

# Restrictions des fibrés stables

## I) $\mu$ -stabilité

- Sur une courbe
- Définition
- Exemple de  $\Omega_{\mathbb{P}^2}$

## II) Stabilité et restriction

- Exemple
- Théorème de Langer
- Notre théorème général

## III) Restriction avec augmentation du groupe de Picard

- Énoncé pour  $\mathbb{Q}^3$
- Démarche.

# I) $\mu$ -stabilité

## a) Sur une courbe

Soit  $C$  une courbe complexe projective lisse et  $E \rightarrow C$  un fibré vectoriel.  
Soit  $\mathcal{O}(1)$  un fibré en droites de degré 1.

Le polynôme de Hilbert de  $E$  est

$$\begin{aligned} P(E, m) &:= \chi(E \otimes \mathcal{O}(m)) = \int_C \text{ch}(E \otimes \mathcal{O}(m)) \text{ Todd } T_C \\ &= \int_C \left( r + c_1(E) + m r c_1(\mathcal{O}(1)) \right) \left( 1 + \frac{c_1(T_C)}{2} \right) \\ &= r \left( m \deg C + \frac{\deg E}{r} + 1 - g \right) \end{aligned}$$

$$\frac{P(F, m)}{r_F} \leq \frac{P(E, m)}{r_E} \quad (\Leftrightarrow) \quad \frac{\deg F}{r_F} \leq \frac{\deg E}{r_E} =: \mu(E)$$

## b) Définitions

Soit  $X$  une variété projective lisse complexe munie d'une polarisation  $A$ .  
Si  $E \rightarrow X$  est un fibré vectoriel holomorphe ou  $E$  un faisceau cohérent

$$1) \mu_A(E) := \frac{\deg_A E}{r_E} \quad \text{où} \quad \deg_A E = \int_X c_1(E) c_1(A)^{\dim X - 1}$$

$$2) \mu_A(E) := \frac{\deg_A E}{r_E} \quad \text{où} \quad \deg_A E \text{ est additif et calculé par une résolution localement libre de } E.$$

3)  $E$  est dit  $\mu_A$ -semi-stable si pour tout sous-faisceau cohérent  $F$  de  $E$  de rang strictement positif  $\mu(F) \leq \mu(E)$

Il suffit en fait de considérer les sous-faisceaux saturés ( $\frac{E}{F}$  sans torsion).  
La stabilité est une notion qui permet de sélectionner des bonnes familles de faisceaux pour construire des espaces de modules.

c) Exemples

Les fibrés en droites sont stables

La stabilité est invariante par produit tensoriel par un fibré en droites.

$E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$        $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$  de rang 1

$\mathcal{F} \subset \mathcal{F}^{**} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$        $\mu(\mathcal{F}) \leq \mu(\mathcal{F}^{**})$  et même égalité comme  $\mathcal{F}$  est sans torsion

et  $\mathcal{F}^{**}$  est réflexif et de rang 1 donc localement libre.

$\mathcal{F}^{**} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-a)$        $\mu(\mathcal{F}^{**}) = -a$        $\mu(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) = \frac{-3}{2}$

On voit que  $H^0(\text{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-a), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2})) = H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(a)) \neq 0 \iff a \geq 2$

Donc  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$  est stable.

II) Stabilité et restriction

a) Exemple

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}|_l = \underbrace{\mathcal{O}_l}_{\mathcal{O}_l(-2)} \oplus \underbrace{N_l^*}_{\mathcal{O}_l(-1)}$  instable

b) Théorèmes généraux

Théo (Maruyama)

Si  $X^m$  est une variété projective lisse et  $\mathcal{O}(1)$  une polarisation très ample

Si  $E$  est un fibré  $\mu_{\mathcal{O}(1)}$ -semi stable de rang strictement inférieur à  $\dim X$

alors pour toute hypersurface générique  $H \in |\mathcal{O}(d)|$        $E|_H$  est  $\mu_{\mathcal{O}(1)}$ -semi stable.

Théorème (Langer)

Si  $E$  est un fibré  $\mu_{\mathcal{O}(1)}$ -stable de rang  $r \geq 2$

Si  $H \in |\mathcal{O}(d)|$  est normale et  $d > \frac{r-1}{2} \Delta(E) \cdot \mathcal{O}(1)^{m-2}$        $\Delta(E) = 2rc_2 - (r-1)c_1^2$

alors  $E|_H$  est  $\mu$ -stable.

