N° d'ordre : 4331 ANNÉE 2011

**THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1**
*sous le sceau de l'Université Européenne de Bretagne*

pour le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1**

*Mention : Mathématiques*

**Ecole doctorale Matisse**

présentée par


# Noël Le Du

préparée à l'unité de recherche
IRMAR / UMR 6225 du CNRS
Institut de recherche mathématique de Rennes
Université Rennes 1


---

# Hessien de la forme métrique sur les espaces de twisteurs

**Thèse soutenue à Rennes le 19 Mai 2011**

devant le jury composé de :

**Paolo de BARTOLOMEIS**
Professeur à l'université de Florence / Rapporteur

**Laurent MEERSSEMAN**
Professeur à l'université de Bourgogne / rapporteur

**Frédéric CAMPANA**
Professeur à l'université Nancy 1 / examinateur

**Frank LORAY**
Directeur de recherches à l'IRMAR / examinateur

**Christophe MOUROUGANE**
Professeur à l'université Rennes 1 / directeur de thèse

**Noël Le Du**

# HESSIEN DE LA FORME MÉTRIQUE SUR LES ESPACES DE TWISTEURS

*Noël Le Du*

*10 mai 2011*

# HESSIEN DE LA FORME MÉTRIQUE SUR LES ESPACES DE TWISTEURS

**Noël Le Du**

***Résumé.*** — L'objectif principal de la thèse est de calculer le Hessien ($id'd"\omega$)de la forme métrique $\omega$ d'un espace twistoriel associé à une variété riemannienne $M$ orientée de dimension 4, lorsque la métrique est anti-autoduale. Ces notions seront définies ou rappelées selon le cas, au fil du document. Pour y parvenir, il est nécessaire d'étudier en détail les champs de vecteurs sur un tel espace, ce qui constitue la préoccupation principale du document.

Accessoirement, on revisite les propriétés conformes des espaces twistoriels, surtout la correspondance bijective existant entre les classes d'isomorphies des espaces twistoriels et les classes d'équivalences de métriques conformes sur $M$. Plus directement liée à notre problématique, on étudie la relation entre les métriques anti-autoduales et les structures presque complexes intégrables sur $M$.

# TABLE DES MATIÈRES

**Panorama** . . . . . 1

**Partie I. Notions de base** . . . . . 7

**1. Introduction** . . . . . 9
1.1. Quelques propriétés des variétés complexes . . . . . 9
1.2. Exemple de $\mathbf{R}^4$ . . . . . 10
1.3. Tenseur de courbure d'une variété riemannienne $(M, g)$ . . . . . 11

**2. Fibré twistoriel** $\tau(M, g)$ . . . . . 13
2.1. Condition d'intégrabilité de Newlander-Nirenberg . . . . . 13
2.2. Structure hermitienne associée à $J$ . . . . . 13
2.3. Fibré twistoriel de $(M, g)$ . . . . . 13

**3. Fibré des repères** $P_{SO}(M)$ . . . . . 17
3.1. Espace des vecteurs verticaux dans $P$ . . . . . 17
3.2. Espace des vecteurs horizontaux dans $P$ associé à une connexion . . . . . 18
3.3. Connexion riemanienne $\nabla$ de $M$ et connexion sur $P$ . . . . . 21
3.4. 2-forme de courbure sur P . . . . . 21
3.5. Relation entre 2-forme de courbure et tenseur de courbure . . . . . 21

**4. Structures sur** $\tau(M, g)$ . . . . . 23
4.1. Relation entre $P_{SO}(M)$ et $\tau(M)$ . . . . . 23
4.2. Espaces horizontaux et verticaux dans $\tau(M)$ . . . . . 24
4.3. Structure presque complexe sur $\tau(M)$ . . . . . 28
4.4. Structure riemannienne sur $\tau(M)$ . . . . . 29
4.5. Forme de Kähler $\omega$ . . . . . 29

**5. Propriétés conformes** . . . . . 31
5.1. Isomorphismes d'espaces twistoriels et transformations conformes . . . . . 31
5.2. Relation entre intégrabilités sur deux espaces conformes . . . . . 34
5.3. Cas de $\mathbf{R}^4$ et $S^4$ . . . . . 35

**6. Calcul du crochet** $[\hat{\theta}, \hat{\theta}']$ . . . . . 37
6.1. Crochets élémentaires . . . . . 37
6.2. Crochet de deux relèvements horizontaux . . . . . 38

**7. Relation entre l'opérateur de courbure $R$ et $d\omega$** .......... 41
7.1. Isomorphisme entre $so(TM)$ et $\Lambda^2 TM$ .......... 41
7.2. Relation entre les vecteurs tangents verticaux et $so(T_x M)$ .......... 41
7.3. Relation entre l'opérateur de courbure $R$ et $d\omega$ .......... 42

**8. Intégrabilité de $\mathbb{J}$** .......... 45
8.1. Opérateur de Hodge .......... 45
8.2. $\sigma_a$ et $\mu_a$ .......... 45
8.3. cas particulier n=4 .......... 46
8.4. CNS .......... 48

**9. Champs de vecteurs dans $\tau(M)$** .......... 55
9.1. Champs holomorphes et anti-holomorphes .......... 55
9.2. Crochet de champs de vecteurs horizontaux .......... 56
9.3. Crochets d'un champ horizontal et d'un champ vertical .......... 57
9.4. Crochet de deux champs de vecteurs verticaux .......... 59

**Partie II. Calcul de $id'd''\omega$ dans le cas $n = 2$** .......... 61

**10. Expressions simplifiées** .......... 63
10.1. $\theta_i^h \wedge \theta_j^h$, $\theta_i^h \wedge \theta_j^a$ .......... 63
10.2. $d\omega$ et courbure scalaire .......... 63
10.3. Condition pour que $(\tau(M), \mathbb{J})$ soit kählérien .......... 65

**11. Calcul du hessien $id'd''\omega$** .......... 67
11.1. Préparatifs .......... 67
11.2. Calcul final .......... 68
11.3. Tableau récapitulatif .......... 78
11.4. Signe du $id'd''\omega$ dans le cas $R = 0$ ou $M$ est $K^3$ .......... 79
11.5. Cas où la variété est Einstein et $2n > 4$ .......... 80

**Bibliographie** .......... 81

***Remerciements***. — *L'élaboration de cette thèse a étée rendue possible, grâce à Christophe Mourougane qui a accepté d'être mon directeur de thèse. Je le remercie ici pour son soutien constant et nos réunions régulières au cours de ces 4 années d'études.*

*Je dois aussi remercier Guillaume Deschamps qui avait fait une thèse en 2005 sur des sujets analogues. Il m'a accueilli à Brest plusieurs fois et m'a fait bénéficier de ses connaissances.*

*Je dois aussi remercier les membres du jury et notamment les deux rapporteurs, Laurent Meersseman et Paolo de Bartolomeis, qui ont accepté de corriger fautes et erreurs et de juger de la qualité de ce travail.*

*Enfin, je remercie les membres du personnel de la bibliothèque d'IRMAR, qui m'ont aidé dans la recherche de documents et revues.*

# PANORAMA

Dans cette thèse, j'étudie les espaces twistoriels. Une des justifications à l'introduction de tels espaces est la recherche de conditions pour munir des variétés réelles de structures de variétés complexes, compatibles avec la structure réelle sous-jacente.

Il n'y a que le dernier chapitre (calcul du $id'd"\omega$) qui est nouveau, les chapitres antérieurs étant développés pour rappeler le contexte. Ils sont néanmoins le prétexte dans certains cas à la recherche de démonstrations personnelles se voulant optimisées. Dans ces chapitres, je m'appuie essentiellement sur **[B-N]** et **[D]**.

Ce calcul peut être motivé par les considérations suivantes :
Sur l'espace twistoriel $\tau(M) = \tau(M,g)$ associé à une variété riemannienne $(M,g)$ de dimension réelle 4, on considère $\mathcal{V}$ l'espace des cycles (courbes complexes compactes de dimension complexe 1) tracées dans $\tau(M)$. Comme exemple d'élément de $\mathcal{V}$, on peut citer les fibres de $\tau(M)$, considéré comme fibré sur $M$. On note $\omega$ la forme de kähler sur $\tau(M)$. On considère la forme $\psi : \mathcal{V} \to \mathbf{R} : \sum_i n_i C_i \to \sum_i n_i \int_{C_i} \omega$. (sommes finies, avec $n_i \in \mathbb{Z}$) Le hessien de $\psi$, $id'd"\psi$ se calcule en fonction du hessien $id'd"\omega$, et la positivité de ce dernier (par exemple sur les surfaces $K3$) implique que $\psi$ est une fonction d'exhaustion pluri sous-harmonique.

D'une manière générale, pour un espace vectoriel euclidien $E$ et selon les notations usuelles, $SO(E)$ désigne le groupe des endomorphismes orthogonaux directs ; de même $so(E)$ désigne l'espace vectoriel des endomorphismes de $E$, anti-symétriques. Si $E = \mathbf{R}^n$, on notera $SO(n)$ et $so(n)$ les espaces de matrices associés.

Pour une variété différentiable $M$, connexe, orientée de dimension paire $2n$, munie d'une métrique riemannienne $g$, on note $TM$ son fibré tangent ; on définit le fibré twistoriel $(\tau(M,g), \pi, M)$ (=$\tau(M)$ en abrégé) comme le fibré sur $M$, où $\pi : \tau(M) \to M$ est la projection telle que la fibre en $x \in M$ s'écrit :

$$\pi^{-1}(x) = \{u \in SO(T_xM), u^2 = -Id, u >> 0\}.$$

La propriété $u >> 0$ sera précisée (endomorphisme à chiralité positive). $\tau(M)$ est une variété réelle de dimension $n(n+1)$. Les fibres ont de multiples propriétés : ce sont des variétés réelles de dimension $n(n-1)$, connexes, compactes, kählériennes.

En un point $a \in \tau(M)$, on définit l'espace des vecteurs tangents verticaux en $a$ comme l'espace tangent à la fibre $\pi^{-1}(x)$ en $a$ : $\mathcal{V}_a = T_a\pi^{-1}(x) \subset T_a\tau(M)$ , avec $\pi(a) = x$. On montrera que l'on peut écrire un élément de $\mathcal{V}_a$ de deux façons :

$$\mathcal{V}_a = \{u \in End(T_xM),\ u \circ a + a \circ u = 0 \text{ et } \ u + u^* = 0\}$$

$$\mathcal{V}_a = \{u \in End(T_xM,\ \exists v \in so(T_xM)\ tel\ que\ u = [a,v]\}$$

On peut aussi décrire la version opérateur différentiel d'un élément de $\mathcal{V}_a$ de la manière suivante : dans un repère local $R$, un point $a$ est repérable par deux coordonnées $x$ et $X$

avec $X \in SO(\mathbf{R}^{2n})$, $X^2 = -Id$ et $X >> 0$. Un élément $V$ de $\mathcal{V}_a$ peut alors s'écrire :

$$V = \sum_{i,j} [X, S]_{ij} \frac{\partial}{\partial X_{ij}} = ([X, S]^\bullet \ symboliquement)$$

où $S \in so(2n)$. En considérant $P_{SO}M$, fibré des repères orthonormés directs sur $M$ et la connexion riemannienne sur $M$, en un point $a \in \tau(M)$ on montre l'existence d'un espace horizontal $\mathcal{H}_a$ privilégié tel que $T_a\tau(M) = \mathcal{V}_a \oplus \mathcal{H}_a$, tel que $\pi_{*a}$ soit un isomorphisme de $\mathcal{H}_a$ sur $T_xM$. Si $\theta \in T_xM$, on définit et on note $\hat{\theta}^a$ l'antécédent horizontal de $\theta$ par cet isomorphisme (donc $\pi_{*a}\hat{\theta}^a = \theta$), que l'on appelle le relevé horizontal de $\theta$ en $a$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité , on ne note pas l'indice $a$. Le point $a$ étant fixé de coordonnées $(x, X)$, je montre que pour tous champs $\theta$ et $\theta'$ sur $M$ (champs basiques)

$$[\hat{\theta}, \hat{\theta}'] = \widehat{[\theta, \theta']} + [X, \widetilde{\Omega}(\theta, \theta')]^\bullet$$

ou $\widetilde{\Omega}$ est la 2-forme de courbure de $M$ (à valeurs dans $so(2n)$).

Puis on définit une structure presque complexe $\mathbb{J}_a \in End(T_a\tau(M))$ de la manière suivante :
- sur $\mathcal{H}_a$ : $\mathbb{J}_a(\hat{\theta}^a) = \widehat{a(\theta)}^a$, (relevé horizontal en $a$ de $a(\theta)$).
- sur $\mathcal{V}_a$ : $\mathbb{J}(u) = a \circ u$ (selon la forme des éléments de $\mathcal{V}_a$ donnée plus haut).

Désignant par $\hat{\theta}$, $\hat{\theta}'$ des éléments de $\mathcal{H}_a$et par $u$, $u'$ des éléments de $\mathcal{V}_a$, on définit une métrique $\mathbb{G}$ sur $\tau(M)$ comme suit :
$\mathbb{G}(\hat{\theta}, \hat{\theta}') = g(\theta, \theta')$ , $\mathbb{G}(\hat{\theta}, u) = 0$, ($\mathcal{H}_a$ et $\mathcal{V}_a$ sont donc orthogonaux par définition), $\mathbb{G}(u, u') = -\frac{1}{2}Trace(u \circ u')$. En général, on omet $a$ dans les notations, sachant néanmoins que $a$ est représenté par ses deux coordonnées $(x, X)$. On vérifie du fait des propriétés de $a$ que $\mathbb{J}^2$=-Id et que $\mathbb{J}$ est $\mathbb{G}$ orthogonal. La forme de kähler relative à $\mathbb{J}$ et $\mathbb{G}$ est définie pour tous $U$ et $V \in T_a\tau(M)$ par :

$$\omega(U, V) = \mathbb{G}(U, \mathbb{J}V).$$

On suppose $\mathbb{J}$ intégrable. Alors il existe une seule structure de variété complexe sur $\tau(M)$, compatible avec $\mathbb{J}$. Alors on a les deux décompositions, $T_a\tau(M)^c = \mathcal{H}_a^c \oplus \mathcal{V}_a^c = T_a\tau(M)' \oplus T_a\tau(M)''$, avec la notation c=complexifié, le deuxième membre désignant les champs holomorphes et anti-holomorphes, c'est à dire : $(T_a\tau(M)' = \{U,\ \mathbb{J}_aU = iU\}$ et $(T_a\tau(M)'' = \{U,\ \mathbb{J}_aU = -iU\}$.

On montre qu'il existe un isomorphisme $\Phi : so(T_xM) \to \wedge^2 T_xM$, défini par $\hat{g}(\Phi(u), X \wedge Y) = g(u(X), Y)$ ou $\hat{g}$ est le produit scalaire construit sur $\wedge^2 TM$ à partir de $g$. Pour deux vecteurs $\theta$ et $\theta'$ de $T_xM$, on définit alors le champ vertical $\Lambda(\theta \wedge \theta')(a) = [a, \Phi^{-1}(\theta \wedge \theta')]^\bullet$.

On montre alors la relation entre $d\omega$ et $\hat{R}$ opérateur de courbure ( $\in Sym(\wedge^2 TM)$), qui n'est autre que la formule montrée dans **[B-N]** mise sous une autre forme : dans un repère $R(x) = (x; \theta_1, ..., \theta_{2n})$, U désignant un vecteur vertical,

$$d\omega(\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j, U) = \mathbb{G}(\Lambda((\frac{1}{2}Id - \hat{R})\theta_i \wedge \theta_j), \mathbb{J}U).$$

La forme $d\omega$ s'annule sur les autres types de triplets relatifs à la décomposition horizontale/verticale car si $H$, $H_1$, $H_2$, ... désignent des vecteurs horizontaux et $V_1$, $V_2$... des vecteurs verticaux

$$d\omega(H_1, H_2, H_3) = 0,\ d\omega(V_1, V_2, H) = 0,\ d\omega(V_1, V_2, V_3) = O.$$

Ces trois dernières relations sont démontrées dans **[B-N]** et seront admises dans la suite.

On a une décomposition

$$\hat{R} = \frac{s}{2n(2n-1)} Id_{\wedge^2 TM} + \widehat{A \bullet g} + W$$

qui est orthogonale dans $Sym(\wedge^2 TM)$ pour le produit scalaire $(u, v) = Trace(u \circ v)$, et où $TraceA = 0$. Le tenseur $W$ s'appelle le tenseur de Weyl.

Dans le cas $2n = 4$, grâce à l'opérateur de Hodge, qui vérifie $\star^2 = Id$, on peut écrire la décomposition

$$\wedge^2 T_x M = \wedge^2_+ T_x M \oplus \wedge^2_- T_x M,$$

avec

$$\wedge^2_+ T_x M = \{\varphi \in \wedge^2 T_x M, \star\varphi = \varphi\},\ \wedge^2_- T_x M = \{\varphi \in \wedge^2 T_x M, \star\varphi = -\varphi\}.$$

Pour simplifier les notations on écrira en général $\wedge_x = \wedge^2 T_x M$, $\wedge_{+x} = \wedge^2_+ T_x M$ et $\wedge_{-x} = \wedge^2_- T_x M$ de sorte que $\wedge_x = \wedge_{+x} \oplus \wedge_{-x}$. Cette décomposition permet de scinder $W$ en W=$W_+ + W_-$. La métrique $g$ est dite anti-autoduale si $W_+ = 0$ . Il y a alors une relation connue entre l'intégrabilité de $\mathbb{J}$ et le tenseur de Weyl : $\mathbb{J}$ est intégrable si et seulement si : pour $2n = 4$ $W_+$=0 et pour $2n > 4$, $W = 0$.

