbf{L}^1(\mathbf{R}^d)$ et $\int_{\mathbf{R}^d} f(t)dt = 1$. D'après un résultat du cours, ceci montre que $(\widehat{e_n})$ est bien une suite d'approximations de l'unité.

4. Soit $n \geqslant 1$. D'après ce qui précède, $\widehat{e_n}$ est un élément de $\mathbf{L}^1(\mathbf{R}^d)$ et $\widehat{e_n} * f$ a donc un sens. On a, pour presque tout x de $\mathbf{R}^d$,

$$\begin{aligned}
(\widehat{e_n} * f)(x) &= \int_{\mathbf{R}^d} \widehat{e_n}(t)\, f(x-t)\, dt \\
&= \int_{\mathbf{R}^d} \left(\int_{\mathbf{R}^d} e_n(u)\, e^{-i\langle t\,,\,u\rangle} du \right) f(x-t)\, dt.
\end{aligned}$$

On applique à présent le théorème de Fubini. Ceci est licite car la fonction

$$(u,t) \mapsto e_n(u)\, e^{-i\langle t\,,\,u\rangle}\, f(x-t)$$

est dans $\mathbf{L}^1(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$ (la preuve est laissée à la lectrice). On obtient, pour presque tout x de $\mathbf{R}^d$,

$$\begin{aligned}
(\widehat{e_n} * f)(x) &= \int_{\mathbf{R}^d} \left(\int_{\mathbf{R}^d} f(x-t) e^{-i\langle t\,,\,u\rangle} dt \right) e_n(u) du \\
&= \int_{\mathbf{R}^d} \left(\int_{\mathbf{R}^d} f(-v) e^{-i\langle v+x\,,\,u\rangle} dv \right) e_n(u) du \\
&= \int_{\mathbf{R}^d} \left(\int_{\mathbf{R}^d} f(-v) e^{-i\langle v\,,\,u\rangle} dv \right) e_n(u)\, e^{-i\langle x\,,\,u\rangle} du \\
&= \int_{\mathbf{R}^d} \left(\int_{\mathbf{R}^d} f(-v) e^{i\langle v\,,\,t\rangle} dv \right) e_n(t)\, e^{i\langle x\,,\,t\rangle} dt \\
&= \int_{\mathbf{R}^d} \left(\int_{\mathbf{R}^d} f(u) e^{-i\langle u\,,\,t\rangle} du \right) e_n(t)\, e^{i\langle x\,,\,t\rangle} dt \\
&= \int_{\mathbf{R}^d} e_n(t)\, \widehat{f}(t)\, e^{\,i\langle x\,,\,t\rangle} dt.
\end{aligned}$$

Pour la deuxième égalité on a utilisé le changement de variables $v = t - x$, pour la quatrième le changement de variables $t = -u$ (et on a utilisé la fait que e_n est paire) et pour la cinquième le changement de variables $u = -v$.

On peut remarquer que jusqu'ici, on n'a pas utilisé l'hypothèse que $\widehat{f}$ était un élément de $\mathbf{L}^1(\mathbf{R}^d)$.

Par ailleurs, on a :

(a) pour tout t de $\mathbf{R}^d$, la suite $\left(e_n(t)\,\widehat{f}(t)\,e^{i\langle x\,,\,t\rangle}\right)_n$ converge vers

$$\frac{1}{(2\,\pi)^d}\widehat{f}(t)\,e^{i\langle x\,,\,t\rangle}$$

(vérifiez-le !)

(b) pour tout n de $\mathbf{N}^*$ et tout t de $\mathbf{R}^d$,

$$\left|e_n(t)\,\widehat{f}(t)\,e^{i\langle x\,,\,t\rangle}\right| \leqslant \left|\widehat{f}(t)\right|$$

(remarquer que $|e_n(t)| \leqslant 1$ pour tout n et tout t !)

(c) $\left|\widehat{f}(t)\right|$ est intégrable sur $\mathbf{R}^d$ (c'est l'hypothèse qu'on a faite sur f dans cette question !)

D'après le théorème de convergence dominée, la suite

$$\left(\int_{\mathbf{R}^d} e_n(t)\,\widehat{f}(t)\,e^{i\langle x\,,\,t\rangle}\,dt\right)_n$$

converge vers

$$\frac{1}{(2\,\pi)^d}\int_{\mathbf{R}^d}\widehat{f}(t)\,e^{i\langle x\,,\,t\rangle}dt.$$

Posons, pour tout x de $\mathbf{R}^d$ et tout $n \geqslant 1$,

$$u_n(x) = \int_{\mathbf{R}^d} e_n(t)\,\widehat{f}(t)\,e^{i\langle x\,,\,t\rangle}dt$$

et

$$v_n(x) = (\widehat{e_n} * f)(x).$$

Comme $(\widehat{e_n})$ est une suite d'approximations de l'unité, la suite $\widehat{e_n} * f$ converge en norme $\mathbf{L}^1$ vers f. Il existe donc (résultat du cours) une suite extraite $\widehat{e_{\phi(n)}} * f$ qui converge vers f pour presque tout x. D'après ce qui précède, pour presque tout x de $\mathbf{R}^d$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$v_{\phi(n)}(x) = u_{\phi(n)}(x).$$

En passant à la limite (pour n tendant vers $+\infty$) dans cette égalité, et d'après ce qui précède, on obtient, pour presque tout x de $\mathbf{R}^d$, l'égalité

$$f(x) = \frac{1}{(2\,\pi)^d} \int_{\mathbf{R}^d} \widehat{f}(t)\, e^{i\langle x\,,\,t\rangle} dt.$$

Pour montrer que l'application linéaire $f \mapsto \widehat{f}$ est injective, il suffit de montrer que son noyau est réduit à zéro. Soit $f \in \mathbf{L}^1(\mathbf{R}^d)$ telle que $\widehat{f} = 0$. En particulier, $\widehat{f}$ est un élément de $\mathbf{L}^1(\mathbf{R}^d)$. On peut donc appliquer ce qui précède : pour presque tout x de $\mathbf{R}^d$, on a

$$f(x) = \frac{1}{(2\,\pi)^d} \int_{\mathbf{R}^d} \widehat{f}(t)\, e^{i\langle x\,,\,t\rangle} dt = 0.$$

Ainsi f est nulle presque partout, en d'autre termes f vue comme élément de $\mathbf{L}^1(\mathbf{R}^d)$ est nulle.