### 3) Notre théorème

Pour généraliser la situation de  $\mathbb{P}^2$ , nous avons considéré les espaces hermitiens symétriques compacts (qui paramétrisent des familles d'espaces linéaires particuliers)

- Les grassmanniennes
- Les hypersurfaces quadriques  $Q^m$  de  $\mathbb{P}^{m+1}$   ~~$\rightarrow$~~
- Les grassmanniennes lagrangiennes de  $(\mathbb{C}^{2n}, \omega)$  <sup>symplectique</sup>
- Les grassmanniennes spinorielles de  $(\mathbb{C}^{2n}, q)$  <sup>quadrique non dégénérée</sup>
- deux exemples exceptionnels.

Théorème A : Soit  $Y$  hermitien symétrique compact (dans le cas de  $Q^m$  on suppose  $m \geq 3$ ). Alors  $\text{Pic}(Y) = \mathbb{Z} \mathcal{O}(1)$

1)  $\Omega_Y$  est  $\mu_{\mathcal{O}(1)}$ -stable

- 2) Soit  $X \subset Y$  avec
- $\mathcal{O}_X$  admet une résolution courte
  - $\text{Pic}(Y) \rightarrow \text{Pic}(X)$  est surjective
  - $X$  sans équation linéaire

alors  $\Omega_{Y|X}$  est  $\mu$ -stable.

Exemples :

- Si  $X$  est une intersection complète de dimension au moins 3, la résolution de Koszul est courte et la condition sur les groupes de Picard est assurée par le théorème de Lefschetz.

- Si  $X \subset \mathbb{P}^n$  est une courbe rationnelle normale,  $\mathcal{O}_X$  admet une résolution courte, mais  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)|_X = \mathcal{O}_X(m+1)$  et  $\Omega_{\mathbb{P}^n}|_X = \mathcal{O}_X(m+1)^{\oplus m}$  n'est que semi-stable.

La démonstration du théorème se fait à l'aide de théorèmes d'annulation 15  
de cohomologie.

Pour donner une idée, supposons simplement que  $X$  est une hypersurface  
de degré  $d$  de  $Y$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Y(-d) \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

Soit  $\mathcal{F} \subset \Omega_{Y/X}$  de rang  $r$  et  $\det \mathcal{F} \subset \Omega_{Y/X}^P$  et réflexif donc localement  
libre donc  $\mathcal{O}_Y(-a)|_X$

$$0 \rightarrow \Omega_Y^P(a-d) \rightarrow \Omega_Y^P(a) \rightarrow \Omega_Y^P(a)|_X \rightarrow 0$$

Comme  $H^0(\Omega_Y^P(a)|_X) \neq 0$  soit  $H^0(Y, \Omega_Y^P(a)) \neq 0$  soit  $H^1(Y, \Omega_Y^P(a-d)) \neq 0$

### III) Restriction avec augmentation du groupe de Picard

a) Théorème B |  $Y$  espace hermitien symétrique compact de dim 2 ou 3  
 ~~$Y = \mathbb{P}^n$~~   $X \subset Y$  hypersurface lisse de degré  $d$

•  $Y = \mathbb{P}^2$   $d = 2$   $\Omega_{Y/X}$  semi-stable

$d \geq 3$   $\Omega_{Y/X}$  stable

•  $Y = \mathbb{P}^3$   $d \geq 2$   $\Omega_{Y/X}$  stable

•  $Y = \mathbb{Q}^2 \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$   $\Omega_{Y/X}$  semi-stable