Les propriétés conformes sont revisitées : il y a une équivalence entre les classes d'isomorphie de fibrés twistoriels et les classes de métriques conformes. On termine cette partie en faisant correspondre les structures intégrables de deux variétés conformes : si $\sigma$ :$(M, g) \to (N, h)$ est conforme, il y a une correspondance bijective entre les structures presque complexes intégrables de $M$ et de $N$ via $\sigma$. On pose $nd$= pôle nord de $S^4$. On applique à $M = S^4 - (nd)$, $N = \mathbf{R}^4$, $\sigma$ étant la projection stéréographique. Comme les structures intégrables de $\mathbf{R}^4$ sont toutes de la forme $aI + bJ + cK$ où $a$,$b$,$c$ sont des constantes réelles avec $a^2 + b^2 + c^2$=1, et $I$, $J$, $K$ sont des structures presques complexes élémentaires de $\mathbf{R}^4$, vérifiant les relations quaternioniques usuelles, on en déduit celles de $S^4 - (nd)$. Notons qu'il n'existe aucune structure presque complexe intégrable sur $S^4$ en entier (résultat dû à JP Serre).

Je termine ce résumé par une brève description du calcul de $dd'\omega(= -d'd"\omega)$, en dimension $2n = 4$, et en supposant que $\mathbb{J}$ est intégrable, ce qui est équivalent à $g$ est anti-autoduale. La forme $dd'\omega$ est de degré 4 et de type $(2, 2)$. Pour la calculer, il "suffit" donc de la calculer sur des configurations $dd'\omega(h, h', ah, ah')$ ou $h$ et $h'$ sont des vecteurs de type holomorphe et $ah$ et $ah'$ sont des vecteurs de type anti-holomorphes. Les différents cas sont répertoriés dans un des tableaux en fin de document, qui combine les deux types de vecteurs tangents à $\tau(M)$ en un point $a$ de $\tau(M)$ : horizontal/vertical, holomorphe/anti-holomorphe.

Pour un vecteur tangent $L$ à $\tau(M)$ quelquonque, on a la décomposition :$L = L^h + L^a$ ou $L^h = \frac{1}{2}(L - i\mathbb{J}L)$ désigne la composante holomorphe de $L$, et $L^a = \frac{1}{2}(L + i\mathbb{J}L)$ désigne la composante anti- holomorphe de $L$. Ce qui simplifie les calculs, c'est en particulier le fait que en dimension 2n=4,

$$d\omega(\hat{\theta}_i^{\ h},\hat{\theta}_j^{\ h},U)=(1-\frac{s}{6})U^a_{ij},$$

$s$ désignant la courbure scalaire (ce qui montre au passage que si la métrique naturelle de $\tau(M)$ est kählérienne, alors $s=6$). De plus, pour $u$ et $v\in so(T_xM)$, tels que $\Phi(u)\in\wedge_{+x}$ et $\Phi(v)\in\wedge_{-x}$, alors $[u,v]=u\circ v-v\circ u=0$. Ceci s'applique dans le cas où $u=a\in\tau(M)$, et $\xi\in\wedge_{-x}$, alors $[a,\Phi^{-1}\xi]=0$.

Dans le tableau de calcul, sont répertoriés l'ensemble des cas possibles (à l'ordre près). La règle de conjuguaison permet de limiter les calculs : en effet au signe près, les cas 2 et 4 sont conjugués, de même que les cas 3 et 7, et les cas 6 et 8. Le cas 9 est traité à part, puisque $d\omega$=0 sur les vecteurs verticaux (la fibre est kählérienne). Les calculs sont réalisés à l'aide de lemmes, concernant les crochets de champs de vecteurs en particulier. Les résultats sont réunis dans le tableau suivant, le cas particulier où $M$ est une surface $K^3$, munie d'une métrique Ricci-plate laissant apparaitre qu'il n'y a qu'une seule configuration qui est non nulle (deux vecteurs horizontaux, l'un holomorphe, l'autre anti-holomorphe, et deux vecteurs verticaux, avec les mêmes caractéristiques).

| champ | $\xi_0$ | $\xi_1$ | $\xi_2$ | $\xi_3$ | id'd"$\omega$ | $K^3$ ou $R=0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| type de champ | $h$ | $h$ | $ah$ | $ah$ | | |
| cas 1 | $\hat{\theta}^h_k$ | $\hat{\theta}^h_h$ | $\hat{\theta}^a_r$ | $\hat{\theta}^a_s$ | (1) | 0 |
| cas 2 | $\hat{\theta}^h_k$ | $U^h$ | $\hat{\theta}^a_r$ | $\hat{\theta}^a_s$ | $-i(I-ia)\theta_k(\frac{s}{12})U^h_{rs}$ | 0 |
| cas 3 | $U^h$ | $V^h$ | $\hat{\theta}^a_k$ | $\hat{\theta}^a_h$ | 0 | 0 |
| cas 4 | $\hat{\theta}^h_k$ | $\hat{\theta}^h_h$ | $V^a$ | $\hat{\theta}^a_s$ | $-i(I+ia)\theta_s(\frac{s}{12})U^a_{kh}$ | 0 |
| cas 5 | $\hat{\theta}^h_k$ | $U^h$ | $V^a$ | $\hat{\theta}^a_h$ | (5) | $-\frac{1}{2}(V^aU^h)_{kh}$ |
| cas 6 | $U^h$ | $V^h$ | $W^a$ | $\hat{\theta}^h_k$ | 0 | 0 |
| cas 7 | $\hat{\theta}^h_k$ | $\hat{\theta}^h_h$ | $U^a$ | $V^a$ | 0 | 0 |
| cas 8 | $\hat{\theta}^h_k$ | $U^h$ | $V^a$ | $W^a$ | 0 | 0 |
| cas 9 | $U^h$ | $V^h$ | $W^a$ | $X^a$ | 0 | 0 |

En posant $B=\widehat{A\bullet g}$, $A$ étant l'opérateur de Ricci à trace nulle intervenant dans la décomposition de $\hat{R}$

$$\begin{aligned}(1) &= \mathbb{G}(\Lambda(B(\theta^h_h\wedge\theta^a_s)),\Lambda(B(\theta^h_k\wedge\theta^a_r)))\\ &\quad -\mathbb{G}(\Lambda(B(\theta^h_h\wedge\theta^a_r)),\Lambda(B(\theta^h_k\wedge\theta^a_s)))+i(1-\frac{s}{6})\frac{s}{12}(\Lambda(\theta^a_r\wedge\theta^a_s))^a_{kh}.\\ (5) &= -V^a(\mathbb{G}(\Lambda(B(\theta^h_k\wedge\theta^a_h)),U^h))\\ &\quad -i\frac{1}{2}\sum_r V^a_{rk}\mathbb{G}(\Lambda(B(\theta^h_r\wedge\theta^a_h)),U^h)-\frac{1}{2}(1-\frac{s}{6})(V^aU^h)_{kh}\\ &\quad +i\frac{1}{2}\sum_r V^a_{rh}\mathbb{G}(\Lambda(B(\theta^h_k\wedge\theta^a_r)),U^h).\end{aligned}$$

Certaines notations peuvent prêter à confusion. Par exemple dans une expression du type $(1-\frac{s}{6})\frac{s}{12}(\Lambda(\theta^h_r\wedge\theta^h_s))^a_{kh}$ :
*la lettre $s$ apparait deux fois, et les significations sont différentes car dans l'expression $(1-\frac{s}{6})\frac{s}{12}$, $s$ désigne la courbure scalaire, alors que $s$ par ailleurs désigne un indice (de

champ).
*la lettre $h$ en indice en haut signifie composante holomorphe, alors que par ailleurs $h$ désigne un indice (de matrice).
*la lettre $a$ peut aussi être source de confusion : avec les notations utilisées, dans l'expression $\Lambda(\theta_r^h \wedge \theta_s^h))_{kh}^a = [a, \Phi^{-1}(\theta_r^h \wedge \theta_s^h)]_{kh}^a$, le premier $a$ du second membre désigne un endomorphisme, alors que le second désigne une composante anti-holomorphe.
D'une manière générale les indices élevés désignent des composantes holomorphes($h$), ou anti-holomorphes ($a$), alors que les indices en bas désignent des indices.

# PARTIE I

# NOTIONS DE BASE

# CHAPITRE 1

# INTRODUCTION

## 1.1. Quelques propriétés des variétés complexes

Soit $M$ une variété complexe telle que $dim_{\mathbf{C}} M = n$.

**1.1.1. Orientabilité.** — On considère un atlas sur $M$, donnant la structure complexe. Les changements de cartes sont holomorphes. Si $(U, \varphi)$ et $(V, \psi)$ sont deux cartes ($\varphi(U)$ et $\psi(V) \subseteq \mathbf{C}^n$) telles que $U \cap V \neq \emptyset$, alors $F = \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ est telle que

$$\det(d_{\mathbf{R}} F) = |\det(d_{\mathbf{C}} F)|^2 > 0.$$

De cette stricte positivité, on conclut que toute variété complexe induit une orientation sur la variété réelle sous-jacente.

**1.1.2. Structure d'espace vectoriel complexe sur $T_x M$.** — Lorsque l'on considère l'espace tangent en un point $x$ de $M$, il s'agit de celui qui concerne la structure réelle sous-jacente. Si $X \in T_x M$, on sait définir un élément $i.X \in T_x M$ de la façon suivante : dans une carte $(U, \varphi)$, telle que $x \in U$ et $\varphi(x) = 0$, $\varphi(U) \subseteq \mathbf{C}^n$, par définition $X = [t \mapsto \varphi^{-1}(tV)]$, ou $V \in \mathbf{C}^n$ et $t \mapsto \varphi^{-1}(tV)$ est une courbe tracée dans $M$, et définie pour $t$ voisin de 0 dans $\mathbf{R}$, et le crochet désigne la classe d'équivalence de cette courbe(deux courbes sont équivalentes si elles ont mêmes dérivées à l'origine). On définit alors : $iX = [t \mapsto \varphi^{-1}(tiV)]$, qui ne dépend pas de la carte utilisée. En effet, si on exprime $X$ par deux cartes différentes : X=$[t \mapsto \varphi^{-1}(tV)] = [t \mapsto \psi^{-1}(tW)]$, avec $V$ et $W$ dans $\mathbf{C}^n$, on vérifie que $W = d_0(\psi \circ \varphi^{-1})(V)$.(différentielle réelle en 0). Du fait que $\psi \circ \varphi^{-1}$ est holomorphe, la différentielle considérée est $\mathbf{C}$-linéaire . On déduit $i.W = d_0(\psi \circ \varphi^{-1})(i.V)$ donc $[t \mapsto \varphi^{-1}(ti.V)] = [t \mapsto \psi^{-1}(tiW)]$. On déduit l'existence d'une structure d'espace vectoriel complexe sur $T_x M$.

**1.1.3. Endomorphisme $J$ de $T_x M$, lié à sa structure complexe.** — On définit $J$ par : $J(X) = iX$. On obtient un endomorphisme de $T_x M$ vérifiant $J^2 = -Id$ ($i^2 = -1$). On peut donner une expression de $J$ en fonction des coordonnées locales : dans une carte $(U, \varphi)$ au voisinage de $x$, on peut écrire : $\varphi(m) = (z_1(m), ..., z_n(m))$ où $z_k(m) = x_k(m) + iy_k(m)$. Dans la structure réelle associée : $\frac{\partial}{\partial x_k}|_x = [t \to \varphi^{-1}(tV_k)]$ où $V_k = (\overbrace{0}^{1}, ..., \overbrace{1}^{k}, ... \overbrace{0}^{n})$ et $\frac{\partial}{\partial y_k}|_x = [t \to \varphi^{-1}(tW_k)]$ où $W_k = (\overbrace{0}^{1}, ..., \overbrace{i}^{k}, ... \overbrace{0}^{n})$ .

On voit que $W_k = iV_k$, d'où avec les notations utilisées :

$$\begin{aligned} J(\frac{\partial}{\partial x_k}|_x) &= i\frac{\partial}{\partial x_k}|_x = \frac{\partial}{\partial y_k}|_x \\ J(\frac{\partial}{\partial y_k}|_x) &= -\frac{\partial}{\partial x_k}|_x \end{aligned}$$

La matrice de $J$ dans la base $(\frac{\partial}{\partial x_1}|_x, \frac{\partial}{\partial y_1}|_x, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}|_x, \frac{\partial}{\partial y_n}|_x)$ est

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & .. & .. & .. & 0 & 0 \\ 1 & 0 & .. & .. & .. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & .. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & .. & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & .. & .. & 0 & -1 \\ 0 & 0 & .. & .. & .. & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

### 1.2. Exemple de $\mathbf{R}^4$

On peut munir $\mathbf{R}^4$ d'une structure de variété complexe en prenant comme atlas à une seule carte, $(\mathbf{R}^4, \varphi)$, avec

$$\varphi : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{C}^2 : (x_1, y_1, x_2, y_2) \to (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2).$$

On désignera par $I$ l'endomorphisme correspondant $(I_x(X) = i.X)$ de $T_xM$. En un point x de $\mathbf{R}^4$, la matrice de $I_x$ dans la base $\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial y_k}$ est

$$I_x = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a ici en plus de $I_x^2 = -Id$ que $I_x \in SO(T_x\mathbf{R}^4)$, pour la métrique euclidienne canonique.

Si au lieu de considérer la structure ci-dessus, on considère la carte

$$\psi : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{C}^2 : (x_1, y_1, x_2, y_2) \to (x_1 + ix_2, y_1 - iy_2),$$

cette carte génère une structure de variété complexe, différente de la première ; en effet le changement de carte est $\psi \circ \varphi^{-1}(z_1, z_2) = \frac{1}{2}((z_1 + \overline{z_1}) + i(z_2 + \overline{z_2}), -i(z_1 - \overline{z_1}) + (z_2 - \overline{z_2}))$, qui est non holomorphe.

***Remarque 1.2.1***. — Ces deux structures sont différentes mais "isomorphes" en ce sens qu'il existe une application biholomorphe entre les deux :
$F : (\mathbf{R}^4, \varphi) \to (\mathbf{R}^4, \psi) : (x_1, y_1, x_2, y_2) \to (x_1, x_2, y_1, -y_2)$ est égale à l'identité en coordonnées : $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} = Id_{\mathbf{R}^4}$.
Dans ce document on ne considère pas les classes d'isomorphies de structures.

La matrice de l'endomorphisme $J_x$ ($J_x(X) = i.X$) dans la même base $\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial y_k}$ est

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut le justifier en écrivant comme dans le cas général ci-dessus :
$(z_1(m), z_2(m)) = (X_1 + iY_1, X_2 + iY_2) = (x_1 + ix_2, y_1 - iy_2)$ , donc $X_1 = x_1$, $Y_1 = x_2$, $X_2 = y_1$, $Y_2 = -y_2$. Ensuite $J_x(\frac{\partial}{\partial X_k}) = \frac{\partial}{\partial Y_k}$ et $J_x(\frac{\partial}{\partial Y_k}) = -J_x(\frac{\partial}{\partial X_k})$. On déduit

$$\begin{aligned} J_x(\frac{\partial}{\partial x_1}) &= J_x(\frac{\partial}{\partial X_1}) = \frac{\partial}{\partial Y_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \\ J_x(\frac{\partial}{\partial y_1}) &= J_x(\frac{\partial}{\partial X_2}) = \frac{\partial}{\partial Y_2} = -\frac{\partial}{\partial y_2}. \end{aligned}$$

De même on pourrait considérer la structure de variété complexe sur $\mathbf{R}^4$, définie par la carte $(x_1, y_1, x_2, y_2) \to (x_1 + iy_2, y_1 + ix_2)$. L'endomorphisme $K_x$ associé à cette structure à pour matrice, dans la même base $\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial y_k}$

$$K_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

### 1.3. Tenseur de courbure d'une variété riemannienne $(M, g)$

Ici $g$ désigne la métrique sur $M$. Le tenseur de courbure apparait de manière naturelle dans la suite, notamment lorsqu'on calcule des crochets de certains champs de vecteurs sur un espace twistoriel ou lorsqu'on calcule la différentielle de la forme de kähler d'un tel espace. On rappelle dans cette partie les propriétés basiques de l'endomorphisme de courbure, noté $R$. Je m'appuie sur les ouvrages **[K]** et **[L]** ; en particulier j'adopte la convention concernant la formule donnant le tenseur de courbure,

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

(certains auteurs prennent la convention opposée). Les résultats sont rappelés sans démonstration.