•  $Y = \mathbb{Q}^3$   $d = 2$   $\Omega_{Y/X}$  stable

$d \geq 3$   $\Omega_{Y/X}$  stable

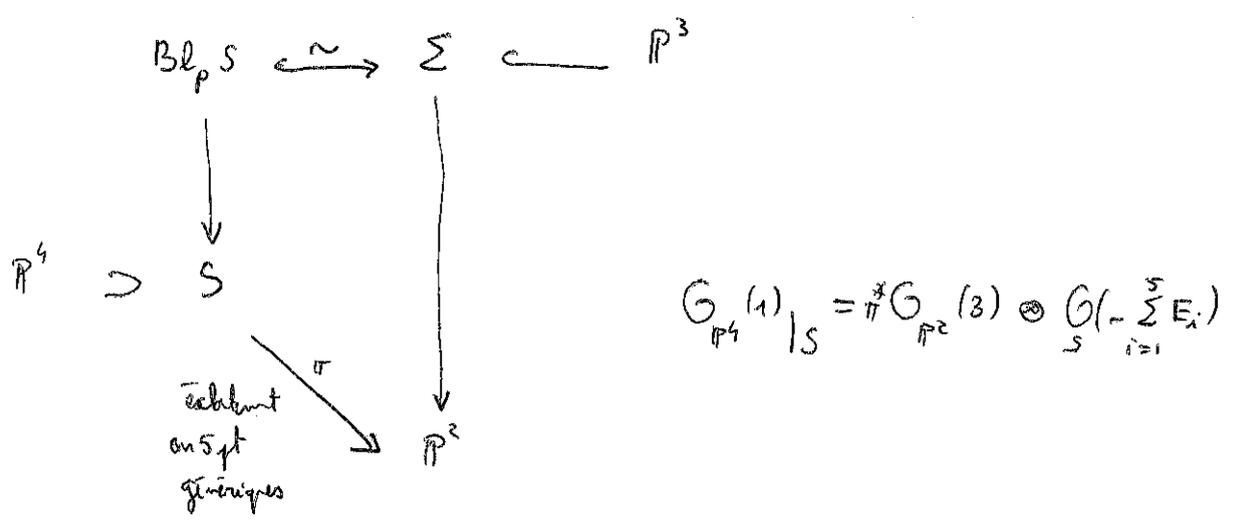
by L'exemple intéressant

$$Y = \mathbb{Q}^3 = \mathbb{Q}$$

$X = \mathbb{Q}^3 \cap \mathbb{Q}' = \text{ScP}^4$  surface de Del Pezzo de degré 4.

$$\mu(\Omega_{\mathbb{Q}|S}) = \frac{(-5+2) \times 4}{3} = -4$$

La projection depuis un point  $p$  de  $S$  (qui n'est sur aucune droite de  $S$ ) sur un ~~pl~~  $\mathbb{P}^3$  donne un plongement de  $\text{Bl}_p S$  dans  $\mathbb{P}^3$  dont l'image est une cubique



$$\text{Pic}(S) = \mathbb{Z} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) \oplus \bigoplus_{i=1}^5 \mathbb{Z} \mathcal{O}_S(E_i)$$

Comme  $\Omega_{\mathbb{Q}}$  est auto-dual, pour étudier la stabilité de  $\Omega_{\mathbb{Q}|S}$  il suffit de regarder la pente des sous-fibrés en droites de  $\Omega_{\mathbb{Q}}$

$$L = \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-a) \otimes \mathcal{O}_S(-\sum b_i E_i)$$

$$\mu(L) = -3a - \sum b_i$$

Il faut montrer que si  $L$  s'injecte (au sens des faisceaux)

dans  $\Omega_{\mathbb{Q}|S}$  alors

$$3a + \sum b_i > 4$$

1<sup>er</sup> cas :  $0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2) \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^2} \rightarrow \Omega_S \rightarrow 0$

$$\mu(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)) = \frac{-2 \times 4}{1} = -8 < \mu(\Omega_{\mathbb{P}^2})$$

Si  $L$  s'injecte dans  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)$  alors  $\mu(L) < \mu(\Omega_{\mathbb{P}^2})$

2<sup>iem</sup> cas : On suppose donc que  $L$  s'envoie dans  $\Omega_S$

$$0 \rightarrow \pi^* \Omega_{\mathbb{P}^2} \rightarrow \Omega_S$$

Dans une présentation locale de  $\pi : (u, v) \mapsto u, uv$

$$0 \rightarrow \pi^* \Omega_{\mathbb{P}^2} \rightarrow \Omega_S \rightarrow j_* \Omega_E \rightarrow 0$$

$\begin{array}{ccc} \frac{dv}{u^2} & \frac{dv}{dv} & \frac{dv}{u^2} \\ \text{ndv} & \text{ndv} & \text{ndv} \end{array}$

Si  $L$  s'injecte dans  $\pi^* \Omega_{\mathbb{P}^2}$ , donc dans  $\pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)^{\oplus 3}$ ,  
donc  $a \geq 2$

par image sur  $\mathbb{P}^2$  de la suite  $0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(a-1) \otimes \mathcal{O}(\sum b_i E_i)$

on obtient un nombre de degré  $(a-1)$  qui passe par  $b_i$  avec multiplicité  $(b_i)$  si  $b_i < 0$ .

Le théorème de Bezout avec la conique qui passe par les 5  $p_i$  donne

$$2(a-1) \geq \sum b_i \quad \text{et} \quad a \geq 2$$

3<sup>iem</sup> cas

On suppose qu'il n'y a pas d'application de  $L$  dans  $\Omega_{\mathbb{P}^2}$

$$\begin{array}{ccc}
 & & H^0(\Omega_{\mathbb{P}^2}(a)) \\
 & & \downarrow \\
 & & H^0(\Omega_{\mathbb{P}^2}(a) | \sum_{b_i < 0} -b_i p_i) \\
 & \nearrow & \downarrow \\
 H^0(\Omega_S \otimes L^*) & \longrightarrow & H^0(j_* \Omega_E \otimes L^*) \xrightarrow{\mathcal{J}} H^1(\pi^* \Omega_{\mathbb{P}^2} \otimes L^*) \\
 & & \parallel \\
 & & H^1(\Omega_{\mathbb{P}^2}(a) \otimes \bigoplus_{b_i < 0} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-b_i p_i))
 \end{array}$$

$$s \in H^0(j_* \Omega_{E_i} \otimes L^*) = H^0(E_i, \Omega_{E_i} \otimes \mathcal{O}_{E_i}(-b_i)) = H^0(E_i, \mathcal{O}_{E_i}(-2-b_i))$$

est donnée par un polynôme  $P(x,y)$  homogène de degré  $-2-b_i$  par

$$s = P(x,y) x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) = P(x,y) (x dy - y dx)$$

$$\pi_* s = P(x,y) (x dy - y dx) + Q(x,y) \quad (*)$$

deg  $\geq -b_i$

$\mathcal{J}(s) = 0$  prouve l'existence d'une forme  $\Omega$  dans  $H^0(\Omega_{\mathbb{P}^2}(a))$

dont le jet d'ordre  $-b_i$  en  $p_i$  ( $b_i - b_i \geq 0$ ) est de la forme (\*)

$$T_{\Omega} \in H^0(T_{\mathbb{P}^2}(a-3)) \quad T_{\Omega} = P(x,y) \left( x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) + Q \quad H^1(\Omega_{\mathbb{P}^2}(a)) = 0$$

Soit  $C$  la conique qui passe par les  $p_i$

$$\text{Comme } H^0(T_{\mathbb{P}^2}) \longrightarrow H^0(T_{\mathbb{P}^2}|_C) \longrightarrow H^1(T_{\mathbb{P}^2}(-2))$$

il existe un champ de vecteur tangent  $\tau$  le long de  $C$  à  $C$ .

$$\tau_{\Omega} = \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) + x g(x,y) \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

$$T_{\Omega} \wedge \tau = x P(x,y) \left( \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y} \right) + Q$$

$T_{\Omega} \wedge \tau$  s'annule à l'ordre  $-b_i$  en  $p_i$

$$T_{\Omega} \wedge \tau \in H^0(\mathcal{L}_{T_{\mathbb{P}^2}}^2(a-3)) = H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(a)) = H^0(\mathcal{O}_C(2a))$$

Si  $T_{\Omega} \wedge \tau|_C \neq 0$

$$2a \geq -\sum b_i + 2 \quad a \geq 2$$

annulateur de  $\tau$

Si  $T_{\Omega} \wedge \tau = 0$  Comme  $\tau$  est générique

$$T_{\Omega}|_C \in H^0(T_C(a-3)) = H^0(\mathcal{O}_C(2a-6+2))$$

$$2a-4 \geq \sum (-b_i - 1)$$

$a=2$   $T_{\Omega} \in H^0(T\mathbb{P}^2(-1)) = \mathbb{C}^3$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{C}^3 \rightarrow T\mathbb{P}^2(-1) \rightarrow 0$$

Pour  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$   $T_{\Omega}$  correspond à  $(x, y) \mapsto$

$T_{\Omega}$  est Eulerienne en un seul point  $[v]$  d'ordre 2.

$a=3$   $T_{\Omega} \in H^0(T\mathbb{P}^2) = \mathfrak{sl}_3$

$$[X; Y; Z] \rightarrow \begin{pmatrix} aX + bY + cZ \\ dX + eY + fZ \\ gX + hY + iZ \end{pmatrix} \text{ mod } \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Eulerien d'ordre en chaque direction propre  
d'ordre égal à la multiplicité de la valeur propre

$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$	<del>1</del> $u$ $v$	$\begin{pmatrix} 1 \\ u \\ 2v \end{pmatrix} \text{ mod } \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$	ordre 1
	$u$ $v$ $1$	$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 2 \end{pmatrix} \text{ mod } \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u \\ -v \\ 0 \end{pmatrix}$	ordre 2