**1.3.1. Propriétés de $R$.** — On désigne par $\nabla$ la connexion riemannienne de $M$. Pour $X, Y, Z$ champs de vecteurs sur $M$, on note $R(X,Y)$ l'endomorphisme de courbure de $M$. $R$ est un tenseur et induit ainsi pour tous $x$ de $M$ et $X$ et $Y$ fixés de $T_xM$ un endomorphisme $R(X,Y)$ de $T_xM$(grâce à sa nature tensorielle). On pose aussi : $R(X,Y,Z,T) = g(R(X,Y)Z,T)$. Des propriétés de $R$, il résulte que

a.— $R(X,Y,Z,T) = -R(Y,X,Z,T)$ (anti-symétrie par rapport aux deux premières variables).
b.— $R(X,Y,Z,T) = -R(X,Y,T,Z)$ (anti-symétrie par rapport aux deux dernières variables).
c.— $R(X,Y,Z,T) = R(Z,T,X,Y)$ (symétrie par rapport aux deux couples de variables).
d.— $R(X,Y,Z,T) + R(Y,Z,X,T) + R(Z,X,Y,T) = 0$.(première identité de Bianchi).

**1.3.2. Produit scalaire $\wedge^2 TM$. Endomorphisme $\hat{R}$.** — Le produit scalaire $g$ sur $M$ induit un produit scalaire $\hat{g}$ sur $\wedge^2 TM$, défini comme suit :

$$\hat{g}(X \wedge Y, Z \wedge T) = g(X,Z).g(Y,T) - g(X,T).g(Y,Z).$$

On sait que pour tout opérateur $\Gamma$, à l'instar de $R$ et vérifiant les 4 propriétés a,b,c,d ci-dessus, on peut associer un opérateur $\widehat{\Gamma}$, tel que : $\hat{g}(\widehat{\Gamma}(X \wedge Y), Z \wedge T) = \Gamma(X,Y,Z,T)$.

**1.3.3. Cas particulier.** — Si $A$ et $B$ sont deux opérateurs symétriques : $TM \times TM \to \mathbf{R}$, on définit l'opérateur $\bullet$ par

$$\begin{aligned} A \bullet B : TM \times TM \times TM \times TM &\to \mathbf{R} \\ (X,Y,Z,T) &\mapsto A(X,Z)B(Y,T) + A(Y,T)B(X,Z) \\ &\quad -A(X,T)B(Y,Z) - A(Y,Z)B(X,T) \end{aligned}$$

L'opérateur $A \bullet B$ vérifie a,b,c,d. Si on prend par exemple $A = B = g$ , on obtient : $\widehat{g \bullet g} = 2Id_{\wedge^2 TM}$.

**1.3.4. Décomposition de $\hat{R}$ et tenseur de Weyl.** — On note $\mathcal{R}$ l'espace des tenseurs de type $(0,4)$ vérifiant a,b,c,d et $\hat{\mathcal{R}}$ son image par l'application $\hat{}$, à valeurs dans l'espace des opérateurs symétriques de $\wedge^2 TM$. Alors pour $n \geq 3$ on a une décomposition orthogonale pour le produit scalaire $(u,v) = Tr(u \circ v)$ :

$$\widehat{\mathcal{R}} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{Z} \oplus \mathcal{W}$$

avec $\mathcal{U}$ le sous espace engendré par l'identité, $\mathcal{Z}$ le sous-espace engendré par les tenseurs de la forme $\widehat{A \bullet g}$ avec $TraceA = 0$. $\mathcal{W} = (\mathcal{U} \oplus \mathcal{Z})^{\perp}$ (orthogonal pour le produit scalaire (,) ci-dessus).
(On peut par exemple consulter **[K]** sur cette question page 324). Comme $\hat{R} \in \mathcal{R}$, on a une décomposition

$$\hat{R} = \lambda Id_{\wedge^2 M} + \widehat{A \bullet g} + W$$

où si $s$ désigne la courbure scalaire, $Ric$ l'opérateur de Ricci,

$$\lambda = \frac{s}{n(n-1)}, \; A = \frac{1}{n-2}(Ric - \frac{s}{n}g).$$

***Définition 1.3.1.*** — $W$ s'appelle le tenseur de Weyl de $\hat{R}$.

On sait que $W$, considéré comme tenseur de type (1,3) ne dépend que de la classe conforme de la métrique $g$.(voir par exemple **[K]** page 334). De plus les métriques d'Einstein sont caractérisées par $A = 0$. On verra plus loin le lien entre l'intégrabilité de $\mathbb{J}$ et l'opérateur $W$.

# CHAPITRE 2

# FIBRÉ TWISTORIEL $\tau(M, g)$

## 2.1. Condition d'intégrabilité de Newlander-Nirenberg

On considère une variété différentiable réelle $M$ de dimension paire $2n$, orientable. On recherche à quelle(s) condition(s), il existe une ou des structures de variétés analytiques complexes sur $M$. L'étude précédente suggère de considérer des endomorphismes $J_x$ de $T_xM$ , tels que $J_x^2 = -Id$, qui donnent déja sur chaque espace tangent $T_xM$ une structure complexe par :$(a+ib)X = aX+bJ_xX$. L'existence d'un champ d'endomorphismes $x \to J_x$, global et "$C^\infty$" n'est pas toujours possible. Lorsque un tel champ $J$ existe et génère effectivement une structure de variété complexe sur $M$ , on dit que $J$ est intégrable. Un résultat dù à Newlander-Nirenberg permet d'assurer que $J$ est intégrable si et seulement si le tenseur de Nijenhuis de $J$ est nul. Ce tenseur, qui s'exprime par des crochets de champs de vecteurs $X$ et $Y$ sur $M$, est donné par :

$$N_J(X, Y) = [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y].$$

## 2.2. Structure hermitienne associée à $J$

On suppose de plus que $M$ est munie d'une métrique riemannienne $g$. Si $J_x$ est un endomorphisme de $SO(T_xM)$ tel que $J_x^2 = -Id$, on définit un produit hermitien sur $T_xM$, par : $h_{J_x}(X, Y) = g(X, Y) + ig(X, JY)$. Du fait que $dim_C T_xM = n$, il existe une $\mathbf{C}$- base $e_1, ..., e_n$ de $T_xM$, $h_{J_x}$ orthonormale. On montre alors que $e_1, J_x(e_1), ..., e_n, J_x(e_n)$ est une $\mathbf{R}$-base $g$-orthonormale de $T_xM$. On montre que l'orientation de cette dernière base ne dépend pas de la base $e_1, ...e_n$ orthonormale choisie . Si l'orientation est compatible avec l'orientation de la variété, on indique $J_x >> 0$, sinon on note $J_x << 0$.(chiralité de $J_x$)

## 2.3. Fibré twistoriel de $(M, g)$

***Définition 2.3.1***. — On pose :

$$\tau(M, g) = \{(x, a), x \in M,\ a \in SO(T_xM, g),\ \ \text{tq}\ \ a^2 = -Id\ \ \text{et}\ \ a >> 0\ \}.$$

Si aucune confusion d'espace n'est possible, on note cet espace $\tau(M)$. La projection sur $M$ est définie par $\pi_{\tau(M)}$ (ou $\pi$ si il n'y a pas de confusion d'espace), telle que $\pi(x, a) = x$. Avec ces notations, le triplet $(\tau(M), \pi, M)$ est un fibré $C^\infty$ sur M, localement trivial, appelé le fibré twistoriel de $(M, g)$.

**2.3.1. Propriétés des fibres.** — On indique ici quelques propriétés basiques des fibres de $(\tau(M), \pi, M)$ sans démonstrations. On peut consulter par exemple **[B-N]** pour des justifications ou plus de détail. On pose :

$$Z_+(n) = \{J \in SO(2n),\ J^2 = -Id,\ J >> 0\}.$$

Soit $x \in M$. La fibre $\pi^{-1}(x)$ s'identifie difféomorphiquement à $Z_+(n)$, via n'importe quel repère orthonormé direct $(x; \theta_1, ..., \theta_{2n})$ avec $\theta_k \in T_xM$, en faisant correspondre à $(x, a) \in \pi^{-1}(x)$ la matrice de $a$ dans la base $\{\theta_k\}$. Elle hérite donc des propriétés de $Z_+(n)$ :

•$Z_+(n)$ est une variété réelle connexe de dimension $n(n-1)$,donc de dimension 2 pour $2n = 4$. On montrera plus loin que dans ce dernier cas, $Z_+(2)$ est difféomorphe à $S^2$, la sphère unité de $\mathbf{R}^3$. Dans le cas général, $Z_+(n)$ est difféomorphe à $\frac{SO(2n)}{U(n)}$ via l'application $\Delta : SO(2n) \to Z_+(n) : A \to AJ_nA^t$ où $J_n$ est donnée par la matrice décrite ci-dessus. $Z_+(n)$ apparait alors comme le quotient d'un groupe de Lie (ici $SO(2n)$), par un sous-groupe fermé (ici $U(n)$). Par un résultat connu (voir par exemple **[M-T]**, à partir de la page 144), on peut alors munir ce quotient d'une structure de variété $C^\infty$ (via l'application exponentielle de $SO(2n)$).

•$Z_+(n)$ est compacte et connexe comme image continu d'un compact connexe, ici $SO(2n)$, par l'application $\Delta$.

•$Z_+(n)$ est une variété complexe de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$. Sur $T_XZ_+(n)$ il y a un endomorphisme particulier $J_X$ défini par : $J_X(P) = XP$.Cet endomorphisme vérifie $J_X^2 = -Id$ ; il génère donc une structure d'espace vectoriel complexe sur $T_XZ_+(n)$. Dans **[B-N]**,(pages 104-105-106), il est montré que $X \to J_X$ est intégrable en utilisant le théorème de Newlander-Nirenberg qui équivaut à la nullité du tenseur de Nijenhuis. (on reviendra sur ce thème au fil de la thèse).

•$Z_+(n)$ est kählérien : la métrique $g_0$ de $Z_+(n)$ est celle induite par celle existant sur $M(2n, \mathbf{R})$ : $g_0(A, B) = \frac{1}{2}Trace(AB^t) = -\frac{1}{2}Trace(AB)$ car ici $B^t = -B$.

Considérons $\omega$ la 2-forme définie sur $Z_+(n)$, à valeurs réelles : $\omega(U, V) = g_0(U, \mathbb{J}V)$( à interpréter en point X de $Z_+(n)$ comme $\omega(X; U, V) = g_0(U, XV) = g(XU, X^2V) = -g(V, XU) = -\omega(X; V, U)$ où U et V $\in T_XZ_+(n)$) alors on vérifie $d\omega = 0$ ; on déduit que $(M, \mathbb{J}, g)$ est kählérienne.

***Remarque 2.3.2.*** — On définit de manière analogue

$$Z_-(n) = \{J \in SO(\mathbf{R}^n),\ J^2 = -Id,\ J << 0\}.$$

De cette manière

$$Z(n) = \{J \in SO(\mathbf{R}^n),\ J^2 = -Id, \} = Z_- \cup Z_+.$$

Cette décomposition est la décomposition de $Z(n)$ en ses deux composantes connexes.

**2.3.2. Cas de la dimension 4 ($n = 2$).** — Utilisons les notations du corps non commutatif des quaternions $\mathbf{H}$. On a alors le résultat :

***Proposition 2.3.3.*** — *On a*

$$Z_+(2) = \{J:\mathbf{R}^4\to\mathbf{R}^4, \exists\ (b,c,d)\ \in \mathbf{R}^3\ tq\ b^2+c^2+d^2=1\ et\ J(x)=(bi+cj+dk).x\}$$
$$Z_-(2) = \{J:\mathbf{R}^4\to\mathbf{R}^4, \exists\ (b,c,d)\ \in \mathbf{R}^3\ tq\ b^2+c^2+d^2=1\ et\ J(x)=x.(bi+cj+dk)\}$$

*Démonstration.* — D'abord, rappelons quelques propriétés de $\mathbf{H}$. C'est un corps non commutatif, et un espace vectoriel de dimension 4 sur $\mathbf{R}$. Les éléments $i$,$j$ et $k$ vérifient $i^2$=$j^2$=$k^2$=-1 , $i.j=k$ et $1,i,j,k$ est une base de $\mathbf{H}$ sur $\mathbf{R}$. Dans $\mathbf{H}$, tout élément $p$ s'écrit donc $p=a+bi+cj+dk=(a+bi)+(c+di)j=\alpha+\beta$j , avec $a,b,c$ et $d\in\mathbf{R}$, $\alpha$ et $\beta\in\mathbf{C}$. Le conjugé de $p$ s'écrit $\overline{p}=a-bi-cj-dk=\overline{\alpha}-\beta j$. On vérifie alors que $\overline{p.q}=\overline{q}.\overline{p}$ pour tous $p$ et $q$ dans $H$. On définit la norme d'un élément $p$ de $\mathbf{H}$ par : $N(p)=p\overline{p}=a^2+b^2+c^2+d^2$. Le produit scalaire réel s'écrit : $<p,q>=Re(p\overline{q})$ ($Re(p)$=partie réelle de $p=a$ avec l'écriture initiale de $p$ ci dessus $=\frac{1}{2}(p+\overline{p})$.).
Si $\xi$ est un élément de $H$, de norme 1, montrons que $x\to\xi.x$ est orthogonale : $<\xi.x,\xi.y>=Re(\xi.x.\overline{\xi.y})=Re(\xi.x.\overline{y}.\overline{\xi})=\frac{1}{2}(\xi.(x.\overline{y}+y\overline{x}).\overline{\xi})$. Comme $x.\overline{y}+y\overline{x}$ est réel on peut l'extraire de l'intérieur du produit, soit : $<\xi.x,\xi.y>=<x,y>\xi.\overline{\xi}=<x,y>$ car $\xi$ est de norme 1. L'application considérée est donc orthogonale. De même l'application $x\to x.\xi$ est orthogonale . L'application x$\to\overline{x}$ est aussi orthogonale . Il résulte qu'une application de la forme $x\to-\xi.\overline{x}.\xi$ est aussi orthogonale comme composition d'applications orthogonales.
La réflexion orthogonale par rapport à $\xi$ de $\mathbf{R}^4$, de norme 1 , s'écrit $\rho_\xi(x)=-\xi.\overline{x}.\xi$ .En effet de ce qui précède , on sait déja qu'elle est orthogonale. Ensuite $\rho_\xi(\xi)=-\xi.\overline{\xi}.\xi=-\xi$. Pour terminer, pour x tel que $<x,\xi>=0$, $x.\overline{\xi}=-\xi.\overline{x}$, d'où $\rho_\xi(x)=-\xi.\overline{x}.\xi=x.\overline{\xi}.\xi=x$ ; donc $\rho_\xi$ laisse invariant point par point l'hyperplan $<x,\xi>$=0. Ces arguments montrent que $\rho_\xi$ est bien la réflexion orthogonale par rapport à $\xi$.
On en déduit que le produit de deux telles réflexions s'écrit : $\rho_\xi\circ\rho_{\xi'}(x)=\xi.\bar{\xi'}x\bar{\xi'}\xi$.
Un élément de $J\in SO(4)$ étant un produit pair de réflexions, il existe $p$ et $q$ éléments de $H$, de normes 1, tels que $J(x)=pxq$ pour tout $x$.
Si on suppose en plus que $J\in Z(n)$, $J^2=-Id$ , on déduit $p^2xq^2=-x$ pour tout x. Prenant x=$\bar{p}^2$, on déduit que $q^2=-\bar{p}^2$, d'où $p^2x\bar{p}^2=x$ pour tout $x$.
On pose $\alpha=p^2$ ; $p$ étant de norme 1 , $\alpha$ et $\bar{\alpha}$ aussi , et $\alpha x=x\alpha$ pour tout $x$. Ceci implique que $\alpha=+1ou-1$, d'où deux cas

1. $\alpha=p^2=1\Rightarrow p=+1$ ou $-1$,$q^2=-1$, soit $q=-\bar{q}$ soit $q=bi+cj+dk$ avec $b^2+c^2+d^2=1$. Dans ce cas , il existe $b,c,d\in\mathbf{R}$ tq $b^2+c^2+d^2=1$ et tq $J(x)=x.(bi+cj+dk)$. Si $p=-1$, on prend $(-b,-c,-d)$. On voit que $(b,c,d)$ sont determinés de manière unique par $J(1)=bi+cj+dk$.
2. $\alpha=p^2=-1$ ; en échangeant les rôles de $p$ et $q$, on déduit que il existe $(b,c,d)$ réels tels que $b^2+c^2+d^2=1$ et tq $J(x)=(bi+cj+dk).x$.

La matrice $M(J)$ de $J$ dans la base canonique s'écrit

$$M(J) = \begin{pmatrix} 0 & -b & -c & -d \\ b & 0 & d & -c \\ c & -d & 0 & b \\ d & c & -b & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & -b & -c & -d \\ b & 0 & -d & c \\ c & d & 0 & -b \\ d & -c & b & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{cas } J(x) = x.(bi + cj + dk) \qquad \qquad \text{cas } J(x) = (bi + cj + dk).x$$

Montrons :

$$J(x) = u.x \Leftrightarrow J >> 0 \text{ et } J(x) = x.u \Leftrightarrow J << 0.$$

On suppose $J$ de la forme $J(x) = u.x$. On sait qu'il existe une $\mathbf{C}$-base $h_J$ orthonormale $e_1, e_2$. Le premier terme $e_1$ peut être choisi arbitrairement, de norme 1. On prend $e_1$=1 (notation dans H)=(1,0,0,0) (notation dans $\mathbf{R}^4$). Si J(x)=u.x pour tout x, $Je_1 = u.1 = u = bi + cj + dk$. $h_J(e_1, e_2) = 0 = g(e_1, e_2) + ig(e_1, J(e_2)) \Rightarrow \ g(u, e_2) = 0$. On déduit $e_2 = (0, \alpha, \beta, \gamma)$ et $b\alpha + c\beta + d\gamma = 0$. Il s'agit de montrer que la base $(e_1, J(e_1), e_2, J(e_2)) = (1, u, e_2, u.e_2)$ est directe : on écrit cette base dans la base canonique

$$\det((1, u, e_2, u.e_2) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & \alpha & c\gamma - b\beta \\ 0 & c & \beta & d\alpha - b\gamma \\ 0 & d & \gamma & b\beta - c\alpha \end{pmatrix} = (c\gamma - b\beta)^2 + (d\alpha - b\gamma)^2 + (b\beta - c\alpha)^2 > 0$$

(ne peut être nul car c'est une base ; de plus cette base est $\mathbf{R}$-orthonormale , donc ce déterminant est en fait égal à 1). On déduit que le cas J(x)=u.x $\Rightarrow J >> 0$. De même le cas $J(x) = x.u, \Rightarrow J << 0$. Comme pour J il n'y a que ces deux cas, il y a en fait équivalence dans chacun des cas. □

Comme conséquence, en fixant un repère local, on a

***Proposition 2.3.4***. — *Dans le cas ou $M$ est de dimension 4, les fibres $\pi^{-1}(x)$ sont difféomorphes à $Z_+(2)$ et à $S^2$(sphère unité de $\mathbf{R}^3$).*

**2.3.3. Trivialisations et structure de variété différentiable réelle sur $\tau(M)$.** — Pour chaque point $x$ de $M$, il existe un voisinage $U$ de $x$ et un champ de repères orthonormés directs (prendre $U$ suffisamment petit), noté $R(y) = (y; \theta_1(y), ..., \theta_{2n}(y))$. On considère alors

$$\psi_R(y, a) = (y, Mat(a, (\theta_1(y), ..., \theta_{2n}(y))) : \pi^{-1}(U) \to U \times Z_+(n).$$

Les applications de type $\psi_R$ fournissent une structure de variété réelle sur $\tau(M)$, de dimension $2n + n(n-1) = n(n+1)$.

Concernant les changements de cartes, si $(U, \varphi)$ et $(U', \varphi')$ sont deux cartes locales sur M telles que $U \cap U' \neq \emptyset$ et si $(V, \psi)$ et $(V', \psi')$ sont deux cartes locales de $Z_+(n)$ telles que $V \cap V' \neq \emptyset$, alors : $\varphi' \circ \varphi^{-1}, \psi' \circ \psi^{-1} : \varphi(U \cap U') \times \psi(V \cap V') \to \varphi(U \cap U') \times \psi(V \cap V')$ : est un changement de cartes dans $\tau(M)$.

# CHAPITRE 3

# FIBRÉ DES REPÈRES $P_{SO}(M)$

On veut définir des espaces horizontaux dans $\tau(M) = \tau(M, g)$, de sorte que l'on puisse décomposer un vecteur tangent en une somme de deux vecteurs, sa composante horizontale et sa composante verticale. Il est nécessaire au préalable d'étudier les notions d'horizontalité et de verticalité dans $P_{SO}(M)$. On définit : $P_{SO}(M)$={repères orthonormés directs au dessus de M}. On définit $\pi_P : P_{SO}(M) \to M$ par : $\pi_P(p) = x$ , ou $x$ est l'origine du repère $p = (x; \theta_1, ..., \theta_{2n})$. Pour simplifier les notations, on posera $P = P_{SO}(M)$ (si aucune confusion n'est possible) et $G = SO(2n)$.

***Définition 3.0.5***. — Soit $p = (x; \theta_1, ..., \theta_{2n})$ un élément de $P$, et $g$ un élément de $G$ . On note $p \cdot g$ l'élément de $P$ qui est dans la même fibre $\pi_P^{-1}(x)$ que $p$, défini comme suit : $p \cdot g = (x; \theta_1', ..., \theta_{2n}')$, avec : $\theta_i' = \sum_j g_{ji}\theta_j$.

De cette manière $(P, \pi_P, M)$ est un fibré principal de groupe $G$ sur $M$.

## 3.1. Espace des vecteurs verticaux dans $P$

On désigne par $\mathcal{G} = \{A \in M(2n, \mathbf{R})\ A + A^t = 0\}$ l'algèbre de Lie de $G$ . $P$ est une variété de dimension $dimM + dimG = 2n + \frac{1}{2}2n(2n-1) = 2n^2 + n$. Les fibres $\pi_P^{-1}(x)$, qui sont difféomorphes à $G$ sont des sous-variétés de $P$ de dimension $n(2n-1)$.
En un point $p$ de $\pi_P^{-1}(x)$, on note $Vert_p = T_p\pi_P^{-1}(x)$.

***Lemme 3.1.1***. — $Vert_p = T_p\pi_P^{-1}(x) = Ker(\pi_P)_{*p}$

*Démonstration.* — Du fait que $\pi_P$ est constant sur chaque fibre, $T_p(\pi_x^{-1}) \subseteq Ker(\pi_P)_{*p}$. De plus $\pi_P$ est une submersion, on conclut par un argument de dimension, puisque les deux dimensions sont égales à $dimP - dimM$. □

***Définition 3.1.2***. — $Vert_p$ est l'espace des vecteurs tangents verticaux en $p$ à $P$.

En considérant l'application exponentielle $exp$ du groupe de Lie $G$, $exp : \mathcal{G} \to G$, on peut tracer des courbes $\gamma_V(t) = t \to p.exp(tV)$ , ou $V \in \mathcal{G}$, qui sont incluses dans la fibre $\pi_P^{-1}(x)$, et telles que $\gamma_V(0) = p$. On considère alors l'application

$$I_p : \mathcal{G} \to Vert_p : V \to \dot{\gamma_V}(0) = \frac{d}{dt}(p.exp(tV)|_{t=0}.$$

Il s'agit donc de la dérivée de $\gamma_V$ en 0. Des propriétés de l'application exponentielle ( $exp$ est un difféomorphisme local d'un voisinage de 0 dans $\mathcal{G}$ sur un voisinage de $I$(l'identité dans $G$), il résulte que $I_p : \mathcal{G} \to Vert_p$ est un isomorphisme. De plus, on note $R_g : P \to P$ le difféomorphisme défini par : $R_g(p) = p \cdot g$, avec $g \in G$.

## 3.2. Espace des vecteurs horizontaux dans $P$ associé à une connexion

### 3.2.1. Connexion sur $P$. —

***Définition 3.2.1.*** — Une connexion sur $P$ est un champ d'espaces vectoriels $\tau_p \subset T_pP$, vérifiant

a.— $(\pi_P)_{*p}$ est un isomorphisme de $\tau_p$ sur $T_xM$.
b.— $(R_g)_*(\tau_p) = \tau_{p.g}$, $\forall g \in$ G.
En un point $p \in P$, les espaces $\tau_p$ sont dits horizontaux, en $p$.

On a une décomposition en somme directe :

***Lemme 3.2.2.*** — *Pour tout $p \in P$, $T_pP = \tau_p \oplus Vert_p$.*

*Démonstration.* — L'application $(\pi_P)_{*p} : T_pP \to T_xM$ est surjective. Lorsque l'on restreint cette application à $\tau_p$, c'est un isomorphisme. Si $V \in \tau_p \cap Vert_p$, comme $V \in Vert_p$, $(\pi_P)_{*p}(V) = 0$; comme $V \in \tau_p$, $V = 0$. On conclut que $\tau_p \cap Vert_p = \{0\}$. D'autre part, $\dim \tau_p + \dim Vert_p = \dim(M) + n(2n-1) = 2n + n(2n-1) = 2n^2 + n = \dim T_pP$. □

### 3.2.2. 1-forme de connexion. —

Soit $f_p : T_pP \to Vert_p$ la projection verticale liée à la décomposition ci-dessus.

***Définition 3.2.3.*** — La 1-forme de connexion associée au champ $\tau$ est définie par

$$\eta(p; .) = I_p^{-1} \circ f_p : T_pP \to \mathcal{G}$$

La forme $\eta$ est une 1-forme différentielle sur $P$, à valeurs dans $\mathcal{G}$ qui vérifie $\tau_p = Ker\eta(p; )$.

***Lemme 3.2.4.*** — *Soit $p \in P$ et soit $g \in G$*

1. *le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} & (R_g)_{*p} & \\ T_pP & \to & T_{pg}P \\ \downarrow f_p & & \downarrow f_{pg} \\ Vert_p & \to & Vert_{pg} \\ & (R_g)_{*p} & \end{array}$$

2.

$$R_g^*\eta(p; X) = I_{pg}^{-1} \circ (R_g)_{*p} \circ I_p(\eta(p; X)).$$

*Démonstration.* — 1. En effet, sur les éléments horizontaux en $p$, $f_p$=0; comme $(R_g)_{*p}\tau_p = \tau_{pg}$, les deux trajets du diagramme donnent 0 sur ces éléments. Sur les éléments verticaux, comme $R_g(\pi^{-1}(x)) \subseteq \pi^{-1}(x)$, $(R_g)_{*p}U \in Vert_{pg}$. Si U$\in Vert_p$, $f_pU = U$ , d'ou $(R_g)_{*p} \circ f_p(U) = (R_g)_{*p}(U) = f_{pg} \circ (R_g)_{*p}(U)$, ce qui achève la preuve de la commutativité.

2. D'après la définition de $\eta$, $R_g^*\eta(p;X) = \eta(pg;(R_g)_{*p}X) = I_{pg}^{-1} \circ f_{pg}((R_g)_{*p}X)$. D'après 1, $I_{pg}^{-1} \circ f_{pg}((R_g)_{*p}X) = I_{pg}^{-1} \circ (R_g)_{*p} \circ f_p(X) = I_{pg}^{-1} \circ (R_g)_{*p} \circ I_p \circ I_p^{-1} \circ f_p(X) = I_{pg}^{-1} \circ (R_g)_{*p} \circ I_p(\eta(p;X))$.

□

***Proposition 3.2.5.*** — *Il est équivalent de se donner*

1. *un champ de sous-espaces $\tau_p \subseteq T_pP$ vérifiant*
   (a) $(\pi_P)_{*p}$ *restreinte à* $\tau_p$ *est un isomorphisme de* $\tau_p$ *sur* $T_{\pi_P(p)}M$.
   (b) $\forall g \in G$, $(R_g)_{*p}(\tau_p) = \tau_{pg}$.
2. *une 1-forme $\eta$ sur P, à valeurs dans $\mathcal{G}$ telle que*
   (c) $\eta(p;I_p(A)) = A, \forall A \in \mathcal{G}$.
   (d) $R_g^*\eta(p;X) = I_{pg}^{-1} \circ (R_g)_{*p} \circ I_p(\eta(p;X))$.

*Le lien entre ces deux notions est le suivant : si on se donne le champ $\tau_p$, vérifiant a et b, alors on pose $\eta = I_p^{-1} \circ f_p$ ; si on se donne $\eta$, vérifiant c et d, alors on pose $\tau_p = Ker\eta(p;)$.*

*Démonstration.* — On a déja montré que 1 ⇒ 2-d. Pour 2-c, $\eta(p;I_p(A)) = I_p^{-1} \circ f_p \circ I_p(A)$. Comme $I_p(A) \in Vert_p$, $f_p(I_p(A)) = I_p(A)$, d'où le résultat.
Inversement, si on se donne une 1-forme $\eta$ vérifiant c et d, posons alors $\tau_p = Ker\eta(p;)$. Alors si $U \in \tau_p \cap Vert_p$, il existe $A \in \mathcal{G}$ tel que $U = I_p(A)$. Alors $0 = \eta(p;U) = \eta(p;I_p(A)) = A$ (à cause de l'hypothèse 2-c). Donc $U = 0$ ; on conclut que $\tau_p \cap Vert_p = \{0\}$. Du fait que $\eta(p;) : T_pP \to \mathcal{G}$ est surjective à cause de 2-c, $\mathcal{G}$ est isomorphe à $\frac{T_pP}{\tau_p}$(isomorphisme d'espaces vectoriels). On déduit que $T_pP = \tau_p \oplus Vert_p$. Comme le noyau de $\pi_{P*p}$ est $Vert_p$, de ce qui précède on déduit que $(\pi_P)_{*p}$ est un isomorphisme de $\tau_p$ sur $T_{\pi_P(p)}M$, d'où 1-a. Pour vérifier 1-b, il suffit de vérifier que $\eta(pg;(R_g)_{*p}(U)) = 0$ pour $U \in \tau_p$ (ce qui impliquera $(R_g)_{*p}(\tau_p) \subseteq \tau_{pg}$ et même $(R_g)_{*p}(\tau_p) = \tau_{pg}$, d'où 1-b). Or $\eta(pg;(R_g)_{*p}(U)) = R_g^*\eta(p;U) = I_{pg}^{-1} \circ (R_g)_{*p} \circ I_p(\eta(p;U))$ (la dernière égalité à cause de 2-d). Comme $\eta(p;U) = 0$, on déduit le résultat. □

**3.2.3. Relation de trivialisation.** — Si $R : U \to P$ est un champ local de repères orthonormés directs sur un ouvert U de M suffisamment petit, on pose $\tilde{\eta} = R^*\eta$, qui est une 1-forme sur U, à valeurs dans $\mathcal{G}$. La relation entre $\eta$ et $\tilde{\eta}$ peut être obtenue comme suit.

***Proposition 3.2.6.*** — *On note $\varphi_R : U \times G \to \pi_P^{-1}(U) \subset P$, l'application définie par $\varphi_R(x,g) = R(x)g$.*

1. $T_gG = \{M \in M(2n, \boldsymbol{R}),\ M^t.g + g^t.M = 0\}$.
2. *Pour $T \in T_xM$ et $V \in T_gG$,*
$$\varphi_R^*\eta((x,g);(T,V)) = g^t.\tilde{\eta}(x;T).g + g^t.V$$
3. *Un élément horizontal est de la forme $(\varphi_R)_{*(x,g)}(T, -\tilde{\eta}(x;T)g)$ où $T \in T_xM$. Un élément vertical est de la forme $(\varphi_R)_{*(x,g)}(0,V)$ où $V \in T_gSO(2n)$.*

*Démonstration.* — 1. résulte du fait que l'application F de $GL(2n, \mathbf{R})$) dans l'espace vectoriel des matrices symétriques de $Mat(2n, \mathbf{R})$ telle que F(g)=$g.g^t - Id$ est une submersion, que $O(2n) = F^{-1}(0)$. Alors si g∈ SO(2n) $T_gSO(2n) = KerF_{*g}$. En calculant $F_*$, on obtient l'égalité en 1.(SO(2n) est une des deux composantes connexes de O(2n)).

2. L'espace $U \times SO(2n)$ étant un espace produit, $T_{(x,g)}(U \times SO(2n)) = T_xM \times T_gSO(2n)$, donc tout vecteur tangent à $U \times SO(2n)$ s'écrit sous la forme d'un couple $(T, V)$ où $T \in T_xM$ et $V \in T_gSO(2n)$. Par définition, on a : $\varphi_R^*\eta(x, g)(T, V) = \eta(R(x)g; (\varphi_R)_{*(x,g)}(T, V))$. On se place en un point $(x_0, g_0)$. On considère les deux applications $\lambda : U \to P, x \to R(x)g_0$ et $\mu : G \to P, g \to R(x_0)g$. L'application $\varphi_R$ étant une fonction de deux variables, en appliquant les règles du calcul différentiel, on a : $(\varphi_R)_{*(x_0,g_0)}(T, V) = \lambda_{*x_0}(T) + \mu_{*g_0}(V)$.

   *calcul du terme qui concerne* $\lambda_{*x_0}$ :
   On pose $p_0 = R(x_0)$. On a $\lambda = R_{g_0} \circ R$, on déduit $\eta((R(x_0)g_0\,;\ \lambda_{*x_0}(T)) = \eta(R_{g_0}(p_0); (R_{g_0})_{*p_0}(R_{*x_0}(T))) = (R_{g_0})^*\eta(p_0; R_{*x_0}(T))$.
   Appliquons le lemme 3.2.4 à $p = p_0$ et $X = R_{*x_0}(T)$ . On obtient : $\lambda_{*x_0}(T) = I^{-1}_{p_0g_0} \circ (R_{g_0})_{*p_0} \circ I_{p_0}(\eta(p_0; R_{*x_0}(T))$. On pose $A = \eta(p_0; R_{*x_0}(T))$. C'est une matrice anti-symétrique de $M(2n, \mathbf{R})$. En utilisant les définitions de $I_{p_0}$ et de $(R_{g_0})_{*p_0}$, $(R_{g_0})_{*p_0} \circ I_{p_0}(\eta(p_0; R_{*x_0}(T)) = \frac{d}{dt}(p_0.exp(tA).g_0)|_{t=0}$. C'est un vecteur tangent en $p_0.g_0$ à la fibre $\pi^{-1}(x)$, donc il s'écrit sous la forme $\frac{d}{dt}(p_0.g_0.exp(tB))|_{t=0}$ où B est une matrice anti-symétrique. On déduit $\lambda_{*x_0}(T) = I^{-1}_{p_0g_0}(\frac{d}{dt}(p_0.g_0.exp(tB))|_{t=0})$=B ; mais $A.g_0 = g_0.B$, d'où $B = g_0^{-1}.A.g_0 = g_0^{-1}.\eta(p_0; R_{*x_0}(T)).g_0 = g_0^{-1}.\tilde{\eta}(x_0; T).g_0$, soit :

   $$\lambda_{*x_0}(T) = g_0^{-1}.\tilde{\eta}(x_0; T).g_0 = g_0^t.\tilde{\eta}(x_0; T).g_0.\ (g_0^{-1} = g_0^t).$$

   *calcul du terme qui concerne* $\mu_{*g_0}$ :
   Comme $\mu$ est à valeurs dans la fibre $\pi^{-1}(x_0)$ et que $\mu(g_0) = p_0.g_0$, si V∈ $T_{g_0}G$, $\mu_{*g_0}(V) \in Vert_{p_0.g_0}$, donc s'écrit $\mu_{*g_0}(V) = \frac{d}{dt}(p_0.g_0.exp(tA))|_{t=0})$ ou A est une matrice anti-symétrique . On a $p_0.g_0.exp(tA) = \mu(g_0.exp(tA))$ ; on déduit $\frac{d}{dt}(p_0.g_0.exp(tA))|_{t=0} = \mu_{*g_0}((\frac{d}{dt}(g_0.exp(tA))|_{t=0})$. De plus, $\mu$ est un difféomorphisme de $G$ sur $\pi_P^{-1}(x_0)$. En particulier $\mu_{*g_0}$ est injective ; de la relation $\mu_{*g_0}(V) = \mu_{*g_0}((\frac{d}{dt}(g_0.exp(tA))|_{t=0})$ on obtient $V = g_0.A$. En appliquant la définition de $\eta$ , on trouve $\eta(p_0.g_0; \mu_{*g_0}(V)) = A = g_0^{-1}.V = g_0^t.V$.

3. Tous les vecteurs tangents à $P$ en $p = R(x)g$ s'écrivent sous la forme $L = (\varphi_R)_{*(x,g)}(T, V)$ où T∈ $T_xM$ et $V \in T_gSO(2n)$, puisque $\varphi_R$ est un difféomorphisme de $U \times SO(2n)$ sur $\pi_P^{-1}(U)$. Les éléments horizontaux L annulant la forme $\eta$, par la formule de trivialisation, en simplifiant par $g^{-1}$ à gauche , on trouve la relation $V = -\tilde{\eta}(x; T)g$.
   Un vecteur vertical $L$ se caractérise par $\pi_{s*p}(L) = 0$. Comme $\pi_P \circ \varphi_R(x, g) = x$ , on déduit $T = 0$. D'ou le résultat.

□

La relation de trivialisation prouve que pour connaitre $\eta$, il suffit de connaître $\tilde{\eta}$.

### 3.3. Connexion riemanienne $\nabla$ de $M$ et connexion sur $P$

On note de manière générique un champ de repères orthonormés directs sur un ouvert $U$ de $M$ comme une application $R : U \to P$ telle que $R(x) = (x; \theta_1(x), ..., \theta_{2n}(x))$, où $\theta_i$ est un champ local, unitaire, sur $U$ et $R(x)$ est un repère orthonormé direct.

Soit $\nabla$ la connexion riemanienne de $(M, g)$. On définit $\tilde{\eta}$, (et donc $\eta$), la 1-forme de connexion sur $P$, telle que $\forall T$ champ local de $M$ sur $U$

$$\nabla_T \theta_j = \sum_i \tilde{\eta}_{ij}(T)\theta_i$$

Ici, $\tilde{\eta}(T) \in \mathcal{G}$ est la matrice $(\tilde{\eta}_{ij}(T))_{i,j \leq 2n}$.

***Remarque 3.3.1***. — A l'inverse de $\tilde{\eta}$, $\eta$ ne dépend d'aucun repère. Si on change les indices dans la formule ci-dessus et que l'on prend $T = \theta_i$ , $\nabla_{\theta_i}\theta_j = \sum_k \tilde{\eta}_{kj}(\theta_i)\theta_k$ . On obtient que les symboles de Christofell relatifs au repère $\theta_1, ..., \theta_{2n}$ sont $\Gamma^k_{ij} = \tilde{\eta}_{kj}(\theta_i)$. Ces symboles ne sont pas utilisés dans la suite.

### 3.4. 2-forme de courbure sur P

***Définition 3.4.1***. — La 2-forme de courbure sur $P = P_{SO}(M)$ à valeurs dans $\mathcal{G}$, est définie par : $\Omega = d\eta + \eta \wedge \eta$ où $\eta$ est la 1-forme de connexion sur $P = P_{SO}(M)$.

Si $R$ est un champ de repères local, on pose $\tilde{\eta} = R^*\eta$ et $\widetilde{\Omega} = R^*\Omega$. La 1-forme $\tilde{\eta} = R^*\eta$ sur $M$ est à valeurs dans $\mathcal{G}$. On a : $\widetilde{\Omega} = d\tilde{\eta} + \tilde{\eta} \wedge \tilde{\eta}$, qui est une 2-forme définie sur $M$, aussi à valeurs dans $\mathcal{G} = so(2n)$.

### 3.5. Relation entre 2-forme de courbure et tenseur de courbure

Selon les notations précédentes, $P = P_{SO(TM)}$ est le fibré des repères orthonormés directs sur $M$. On rappelle que la connexion de Riemann $\nabla$ sur $M$ est reliée à la 1-forme $\eta$ définie sur $P$ et à valeurs dans $\mathcal{G} = \{A \in M(2n, \mathbf{R}),\ A\ +^t A = 0\}$ par la relation : si $\mathcal{R} = (\theta_1, ...\theta_{2n})$ est un repère local, et $\tilde{\eta} = \mathcal{R}^*\eta$, alors $\nabla_V\theta_i = \sum_j \tilde{\eta}_{ji}(V)\theta_j$, pour tout $V$ dans $TM$.

On note $R$ le tenseur de courbure de $M$ : pour tous $V,\ W,\ Z$ des champs de vecteurs sur $M$,

$$R(V, W)Z = \nabla_V\nabla_W Z - \nabla_V\nabla_W Z - \nabla_{[V,W]}Z$$

est un champ de vecteurs sur $M$. Le tenseur $R$ génère pour tous $V$ et $W$ de $T_xM$ un endomorphisme de $T_xM$ , comme suit : si $Z \in T_xM$, on prend des prolongements locaux $\tilde{V}$, $\tilde{W}$, $\tilde{Z}$ au voisinage de $x$ , et on pose $f(V, W) : T_xM \to T_xM$, $f(V, W)Z = R(\tilde{V}, \tilde{W})\tilde{Z}(x)$. Du fait que $R$ est un tenseur, ($R$ est $C^\infty(M)$ trilinéaire) cette définition ne dépend pas des prolongements choisis. On note cet endomorphisme $R(V, W)(x)$. En utilisant les propriétés de dérivations de $\nabla$

$$\nabla_V\nabla_W\theta_i = \nabla_V(\sum_j \tilde{\eta}_{ji}(W)\theta_j) = \sum_{j,k} \tilde{\eta}_{ji}(W)\tilde{\eta}_{kj}(V)\theta_k + \sum_j V(\tilde{\eta}_{ji}(W))\theta_j$$

on déduit

$$\begin{aligned}
\nabla_V \nabla_W \theta_i - \nabla_W \nabla_V \theta_i &= \sum_{j,k} (\tilde{\eta}_{ji}(W)\tilde{\eta}_{kj}(V) - \tilde{\eta}_{ji}(V)\tilde{\eta}_{kj}(W))\theta_k + \sum_j (V(\tilde{\eta}_{ji}(W)) - W(\tilde{\eta}_{ji}(V)))\theta_j \\
&= \sum_k (\tilde{\eta} \wedge \tilde{\eta})_{ki}(V, W)\theta_k + \sum_k (d\tilde{\eta}_{ki}(V, W) + \tilde{\eta}_{ki}([V, W]))\theta_k \\
&= \sum_k \widetilde{\Omega}_{ki}(V, W)\theta_k + \nabla_{[V,W]}\theta_i
\end{aligned}$$

D'où

***Proposition 3.5.1***. — *Dans un repère local $R = (\theta_1, ..., \theta_{2n})$ sur $M$, $R \in P$, pour des vecteurs $V$ et $W$ de $T_xM$, la matrice de l'endomorphisme $R(V, W)(x)$ de $T_xM$, dans la base $(\theta_1(x), ..., \theta_{2n}(x))$, est $(\widetilde{\Omega}_{ki}(V, W))_{k=ligne}$.*

# CHAPITRE 4

# STRUCTURES SUR $\tau(M, g)$

## 4.1. Relation entre $P_{SO}(M)$ et $\tau(M)$

On note toujours $P = P_{SO}(M)$. Pour un ouvert suffisamment petit dans $M$ pour qu'il existe un repère local $R : U \to \pi_P^{-1}(U) \subset P$, on définit le diagramme de trivialisation suivant :

$$\begin{array}{ccc} P \supset \pi_P^{-1}(U) & \overset{r}{\longrightarrow} & \pi_\tau^{-1}(U) \subset \tau(M) \\ \uparrow \varphi_R & & \downarrow \psi_R \\ U \times SO_{2n} & \underset{\tilde{r}_R = \psi_R \circ r \circ \varphi_R}{\longrightarrow} & U \times Z_+(n) \end{array}$$

avec $\varphi_R(x, g) = R(x)g$, $\psi_R(x, a) = Mat(a, R(x))$.(matrice de $a$ dans $R(x)$). Le lien entre $P$ et $\tau(M)$ est réalisé via l'application $r$ définie comme suit : $r(p) = a$ tel que $Mat(a, p) = J_n$ , où $J_n$ désigne la matrice de $Z_+(n)$ définie en 1.1.3.

***Proposition 4.1.1.*** — *Pour tous $x \in M$ et $g \in G = SO(2n)$*

1. $\tilde{r}_R(x, g) = (x, g.\ J_n.\ {}^t g)$.
2. *$r$ est une submersion surjective.*
3. *Soit $U(n) = \{A \in G, J_n A = A J_n\}$. $U(n)$ s'identifie au groupe unitaire classique. Soit $a \in \tau(M)$. Soit $g_0 \in G$ tel que $a = r(\varphi_R(x, g_0))$. Alors la fibre $r^{-1}(a) = \varphi_R(x, g_0 U(n))$.*

*Démonstration.* — 1. Soit $(x, g) \in U \times SO(2n)$ ; on pose $p = R(x)$ et $r(pg) = a$ ; par définition de $r$ , $Mat(a; pg) = J_n$ ; $\tilde{r}_R(x, g) = \psi_R \circ r \circ \varphi_R(x, g) = Mat(a, p)$. On examine le changement de base, qui fait passer du repère $p$ à $pg$ :

$$\begin{array}{ccc} (T_x M, p) & \overset{a}{\longrightarrow} & (T_x M, p) \\ \uparrow Id_{T_x M} & & \uparrow Id_{T_x M} \\ (T_x M, pg) & \underset{a}{\longrightarrow} & (T_x M, pg) \end{array}$$

Matriciellement , on obtient :
$Mat(a, p) = Mat(Id_{T_x M}, pg, p).Mat(a, pg).Mat(Id_{T_x M}, pg, p)^{-1}$. On a déja $Mat(a, pg) = J_n$ ; L'identité $Id_{T_x M}$ s'écrit $\theta_i' \to \theta_i' = \sum_j g_{ji}\theta_j$, avec $g$ la matrice de $SO(2n)$ dont la ligne est le premier indice. D'où : $Mat(Id_{T_x M}, pg, p) = g$, d'où le résultat en 1.

2. Pour montrer la surjectivité de $r$, on prend $(x, a) \in \tau(M)$.Il existe une base orthonormale directe de $T_xM$ dans laquelle la matrice de $a$ est $J_n$ : pour cela on peut prendre une $\mathbf{C}$ base $e_1, ..., e_n$ orthonormale par rapport à la métrique hermitienne $h_a$ ; on sait alors que $(\theta_1 = e_1, \theta_2 = a(e_1), ..., \theta_{2n-1} = e_n, \theta_{2n} = a(e_n))$ est une base orthonormale directe de $T_xM$ qui convient. Alors dans le repère $p$ associé à cette base, $r(p) = a$ , ce qui prouve la surjectivité de $r$.

   Pour montrer que $r$ est une submersion, il suffit de montrer que $\tilde{r_R}$ est une submersion, car $\varphi_R$ et $\psi_R$ sont des difféomorphismes. Pour simplifier les notations, on écrira $\tilde{r} = \tilde{r_R}$, dans la mesure ou $R$ ne change pas. Pour cela calculons $\tilde{r}_*((x, g); (T, V))$ ou $T \in T_xM$ et $V \in T_gG$ :

$$\tilde{r}_*((x, g); (T, V)) = (T, V.J_n.{}^tg + g.J_n.{}^tV).$$

   De cette expression, on voit que pour montrer la surjectivité de $\tilde{r}_*((x, g); (., .))$, il suffit de vérifier que si $W \in T_{g.J_n.{}^tg}Z_+n$, il existe $V \in T_gSO(2n)$ tel que $V.J_n.{}^tg + g.J_n.{}^tV$ =W . La condition $V \in T_gSO(2n)$ implique $V.{}^tg + g.{}^tV = 0$. De l'équation précédente $V.J_n.{}^tg + g.J_n.{}^tV = W$, il découle alors $V.{}^tg.g.J_n.{}^tg + g.J_n.{}^tg.g.{}^tV = W = [g.J_n.{}^tg, g.{}^tV] = [X, g.{}^tV]$, avec $X = g.J_n.{}^tg$. (crochet de matrices). De plus comme $W \in T_XZ_+(n)$, $XW + WX = 0$ et $W + W^t = 0$ , $W = [X, -\frac{1}{2}XW]$.

   La comparaison des deux crochets donnant $W$ suggère de prendre $V = -\frac{1}{2}WgJ_n$ ; on obtient une solution effective. En effet, comme $W \in T_XZ_+(n)$, $XW + WX = 0$ et $W + W^t = 0$. On a avec cette valeur de $V$, on trouve $V.J_n.{}^tg + g.J_n.{}^tV = -\frac{1}{2}WgJ_n.J_n.{}^tg + g.J_n.{}^t(-\frac{1}{2}WgJ_n) = W$, car $g.g^t$=Id et $J_n^2 = -Id$. On vérifie que $V.g^t + g.V^t = 0$ à cause des propriétés de $W$, donc $V \in T_gG$. Ceci termine la preuve que $r$ est une submersion.
3. Soit $a \in \tau(M)$ ; posons $x = \pi_\tau(a)$. Par surjectivité de $r$, il existe $p \in P$, tel que $r(p) = a$. Il existe aussi $g \in G$ tel que $p = \varphi_R(x, g) = R(x)g$ où $g \in G$. De ce qui précède, $\psi_R(a) = \psi_R \circ r \circ \varphi_R(x, g) = \tilde{r}(x, g) = (x, g.J_n.g^t) = (x, g_0.J_n.g_0^t)$. On déduit que $g.J_n.g^t = g_0.J_n.g_0^t$, ce qui équivaut à $g \in g_0U(n)$.

□

### 4.2. Espaces horizontaux et verticaux dans $\tau(M)$

***Proposition 4.2.1.*** — *Soit $a$ (ou $(x, a)$) un point de $\tau(M)$. Soit $R$ un champ de repères local sur un ouvert $U$ tel que $x \in U$, et $R : U \to P$ ; $r$ étant surjective, il existe $p \in P$ tel que $r(p) = a$. Si $p'$ est un autre élément de $P$, tel que $r(p') = a$, alors*

1. $T_a\tau(M) = r_{*p}(\tau_p) \oplus r_{*p}(Vert_p)$.
2. $r_{*p}(\tau_p) = r_{*p'}(\tau_{p'})$.
3. $r_{*p}(Vert_p) = r_{*p'}(Vert_{p'}) = Ker(\pi_{\tau *a}) = T_a\pi_\tau^{-1}(x)$.

*Démonstration.* — 1. D'abord $r_{*p}(\tau_p) \cap r_{*p}(Vert_p) = \{0\}$ car si $X \in r_{*p}(\tau_p) \cap r_{*p}(Vert_p)$, $X = r_{*p}(H) = r_{*p}(V)$ avec $H \in \tau_p$ et $V \in Vert_p$. Rappelons que si $\pi_P$ et $\pi_\tau$ sont les projections sur M des deux fibrés P et $\tau(M)$, $\pi_P = r \circ \pi_\tau$, car on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} P & \overset{r}{\rightarrow} & \tau(M) \\ \pi_P \searrow & & \swarrow \pi_\tau \\ & M & \end{array}$$

On a alors

$$0 = \pi_{s*}(V) = \pi_{\tau * a} \circ r_{*p}(V) = \pi_{\tau * a} \circ r_{*p}(H) = \pi_{s*p}(H).$$

Comme $\pi_{s*p} : \tau_p \rightarrow T_x M$ est un isomorphisme, $H = 0$, soit $X = 0$. On conclut en indiquant que r est une submersion.

2. Soient $g$ et $g' \in G$ tels que $p = R(x)g$ et $p' = R(x)g'$. Comme $r(p) = r(p') = a$, $Mat(a,p) = Mat(a,p') = J_n = Mat(a, R(x)g) = Mat(a, R(x)g')$. On déduit : $Mat(a, R(x)) = g.J_n.^tg = g'.J_n.^tg'$. (*)
   Montrons que $r_{*p}(\tau_p) = r_{*p'}(\tau_{p'})$. Par symétrie il suffit de montrer que $r_{*p}(\tau_p) \subseteq r_{*p'}(\tau_{p'})$ : soit X$\in r_{*p}(\tau_p)$. p=R(x)g=$\varphi_R$(x,g) ; $X = r_{*p}(U)$ avec $U \in \tau_p$, c'est à dire U= $(\varphi_R)_*((x,g);(T,V))$ avec $T \in T_xM$, V$\in T_gG$ et V=-$\tilde{\eta}(x;T)$g (conséquence de l'horizontalité de U dans P).
   $(\psi_R)_{*a}(X) = (\psi_R)_{*a} \circ r_{*p}(U) = (\psi_R)_{*a} \circ r_{*p} \circ (\varphi_R)_*((x,g);(T,V)) = \tilde{r}_{*(x,g)}(T,V) = (T, V.J_n.^t.g + g.J_n.^tV) = (T, -\tilde{\eta}(x;T).g.J_n.^t.g + g.J_n.^tg.\tilde{\eta}(x;T))$. ($\tilde{\eta}(x;T)$ est une matrice anti-symétrique). De la relation (*) ci-dessus entre $g$ et $g'$, on déduit aussi

$$\begin{aligned} (\psi_R)_{*a}(X) &= \tilde{r}_{*(x,g)}(T,V) = (T, -\tilde{\eta}(x;T).g.J_n.^t.g + g.J_n.^tg.\tilde{\eta}(x;T)) \\ &= (T, -\tilde{\eta}(x;T).g'.J_n.^tg' + g'.J_n.^tg'.\tilde{\eta}(x;T)) = \tilde{r}_{*(x,g')}(T,V') \end{aligned}$$

   où $(V' = -\tilde{\eta}(x,T)g') = (\psi_R)_{*a}(X')$ avec $X' = r_{*p'}(U')$ et $U' = (\varphi_R)_{*(x,g')}(T,V')$ . On obtient donc $U' \in \tau_{p'}$. De plus, $(\psi_R)_{*a}$ est un isomorphisme, $\psi_R)_{*a}(X) = \psi_R)_{*a}(X')$ implique $X = X' = r_{*p}(U) = r_{*p'}(U')$, d'où le point 2.
3. Montrons d'abord que $r_{*p}(Vert_p) \subseteq Ker(\pi_\tau)_{*a}$. Ceci résulte de l'identité $\pi_P = \pi_\tau \circ r$, car si $V \in Vert_p$, $\pi_{s*p}(V) = 0 = \pi_{\tau * a} \circ r_{*p}(V)$, d'où l'inclusion. Inversement, soit $W \in Ker(\pi_\tau)_{*a}$. Il existe $g \in G$ tel que $p = \varphi_R(x,g)$. Comme $r$ est une submersion, il existe un couple $(T,V) \in T_xM \times T_gG$ tel que $r_{*p}(\varphi_R)_{*(x,g)}(T,V) = W$. En appliquant $\pi_{s*p}$ à chaque membre, le résultat est nul par hypothèse, et tenant compte encore de la relation $\pi_P = \pi_\tau \circ r$, on obtient $T = 0$, c'est à dire que $\varphi_R)_{*(x,g)}(T,V) \in Vert_p$, d'où l'inclusion inverse.

$\square$

On définit ci-dessous les espaces horizontaux et verticaux dans $\tau(M)$.

***Définition 4.2.2.*** — Soit $a \in \tau(M)$ et $p \in P$ tel que $r(p) = a$.

1. $\mathcal{H}_a = r_{*p}(\tau_p)$ est l'espace des vecteurs horizontaux en $a$ à $\tau(M)$.
2. $\mathcal{V}_a = r_{*p}(Vert_p)$ est l'espace des vecteurs verticaux en $a$ à $\tau(M)$. On a alors $T_a\tau(M) = \mathcal{H}_a \oplus \mathcal{V}_a$.

Il résulte de la proposition précédente que cette définition est cohérente , c'est à dire qu'elle ne dépend pas de p , pourvu que r(p)=a. De plus $\pi_{\tau * a}$ est un isomorphisme de $\mathcal{H}_a$

sur $T_xM$. (On peut vérifier que $r_{*p} : \tau_p \to \mathcal{H}_a$ est un isomorphisme . On sait par ailleurs que $\pi_{s*p} : \tau_p \to T_xM$ est aussi un isomorphisme).

**4.2.1. Expressions de vecteurs tangents verticaux en un point a.** — Dans cette partie, on donne une expression des champs de vecteurs sur ces fibres, et l'action de tels champs sur les fonctions (version opérateur différentiel d'un champ de vecteur).

***Proposition 4.2.3.*** — 1. *Dans $Z_+(n)$ ; soit $X \in Z_+(n)$,*

$$\begin{aligned} T_X Z_+(n) &= \{P \in M(2n, \mathbf{R}),\ PX + XP = 0 \text{ et } P + P^t = 0\} \\ &= \{P \in M(2n, \mathbf{R}),\ \exists A \in so(2n),\ P = [X, A]\} (\textit{crochets de matrices}). \end{aligned}$$

2. *Dans $\pi^{-1}(x)$ ;(on simplifie les notations en posant $\pi = \pi_\tau$), soit $(x, a) \in \pi^{-1}(x)$*

$$\begin{aligned} T_a\pi^{-1}(x) &= \{u \in End(T_xM),\ u \circ a + a \circ u = 0 \text{ et } u + u^* = 0\} \\ &= \{u \in End(T_xM),\ u = [a, v], v \in so(T_xM)\} (\textit{crochets d'endomorphismes}). \end{aligned}$$

3. *L'opérateur différentiel associé à un vecteur tangent de type $[X, A]$, où $A \in so(2n)$ s'écrit*

$$V = \sum_{1 \le i,j \le 2n} [X, A]_{ij} \frac{\partial}{\partial X_{ij}}.$$

*Selon le contexte, on notera $V = [X, A]$ ou $[X, A]^\bullet$ ou $\sum_{1 \le i,j \le 2n} [X, A]_{ij} \frac{\partial}{\partial X_{ij}}$.*

*Démonstration.* — 1. on peut procéder de deux manières :

* utilisation du résultat suivant : $\Delta : SO(2n) \to Z_+(n) : A \to AJ_nA^t$ est une submersion surjective. Si $X \in Z_+(n)$, alors il existe $A \in SO(2n)$ telle que $X = \Delta(A) = AJ_nA^t$. De plus

$$T_X Z_+(n) = \Delta_{*A}(T_A SO(2n)).$$

Soit $U \in T_A SO(2n)$. De la définition de cet espace tangent, $UA^t + AU^t = 0$, c'est à dire que $B = AU^t$ est anti-symétrique. Compte tenu de l'expression de $\Delta$, qui est bilinéaire, $\Delta_{*A}(U) = UJ_nA^t + AJ_nU^t = (UA^t)X + X(AU^t) = [X, AU^t] = [X, B] = P$, et une telle matrice vérifie : $X[X, B] + [X, B]X = 0$ (car $X^2 = -Id$). De plus $P + P^t = (XB - BX)^t + XB - BX = 0$ car $X = -X^t$ et $B = -B^t$. On en déduit que

$$T_X Z_+(n) \subseteq \{P \in M(2n, \mathbf{R}),\ PX + XP = 0 \text{ et } P + P^t = 0\}.$$

A l'inverse, si $P \in$ à cet ensemble, toujours en utilisant la même matrice A telle que $\Delta(A) = X$, recherchons B telle que $B + B^t = 0$ et $P = [X, B]$. $B = -\frac{1}{2}XP$ convient puisque $B + B^t = -\frac{1}{2}(XP + PX) = 0$ et de plus $[X, B] = -\frac{1}{2}(XXP - XPX) = -\frac{1}{2}(-P + XXP) = P$. Si on pose alors $U = -BA$, $UA^t + AU^t = -(B + AA^tB^t) = -(B + B^t) = 0$, donc $U \in T_A SO(2n)$, et $\Delta_{*A}(U) = (UA^t)X + X(AU^t) = XB + B^tX = XB - BX = [X, B] = P$.

*calcul direct : un élément $X$ de $Z_+(n)$ vérifie $X^2 = -Id$ et $X + X^t = Id$. Si $X_0 \in Z_+(n)$, un vecteur tangent à $Z_+(n)$ en $X_0$ peut être considéré comme la dérivée en 0 d'une courbe $C^\infty$, $X : ]-\epsilon, +\epsilon[ \to Z_+(n)$ telle que $X(0) = X_0$. En dérivant les identités ci dessus au point 0, on obtient $\dot{X}(0)X_0 + X_0\dot{X}(0) = 0$ (dérivée de $X^2 = -Id$) et $\dot{X}(0) + \dot{X}^t(0) = 0$ (dérivée de $X + X^t$=0). Les dérivées étant à valeur dans $M(2n, \mathbf{R})$

on peut dire que $T_{X_0}Z_+(n) \subseteq \{P \in M(2n,\mathbf{R}), PX_0+X_0P = 0$ et $P+P^t = 0\}$. Si on examine le cas ou $X_0 = J_n$ (matrice indiqué au début du document), on vérifie que l'espace vectoriel $\{P \in M(2n,\mathbf{R}), PJ_n + J_nP = 0 \ et \ P + P^t = 0\}$ est de dimension $n(n-1)$. (calcul " à la main"), en décomposant $P$ en matrices (2,2). On déduit l'égalité :

$$T_{J_n}Z_+(n) = \{P \in M(2n,\mathbf{R}), PJ_n + J_nP = 0 \ \text{ et } \ P + P^t = 0\}.$$

Pour conclure, en un point $X_0$ de $Z_+(n)$, il existe $A \in SO(2n)$ telle que $X_0 = AJ_nA^t$ $P \in M(2n,\mathbf{R})$. $\{P, PX_0 + X_0P = 0 \ \text{ et } \ P + P^t = 0\} \to \{P \in M(2n,\mathbf{R}), PJ_n + J_nP = 0 \ et \ P + P^t = 0\}$ : $P \to A^t.P.A$ est un isomorphisme (d'inverse $Q \to A.Q.A^t$). On déduit : $T_{X_0}Z_+(n) = \{P \in M(2n,\mathbf{R}), PX_0 + X_0P = 0 \ et \ P + P^t = 0\}$. L'égalité avec $\{P \in M(2n,\mathbf{R}), P = [X_0, B], \ B + B^t = 0\}$ se fait de manière analogue à la première démonstration.

2. On considère dans ce cas des endomorphismes de $T_xM$. L'opérateur $u^*$ désigne l'adjoint de $u$ pour $g$ . En prenant un champ de repères orthonormés au voisinage d'un point $X_0$, on se ramène au cas précédent, en raisonnant sur les matrices : $Mat(a) = X, Mat(u) = P, Mat(u^*) = P^t$. L'intérêt de cette formulation est de fournir une description de l'espace tangent en un point d'une fibre , indépendamment de bases, même si on passe par des repères pour y parvenir. On pourrait raisonner directement sur des endomorphismes et faire un calcul s'inspirant de la deuxième méthode ci-dessus. Mais pour calculer les dimensions, il semble nécessaire de passer par des bases.
3. Soit $X \in Z_+(n)$ . $U_X$ désigne un voisinage de $X$ dans $Z_+(n)$ et $f : U_X \to \mathbf{R}$ une fonction $C^\infty$ ; un vecteur $V \in T_XZ_+(n)$ peut être vu de deux façons d'après ce qui précède : il existe $\gamma :]-\epsilon, +\epsilon[\to U_X$ telle que $\gamma(0) = X$ et il existe $A \in so(2n)$ tels que

$$V = \dot{\gamma}(0) = [X, A].$$

$V$ agit sur $f$ par $V(f) = d_Xf(V) = d_Xf(\dot{\gamma}(0)) = (f \circ \gamma)'(0) = (\tilde{f} \circ \gamma)'(0)$, pour tout prolongement local $\tilde{f}$ de $f$ au voisinage de $X$ dans $M(2n,\mathbf{R})$.$\tilde{f}$ est une fonction de $n^2$ variables indépendantes , donc $d_X\tilde{f}(U) = \sum_{i,j} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial X_{ij}}(X)U_{ij}$ pour toute matrice $U$ de $M(2n,\mathbf{R})$. En appliquant cette formule à $U = \dot{\gamma}(0) = [X, A]$, on obtient :

$$V(f) = \sum_{i,j} [X, A]_{ij} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial X_{ij}}(X).$$

□

### 4.2.2. Expression du relèvement horizontal d'un vecteur tangent à M. —

***Définition 4.2.4***. — Soient $x \in$ M , $\theta \in T_xM$ et $a \in \tau(M)$, tel que $\pi_\tau(a) = x$. Le relèvement horizontal de $\theta$ en $a$, noté $\hat{\theta}^a$ (ou $\hat{\theta}$) s'il n'y a pas de confusion possible, est le seul élément de $\mathcal{H}_a$, tel que $\pi_{\tau*a}(\hat{\theta}^a) = \theta$.

Sauf pour précision, on omettra le $a$ dans l'expression $\hat{\theta}^a$. On donne ci-dessous une expression détaillée de $\hat{\theta}$, qui sera utilisée par la suite. On se donne un champ de repères local $R$ au voisinage de $x$. Pour connaitre $\hat{\theta}$, il suffit de connaitre $(\psi_R)_{*a}(\hat{\theta})$, puisque que

$\psi_R$ est un difféomorphisme. Il existe $U \in \tau_p$, unique tel que $\hat{\theta} = r_{*p}(U)$, $p$ étant choisi tel que $r(p) = a$ ; $p = R(x)g$ pour un $g$ unique de $G$. Le vecteur $U$ étant horizontal dans $T_pP$, il existe $T$ et $V$ uniques avec $T \in T_xM$ et $V \in T_gG$ tels que U=$(\varphi_R)_*((x,g);(T,V))$ avec la propriété $V = -\tilde{\eta}(x;T)g$ (relation d'horizontalité). Des relations $\pi_P = \pi_\tau \circ r$ et $\pi_P \circ \varphi_R(x,g) = x$ on déduit $\theta = (\pi_\tau)_{*a}(\hat{\theta}) = (\pi_\tau)_{*a} \circ r_{*p}(U) = (\pi_P)_{*p}(\varphi_R)_*((x,g);(T,V)) = T$, soit : $T = \theta$ et $V = -\tilde{\eta}(x;\theta)g$. Avec $T$ et $V$ ayant les valeurs ci-dessus, on en déduit

$$(\psi_R)_{*a}\hat{\theta}) = \tilde{r}_*((x,g);(T,V)) = (T, V.J_n.{}^tg + g.J_n.{}^tV).$$

Comme $r(p) = a$, on a $Mat(a,p) = J_n$. Comme $p = R(x)g$, on a $Mat(a,R(x)) = g.J_n.{}^tg$ ; En posant $X = Mat(a,R(x))$, on obtient :$V.J_n.{}^tg + g.J_n.{}^tV = -\tilde{\eta}(x;\theta).g.J_n.{}^tg + g.J_n.{}^tg\tilde{\eta}(x;\theta) = [X, \tilde{\eta}(x;\theta)]$. D'où le résultat suivant, en indiquant le produit $T_xM \times T_XZ_+(n)$, de manière additive

***Proposition 4.2.5***. — *Soit $a \in \tau(M)$ tel que $\pi_\tau(a) = x$ ; soit $R$ un repère local au voisinage de $x$ ; soit $X = Mat(a,R(x))$ ; alors*

$$(\psi_R)_{*a}(\hat{\theta}^a) = \theta + [X, \tilde{\eta}(x;\theta)]$$

*La version opérateur différentiel s'écrit :*

$$(\psi_R)_{*a}(\hat{\theta}^a) = \theta + [X, \tilde{\eta}(x;\theta)]^\bullet = \theta + \sum_{k,l} [X, \tilde{\eta}(x;\theta)]_{kl} \frac{\partial}{\partial X_{kl}}.$$

*En général on ne mentionnera ni $a$ ni $\psi_R$ lorqu'il n'y a pas ambiguité, et on écrira*

$$\hat{\theta} = \theta + [X, \tilde{\eta}(x;\theta)]^\bullet.$$

**4.2.3. Remarques sur les champs de vecteurs sur $\tau(M)$.** — Tous les champs de vecteurs tangents verticaux ne sont pas de la forme $(x,X) \to [X,A]$ où $A$ est une matrice constante de $so(2n)$. D'une part on peut ajouter $X$ à $A$ puisque $[X, A+X] = [X,A]$. Plus généralement, il existe des champs de la forme $(x,X) \to [X, A(x,X)]$ ou $A(x,X) \in so(2n)$, mais dépend de $x$ et de $X$. En général, pour réaliser des calculs du type $d\omega(a; V_1, V_2, H_1, H_2 ...)$ ou $V_k \in \mathcal{V}_a$, et $H_k \in \mathcal{H}_a$, il est nécessaire de prolonger localement ces vecteurs par des champs de vecteurs locaux, bien que le résultat soit indépendant des prolongements, à cause de la nature tensorielle des opérateurs utilisés.

Un repère local $R$ étant fixé, dans la suite un vecteur tangent vertical en $a_0 \overbrace{\equiv}^{\psi_R} (x_0, X_0)$,qui est de la forme $[X_0, A]$ sera prolongé localement par $a \overbrace{\equiv}^{\psi_R} (x,X) \to [X,A]$.

Un vecteur horizontal en $a_0$, qui est de la forme $\hat{\theta}^{a_0}$, ou $\theta \in T_xM$, on prolonge localement $\theta$ par un champ de vecteurs noté aussi $\theta$ et $\hat{\theta}^{a_0}$ par $a \to \hat{\theta}^a$. Néanmoins dans le cas horizontal, en général des champs de vecteurs locaux sont déja donnés.

### 4.3. Structure presque complexe sur $\tau(M)$

En chaque point $a$ de $\tau(M)$, tel que $\pi(a) = x$, on définit un endomorphisme $\mathbb{J}$ de $T_a\tau(M)$ tel que :

• sur $\mathcal{H}_a$ : un élément de $\mathcal{H}_a$ s'écrit de manière unique comme $\hat{T}$, avec $T \in T_xM$. Pour un tel $\hat{T} \in \mathcal{H}_a$, on pose : $\mathbb{J}_a(\hat{T}) = \widehat{a(T)}$. (les relèvements sont à prendre en $a$). Dans un repère $R(x) = (x; \theta_1, ..., \theta_{2n})$, si $a(\theta_i) = \sum_j X_{ji}\theta_j$ , alors $\mathbb{J}_a(\hat{\theta}_i) = \sum_j X_{ji}\hat{\theta}_j$.

• sur $\mathcal{V}_a$ : Un élément de $\mathcal{V}_a$ peut être considéré comme un endomorphisme anti-symétrique de $T_xM$, tel que $u \circ a + a \circ u{=}0$ ; On pose alors $\mathbb{J}_a(u) = a \circ u$. Dans un repère $R$ comme ci-dessus, si $Mat(a, R(x)) = X$, on sait qu'il existe une matrice antisymétrique $M$ telle que $Mat(u, R(x)) = [X, M]$. (prendre par exemple $M = Mat(-\frac{1}{2}a \circ u, R(x))$). Alors $Mat(\mathbb{J}_a(u), R(x)) = X.[X, M] = -M - XMX = [X, XM]$. Pour cette raison, on représentera en général $J_a(u)$ sous la forme $[X, XM]$, bien que ne soit pas la forme canonique ; en effet $XM$ n'est pas forcément anti-symétrique (on peut prendre en s'inspirant de l'exemple de $u$ en remplacant $u$ par $a \circ u$, $a \circ u = [a, \frac{u}{2}]$).

On a les propriétés :$\mathbb{J}_a^2 = -Id$ (résulte du fait que $a^2 = -Id$) ; $\mathbb{J}$ conserve les facteurs de la somme directe $T_a\tau(M) = \mathcal{H}_a \oplus \mathcal{V}_a$. En général, on n'écrira pas le $a$, lorsqu'il n'y a pas de confusion possible.

***Définition 4.3.1***. — L'opérateur $\mathbb{J}$ est dit intégrable si il existe une structure de variété analytique complexe sur $\tau(M)$, compatible avec $\mathbb{J}$ (notations du début du document).

### 4.4. Structure riemannienne sur $\tau(M)$

On définit une métrique $\mathbb{G}$ comme suit

***Définition 4.4.1***. —
1. $\mathbb{G}$(X,Y)=0 si X$\in \mathcal{H}_a$ et Y $\in \mathcal{V}_a$.($\mathcal{H}_a$ et $\mathcal{V}_a$ sont orthogonaux par définition).
2. $\mathbb{G}(\hat{X}^a, \hat{Y}^a) = g(X, Y)$ si $X$ et $Y \in T_xM$.
3. $\mathbb{G}$(X,Y)=-$\frac{1}{2}Trace(u \circ v) = \frac{1}{2}Trace({}^tu \circ v)$ avec $X = u$, $Y = v$, $u$ et $v$ comme dans 1.2.
4. On a la propriété :$\mathbb{G}(\mathbb{J}(X), \mathbb{J}(Y)) = \mathbb{G}(X, Y)$ ($\mathbb{J}$ orthogonal pour $\mathbb{G}$).

### 4.5. Forme de Kähler $\omega$

On pose : $\omega$ (X,Y)=$\mathbb{G}(X, \mathbb{J}(Y))$. C'est une 2-forme sur $\tau$(M), appelée la forme de Kähler de $\tau$(M).

**4.5.1. Décompositions de $T_a\tau(M)^c$.** — On note ici :
$T_a\tau(M)^c$ le complexifié de l'espace tangent en a à $\tau(M)$,
$T_a\tau(M)'$ le sous-espace de $T_a\tau(M)^c$ des vecteurs holomorphes(h en abrégé). Si $X \in T_a\tau(M)'$ , alors $\mathbb{J}(X) = iX$.
$T_a\tau(M)$" le sous-espace de $T_a\tau(M)^c$ des vecteurs anti-holomorphes(ah en abrégé). Si $X \in T_a\tau(M)$", alors $\mathbb{J}(X) = -iX$.

***Remarque 4.5.1***. — Les notations plus correctes pour désigner ces deux types d'espaces sont :
$T_a^{(1,0)}\tau(M) = \{X \in T_a\tau(M),\ \mathbb{J}(X) = iX\}$,

$T_a^{(0,1)}\tau(M) = \{X \in T_a\tau(M),\ \mathbb{J}(X) = -iX\}$
Les adjectifs holomorphes et anti-holomorphes ne sont pas non plus très bien choisis. Ils plus appropriés quand on suppose que $\tau(M)$ est une variété complexe, dont la structure est compatible avec $\mathbb{J}$. Pour des raisons d'écriture du document, on conservera ces notationss.

On a les deux décompositions

$$T_a\tau(M)^c = T_a\tau(M)^{'} \oplus T_a\tau(M)^{"} = \mathcal{H}_a^c \oplus \mathcal{V}_a^c.$$

**4.5.2. Types de $\omega$, $d\omega$, $d^{'}\omega$, $dd^{'}\omega$.** — On suppose $\mathbb{J}$ intégrable. Décomposons $\omega$ selon ses types : $\omega = \omega_{2,0} + \omega_{1,1} + \omega_{0,2}$.
Si on décompose deux éléments $X$ et $Y$ appartenant à $T_a\tau(M)^c$ selon leur composantes h et a , $X = X^{'} + X^{"}$, $Y = Y^{'} + Y^{"}$, avec $\mathbb{J}(X^{'}) = iX^{'}, \mathbb{J}(Y') = iY', \mathbb{J}(X^{"}) = -iX^{"}$ et $\mathbb{J}(Y^{"}) = -iY^{"}$.
$\omega_{2,0}(X,Y) = \omega_{2,0}(X^{'} + X^{"}, Y^{'} + Y^{"}) = \omega_{2,0}(X^{'}, Y^{'}) = \mathbb{G}(X^{'}, \mathbb{J}(Y^{'})) = \mathbb{G}(X^{'}, iY^{'}) = i\mathbb{G}(X^{'}, Y^{'})$ ($\mathbb{G}$ est étendu par **C**-linéarité).
Utilisons les propriétés p1 et p2 de $\mathbb{J}$ : $\omega_{2,0}(X,Y) = \mathbb{G}(X^{'}, \mathbb{J}(Y^{'})) = \mathbb{G}(\mathbb{J}(X^{'}), (\mathbb{J})^2(Y^{'})) = \mathbb{G}(iX^{'}, -Y^{'}) = -i\mathbb{G}(X^{'}, Y^{'}) = -\omega_{2,0}(X,Y)$. On déduit que $\omega_{2,0} = 0$ ; pour les mêmes raisons, $\omega_{0,2} = 0$. Donc $\omega$ est de type (1,1). De ce résultat, on déduit que d$\omega$ est de type (2,1)+(1,2), $d'd\omega$ est de type (3,1)+(2,2), $d"d\omega$ est de type (2,2)+(1,3). Comme $d^{'}d + d^{"}d$=$d^2$=0, $d^{'}d\omega$ est de type (2,2). En résumé

***Lemme 4.5.2.*** — *$\omega$ est de type (1,1) et $d^{'}d\omega$ est de type (2,2).*

On déduit de ce lemme que $d^{'}\omega$ est de type (2,1). De même $d^{"}\omega$ est de type (1,2). Si on note $h_0$, $h_1$.. des champs de type h ($\in (T_a\tau(M))^{'}$), et $a_0$, $a_1$.. des champs de type ah ($\in (T_a\tau(M))^{"}$) : $d^{'}\omega(h_0, h_1, a_0) = d\omega(h_0, h_1, a_0)$ car $d = d^{'} + d^{"}$ et $d^{"}\omega(h_0, h_1, a_0) = 0$, à cause du type de $d^{"}$. Toutes les autres configurations sont nulles, plus précisément :

$$\begin{aligned} (1) d'\omega(h_0, h_1, h_2) &= 0 \\ (2) d'\omega(h_0, a_0, a_1) &= 0 \\ (3) d'\omega(a_0, a_1, a_2) &= 0. \end{aligned}$$

Du fait que $\omega$ est réelle (appliquée à des vecteurs réels, le résultat est réel), on montre que si on considère $h_1$ et $h_2$ des vecteurs tangents à $\tau(M)$, holomorphes et $a_1$ et $a_2$ des vecteurs tangents à $\tau(M)$, anti-holomorphes, alors, en utilisant pour un vecteur tangent V à $\tau(M)$ la notation $\overline{V}$ pour le conjugué de V :

$$id'd^{"}\omega(\overline{h_1}, \overline{h_2}, \overline{a_1}, \overline{a_2}) = \overline{id'd^{"}(h_1, h_2, a_1, a_2)}.$$

# CHAPITRE 5

# PROPRIÉTÉS CONFORMES

## 5.1. Isomorphismes d'espaces twistoriels et transformations conformes

***Définition 5.1.1.*** — Soit $(M, g)$ et $(N, h)$ deux variétés de Riemann orientées. Les métriques $g$ et $h$ sont conformes si il existe un difféomorphisme $\Phi : M \to N$ préservant les orientations et tel que $\Phi^* h = \lambda g$ ou $\lambda$ est une fonction différentiable strictement positive.

On a alors le résultat suivant, qui montre une équivalence entre les classes de métriques conformes et les classes "*d'isomorphie*" de fibrés twistoriels.

***Théorème 5.1.2.*** — *Il y a équivalence entre*

1. *$g$ et $h$ sont conformes.*
2. *$\exists$ un difféomorphisme $C^\infty$ de fibrés $\dot{\Phi} : \tau(M, g) \to \tau(N, h)$ tel que $\dot{\Phi}_{*a} \circ \mathbb{J}^g_a = \mathbb{J}^h_{\dot{\Phi}_a} \circ \dot{\Phi}_{*a}$, pour tout $a \in \tau$(M,g).(Isomorphisme d'espaces twistoriels).*

*Démonstration.* — $1 \Rightarrow 2$ : Si $g$ et $h$ sont conformes, il existe une fonction $\sigma : M \to \mathbf{R}$ de sorte que $\lambda(x) = e^{2\sigma(x)}$ et donc telle que $h(\Phi_{*x} X, \Phi_{*x} Y) = e^{2\sigma(x)} g(X, Y)$ pour tous $x$ de $M$ et tous vecteurs tangents $X$ et $Y$ de $M$ . Définissons $\hat{\Phi} : P_{SO}(M) \to P_{SO}(N)$ et $\dot{\Phi} : \tau(M) \to \tau(N)$ de sorte que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} & \dot{\Phi} & \\ \tau(M,g) & \rightarrow & \tau(N,h) \\ r_M \uparrow & & \uparrow r_N \\ P_{SO}(M) & \rightarrow & P_{SO}(N) \\ & \hat{\Phi} & \end{array}$$

Pour cela on pose pour un repère $p = (x; \theta_1 ..., \theta_{2n}) \in P_{SO} M$ :

$$\hat{\Phi}(p) = (\Phi(x); e^{-\sigma(x)} \Phi_{*x} \theta_1, ... e^{-\sigma(x)} \Phi_{*x} \theta_{2n});$$

(on ne mentionne plus $x$, sauf cas particulier). Pour montrer la cohérence de cette définition, on a $h(e^{-\sigma} \Phi_* \theta_i, e^{-\sigma} \Phi_* \theta_j) = e^{-2\sigma} h(\Phi_* \theta_i, \Phi_* \theta_i) = g(\theta_i, \theta_j) = \delta_{ij}$, ce qui montre que $\hat{\Phi}(p)$ est bien orthonormé. De plus $\Phi$ préserve les orientations , donc $\hat{\Phi}(p) \in P_{SO} N$.

Application entre $\tau(M)$ et $\tau(N)$ :

***Définition 5.1.3.*** — En un point $a \in \tau(M)$ , il existe $p \in P_{SO} M$ tel que $r_M(p) = a$ ; on définit alors $\dot{\Phi}(a) = r_N(\hat{\Phi}(p))$.

Montrons que cette définition a un sens, c'est à dire ne dépend pas de $p$, pourvu que $r_M(p) = a$ :

Pour cela, montrons que $r_N(\hat{\Phi}(p)) = (\Phi_{*x}) \circ a \circ \Phi_{*x}^{-1}$. On suppose $r_M(p) = a$ avec $p = (x, \theta_1, ..., \theta_{2n})$. Si on pose $b = r_N(\hat{\Phi}(p))$, $Mat(b, \hat{\Phi}(p)) = J_n$ ; Mais compte tenu de la forme de la base $\hat{\Phi}(p)$, on a aussi : $M(b, \Phi_{*x}\theta_1, ..., \Phi_{*x}\theta_{2n}) = Mat(b, \hat{\Phi}(p)) = J_n$.(le coéfficient $e^{-\sigma}$ n'intervient pas puisque les bases $\Phi_{*x}\theta_1, ..., \Phi_{*x}\theta_{2n}$ et $e^{-\sigma}\Phi_{*x}\theta_1, ..., e^{-\sigma}\Phi_{*x}\theta_{2n}$ étant "proportionnelles", les matrices de b dans ces deux bases sont les mêmes).

$Mat(\Phi_{*x} \circ a \circ \Phi_{*x}^{-1}, \Phi_{*x}, \theta_1, ..., \Phi_{*x}\theta_{2n}) = Mat(a, \theta_1, ..., \theta_{2n}) = Mat(a, p) = J_n$. On déduit que $b$ et $\Phi_{*x} \circ a \circ \Phi_{*x}^{-1}$ ont la même matrice dans la base $\Phi_{*x}\theta_1, ..., \Phi_{*x}\theta_{2n}$, donc sont égaux.

Ce procédé est réversible ($\hat{\Phi}$ est inversible, et donc aussi $\dot{\Phi}$). On déduit que $\dot{\Phi}$ est un difféomorphisme.

Pour terminer la démonstration du point 2 du théorème, on doit démontrer la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \dot{\Phi}_{*a} & \\ T_a\tau(M,g) & \rightarrow & T_{\dot{\Phi}(a)}\tau(N,h) \\ \mathbb{J}_a^g \uparrow & & \uparrow \mathbb{J}_{\dot{\Phi}(a)}^h \\ T_a\tau(M,g) & \rightarrow & T_{\dot{\Phi}(a)}\tau(N,h) \\ & \dot{\Phi}_{*a} & \end{array}$$

On examine la commutativité sur les éléments de $T_a(\tau(M,g))$ : dans un ouvert $U$ ou existe un repère $R$ local, on avait introduit des applications $\psi_R$ pour pouvoir faire correspondre à un endomorphisme, sa matrice dans $R$.

Calculons d'abord $\psi_{\hat{\Phi}(R)} \circ \dot{\Phi} \circ \psi_R^{-1} : U \times Z_+(n) \rightarrow \Phi(U) \times Z_+(n)$.

Pour un élément $(x, X)$ de $Z_+(n)$, par définition $\psi_R^{-1}(x, X)$ est l'endomorphisme de $\pi_M^{-1}(x)$ dont la matrice dans $R(x)$ est $X$. Mais on a aussi $\psi_R^{-1}(x, X) = r_M(R(x).g)$ pour un élément $g$ de $G$ ($r_M$ est surjective). $b = \dot{\Phi} \circ \psi_R^{-1}(x, X) = \dot{\Phi}(r_M(R(x)g)) = r_N(\hat{\Phi}(R(x)g))$=endomorphisme de $\pi_N^{-1}(\Phi(x))$ dont la matrice dans $\hat{\Phi}(p)$, ( $p = R(x)g$), est $J_n$. $Mat(r_M(p), p) = J_n = Mat(\psi_R^{-1}(x, X), R(x)g) =^t g.X.g$. De même $Mat(b, \hat{\Phi}(p)) = Mat(r_N(\hat{\Phi}(p)), \hat{\Phi}(p)) = J_n$. On en déduit que $Mat(b, \hat{\Phi}(R(x)) = g.J_n.^tg = X$ ; en conclusion

$$\psi_{\hat{\Phi}(R)} \circ \dot{\Phi} \circ \psi_R^{-1}(x, X) = (\Phi(x), X).$$

On peut traduire cette propriété en disant que pour un point $a$ de $\tau(M)$, si on représente dans R(x) un vecteur vertical en $a$ par la matrice $[X, A]$ avec $X = Mat(a, R(x))$ et $A \in so(2n)$, $\dot{\Phi}_{*a}(T, [X, A]) = (\Phi_{*x}(T), [X, A])$, sachant que le deuxième $[X, A]$ désigne l'élément de $\tau(N)$ dont la matrice dans le repère $\hat{\Phi}(R(x))$ est aussi [X,A]. ($X = Mat(a, R(x)) = Mat(\dot{\Phi}(a), \hat{\Phi}(R(x)))$).

Un vecteur de $T_a\tau(M)$ peut s'écrire U=T+$[X, A]^\bullet$ où $T \in T_xM$ et $[X, A]^\bullet = \sum_{i,j}[X, A]_{ij}\frac{\partial}{\partial X_{ij}}$. (écriture dans R(x)).

$\mathbb{J}_{\dot{\Phi}(a)}^h \circ \dot{\Phi}_{*a}(U) = \mathbb{J}_{\dot{\Phi}(a)}^h(\Phi_{*x}(T) + [X, A]^\bullet) = \dot{\Phi}(a)(\Phi_{*x}(T)) + [X, XA]^\bullet$. On remarque que le deuxième terme est écrit dans le repère $\hat{\Phi}(R)$.

Pour l'autre sens du diagramme ,$\dot{\Phi}_{*a} \circ \mathbb{J}^g_a(U) = \dot{\Phi}_{*a} \circ \mathbb{J}^g_a(T + [X, A]^\bullet) = \dot{\Phi}_{*a}(a(T) + [X, XA]^\bullet) = (\Phi_{*x}(a(T)+[X, XA]^\bullet)$. Comme $\dot{\Phi}(a)\circ\Phi_{*x} = \Phi_{*x}\circ a$, $(\dot{\Phi}(a) = \Phi_{*x}\circ a\circ(\Phi_{*x})^{-1})$ on en déduit la commutativité du diagramme.

$2 \Rightarrow 1$ : A l'inverse , si on suppose l'existence d'un isomorphisme d'espaces twistoriels $\Psi$ entre $\tau(M, g)$ et $\tau(N, h)$, comme $\Psi$ respecte les fibres , on définit $\Phi : M \to N$ de la manière suivante : si $a \in \pi_M^{-1}(x)$, on pose $\Phi(x) = \pi_N(\Psi(a))$.Cette définition a un sens car $\Psi(\pi_M^{-1}(x))$ est une fibre par définition de $\Psi$, donc cette définition ne dépend pas de $a$ . De plus si R est un repère local $\mathbf{C}^\infty$ dans M, $\Phi(x) = \pi_N \circ \Psi \circ R(x)$ , qui montre que $\Phi$ est $C^\infty$, comme composition d'applications $C^\infty$. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & \Psi & \\ \tau(M) & \to & \tau(N) \\ \downarrow \pi_M & & \downarrow \pi_N \\ M & \to & N \\ & \Phi & \end{array}$$

par définition de $\Phi$ puisque $\Phi(x) = \pi_N(\Psi(a))$ pour tout $a$ tel que $\pi_M(a) = x$.

(1) $\Psi_{*a}\circ\mathbb{J}^g_a = \mathbb{J}^h_{\Psi_a}\circ\Psi_{*a}$ par hypothèse, et de plus $\Psi_{*a}(\mathcal{V}_a) \subseteq \mathcal{V}_{\Psi(a)}$ puisque $\Psi$ respecte les fibres. Considérons un élément $T$ quelconque de $T_xM$ et notons $\hat{T}^a$ son relevé horizontal en $a$ ; on peut écrire : (2)$\Psi_{*a}(\hat{T}) = H + V$ où $H = \hat{U}^{\Psi(a)}$, avec $U \in T_{\Phi(x)}N$, le relèvement horizontal étant à prendre en $\Psi(a)$, et $V \in \mathcal{V}_{\Psi(a)}$.

***Lemme 5.1.4***. — a.— *$U = \Phi_{*x}(T)$ , c'est à dire $\Psi_{*a}(\hat{T}) = \widehat{\Phi_{*x}(T)} + V$.*
b.— *On a $\Phi_{*x} \circ a = \Psi(a) \circ \Phi_{*x}$.*

*Démonstration.* — a.— Appliquons $(\pi_N)_{*\Psi(a)}$ à l'identité (2) ci-dessus. $(\pi_N)_{*\Psi(a)}(V)=0$ car $V$ est vertical; il reste : $(\pi_N)_{*\Psi(a)}(\Psi_{*a}(\hat{T})) = U = (\pi_N \circ \Psi)_{*a}(\hat{T}) = (\Phi \circ \pi_M)_{*a}(\hat{T}) = (\Phi)_{*x}(T)$.

b.— En appliquant $\hat{T}$ à l'identité (1), $\Psi_{*a} \circ \mathbb{J}^g_a(\hat{T}) = \mathbb{J}^h_{\Psi_a} \circ \Psi_{*a}(\hat{T})$ d'où en appliquant le lemme aux deux membres et compte tenu des définitions de $\mathbb{J}^g$ et $\mathbb{J}^h$ : $\Psi_{*a} \circ \mathbb{J}^g_a(\hat{T}) = \Psi_{*a}(\widehat{a(T)}) = \widehat{\Phi_{*x}(a(T))}+V_1$ où $V_1$ est vertical. $\mathbb{J}^h_{\Psi_a}\circ\Psi_{*a}(\hat{T}) = \mathbb{J}^h_{\Psi_a}(\widehat{\Phi_{*x}(T)}+V_2)$ ou $V_2$ est vertical. En égalant ces deux quantités , et en particulier les parties horizontales, on obtient $\Phi_{*x}(a(T)) = \Psi(a)(\Phi_{*x}(T))$ ce qui revient à la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} & a & \\ T_xM & \to & T_xM \\ \downarrow \Phi_{*x} & & \downarrow \Phi_{*x} \\ T_{\Phi(x)}N & \to & T_{\Phi(x)}N \\ & \Psi(a) & \end{array}.$$

□

De la relation (b) du lemme,

$$\begin{aligned} \Phi^*h(a(X), Y) &= h(\Phi_{*x}(a(X)), \Phi_{*x}(Y)) = h(\Psi(a)(\Phi_{*x}(X), \Phi_{*x}Y) \\ &= -h(\Phi_{*x}(X), \Psi(a)(\Phi_{*x}Y)) = -\Phi^*h(X, aY). \end{aligned}$$

Donc $a$ est $\Phi^*h$ anti-symétrique. Pour conclure, choisissons une base $v_i$ qui soit $g$-orthonormale et $\Phi^*h$ orthogonale : $\Phi^*h(v_i, v_j) = \lambda_i\delta_{ij}$, $g(v_i, v_j) = \delta_{ij}$. Si on écrit $av_i = \sum_j a_{ji}v_j$, $\Phi^*h(av_i, v_j) = a_{ji}\lambda_j = -\Phi^*h(v_i, av_j) = -a_{ij}\lambda_i = a_{ji}\lambda_i$,(a est aussi g-anti-symétrique) d'ou $a_{ij}(\lambda_i - \lambda_j)$=0, pour tous i et j et tout a . On déduit que les $\lambda_i$ sont égaux à un seul $\lambda$. (par exemple $\lambda_1 = \lambda_2$ puisque dans la base $\{v_i\}$, l'endomorphisme $a$ ayant $J_n$ comme matrice vérifie $a_{21} = 1$). Soit $\Phi^*h = \lambda g$ et $\lambda$ est positive car $g$ et $\Phi^*h$ sont définies positives.
Notons que $\Psi_*$ respecte par définition les espaces verticaux, alors que ce n'est pas nécessairement le cas pour les espaces horizontaux. □

### 5.2. Relation entre intégrabilités sur deux espaces conformes

Soit $\sigma : (M, g) \to (N, h)$ une application conforme , préservant les orientations. Si $a$ est un endomorphisme de $T_xM$, on définit $\tilde{a}$, endomorphisme de $T_{\sigma(x)}N$ par :

$$\begin{array}{ccc} & \sigma_{*x} & \\ T_xM & \to & T_{\sigma(x)}N \\ a\downarrow & & \downarrow \tilde{a} \\ T_xM & \to & T_{\sigma(x)}N \\ & \sigma_{*x} & \end{array}$$

c'est à dire $\tilde{a} = \sigma_* \circ a \circ \sigma_*^{-1}$

On peut alors définir comme précédemment avec $\sigma$ dans le rôle de $\Phi$, $\dot{\sigma} : \tau(M, g) \to \tau(N, h)$ par $\dot{\sigma}(x, a) = (\sigma(x), \tilde{a})$. Si $a$ est fonction de $x \in M$, on construit une section $s_a$, par $s_a(x) = (x, a(x))$. De même on définit $s_{\tilde{a}}(\sigma(x)) = (\sigma(x), \sigma_{*x} \circ a(x) \circ \sigma_{*x}^{-1})$, section de $\tau(N, h)$. Examinons alors le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
T_{\dot{\sigma}(s_a(x))}\tau(N,h) \arrow[rrr, "\mathbb{J}^h"] & & & T_{\dot{\sigma}(s_a(x))}\tau(N,h) \\
& T_{s_a(x)}\tau(M,g) \arrow[ul, "\dot{\sigma}_{*s_a(x)}"'] \arrow[r, "\mathbb{J}^g"] & T_{s_a(x)}\tau(M,g) \arrow[ur, "\dot{\sigma}_{*s_a(x)}"] & \\
& T_xM \arrow[u, "s_{a*x}"] \arrow[r, "a(x)"] \arrow[dl, "\sigma_{*x}"'] & T_xM \arrow[u, "s_{a*x}"'] \arrow[dr, "\sigma_{*x}"] & \\
T_{\sigma(x)}N \arrow[uuu, "(s_{\tilde{a}})_{*\sigma(x)}"] \arrow[rrr, "\tilde{a}(\sigma(x))"'] & & & T_{\sigma(x)}N \arrow[uuu, "(s_{\tilde{a}})_{*\sigma(x)}"']
\end{tikzcd}$$

Les 4 diagrammes périphériques sont commutatifs :
-diagramme du bas :$\tilde{a}(\sigma(x)) \circ \sigma_{*x} = \sigma_{*x} \circ a(x) \circ \sigma_{*x}^{-1} \circ \sigma_{*x} = \sigma_{*x} \circ a(x)$ ; ce qui montre la commutativité de ce diagramme.
-diagrammes latéraux : $(s_{\tilde{a}})_{*\sigma(x)} \circ \sigma_{*x} = (s_{\tilde{a}} \circ \sigma)_{*x}$ et $(\dot{\sigma})_{*s_a(x)} \circ (s_a)_{*x} = (\dot{\sigma} \circ s_a)_{*x}$ et $\dot{\sigma} \circ s_a = s_{\tilde{a}} \circ \sigma$ par définition.
-diagramme du haut :la démonstration de la commutativité a été effectuée dans le théorème 5.1.2 avec $\Phi = \sigma$ . Il y a donc équivalence entre la commutativité du "petit "

diagramme central et celle du grand diagramme.
Rappelons ici le théorème de Newlander-Nirenberg :

***Théorème 5.2.1***. — *Soit a une structure presque complexe sur M. a est intégrable* $\Leftrightarrow$ $N(a) = 0$ *(tenseur de Nijenhuis de a).*

Utilisons alors le lemme que j'admets :

***Lemme 5.2.2***. — *Soit a une structure presque complexe sur M. Sont équivalentes :*

1. *a est intégrable.*
2. $s_a(M)$ *est une sous-variété complexe de* $\tau(M)$*.*
3. *Le diagramme central ci-dessus est commutatif.*

Voir par exemple **[D]**(p 25) et aussi **[B-N]** p128.

***Remarque 5.2.3***. — On voit par ce lemme la relation existant entre l'intégrabilité d'une structure presque complexe sur $M$ et la structure presque complexe $\mathbb{J}$ sur $\tau(M)$ ( $\forall x \in M$, $\mathbb{J}_{s_a(x)} \circ d_x s_a = d_x s_a \circ a(x)$).

En utilisant ce lemme on obtient l'équivalence

***Corollaire 5.2.4***. — *Pour deux variétés (M,g) et (N,h) conformes par* $\sigma : M \to N$, *si a est une structure presque intégrable sur M. En posant pour tout y de N,* $\tilde{a}(y) = \sigma_{*\sigma^{-1}(y)} \circ a(\sigma^{-1}(y)) \circ \sigma_{*y}^{-1}$,

$$a \text{ intégrable} \iff \tilde{a} \text{ intégrable.}$$

### 5.3. Cas de $\mathbf{R}^4$ et $S^4$

Rappelons que nous ne considérons que les structures presque complexes compatibles avec les métriques usuelles.

Soit $N$ le pôle nord de $S^4$ et $S$ le pôle sud. La projection stéréographique de pôle nord, $\sigma_N : S^4 - (N) \to \mathbf{R}^4$ étant conforme, d'après ce qui précède, il y a donc équivalence entre leurs structures presque complexes intégrables, compatibles avec leurs métriques usuelles ( métrique euclidienne $h$ dans le cas de $\mathbf{R}^4$ et métrique $g$ sur $S^4$ induite de la métrique euclidienne de $\mathbf{R}^5$) . Celles de $(R^4, h)$ étant connues, toutes les combinaisons de la forme $J_{abc} = aI + bJ + cK$, (notations du début du document conernant $I, J, K$) avec $a, b, c$ constantes réelles telles que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, les structures presque complexes intégrables $L$ de $(S^4 - (N), g)$ sont donc de la forme

$$L = ((\sigma_N)_{*x})^{-1} \circ J_{abc}(\sigma_N(x)) \circ (\sigma_N)_{*x} \; (x \in S^4 - (N)).$$

De même, en utilisant la projection stéréographique de pôle sud : $\sigma_S : S^4 - (S) \to \mathbf{R}^4$, on obtient un résultat analogue : pour une structure presque complexe intégrable $L$ sur $S^4 - (S)$, il existe $a'$, $b'$, $c'$ des constantes réelles telles que $a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1$ et :

$$L = ((\sigma_S)_{*x})^{-1} \circ J_{a'b'c'}(\sigma_S(x)) \circ (\sigma_S)_{*x}((x \in S^4 - (S)).$$

Une structure presque complexe intégrable (pci) sur $S^4$ induit une structure pci sur $S^4-(N)$ et une structure pci sur $S^4-(S)$, on doit donc avoir

$$((\sigma_N)_{*x})^{-1}\circ J_{abc}(\sigma_N(x))\circ(\sigma_N)_{*x}=((\sigma_S)_{*x})^{-1}\circ J_{a'b'c'}(\sigma_S(x))\circ(\sigma_S)_{*x}$$

pour $x\in S^4-(N\cup S)$, soit $(\sigma_S\circ\sigma_N^{-1})_{*\sigma_N(x)}\circ J_{abc}(\sigma_N(x))=J_{a'b'c'}(\sigma_S(x))\circ(\sigma_S\circ\sigma_N^{-1})_{*\sigma_N(x)}$ pour $x\in S^4-(N\cup S)(*)$.

L'application $\sigma_S\circ\sigma_N^{-1}$ est l'inversion de centre $O$, centre de la sphère $S^4$ et de puissance 1. Alors, $\sigma_S\circ\sigma_N^{-1}(u)=\frac{u}{\|u\|^2}$ pour tout $u\in\mathbf{R}^4-0$. Ecrivons la matrice $M(u)$ de $(\sigma_S\circ\sigma_N^{-1})_{*u}$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^4$

$$M(u)=\frac{1}{\|u\|^2}Id-\frac{2}{\|u\|^4}(u_iu_j)_{i,j\leq 4}.$$

On se place en un point $x\in S^4$ et on pose $\sigma_N(x)=u=(u_1,u_2,u_3,u_4)$, $v=\sigma_S(x)$. On suppose que $x=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ est dans le plan $(x_1,x_5)$, c'est à dire $x_2=x_3=x_4=0$, ce qui implique $u_2=u_3=u_4=0$ ; On pose $u=u_1$.

$$M(u)=\frac{1}{u^2}.\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

En faisant le produit de matrices $M(u).J_{abc}(u)=J_{a'b'c'}(v).M(u)$, issue de la relation (*) ci-dessus, on obtient

$$\begin{pmatrix}0&a&b&c\\a&0&-c&b\\b&c&0&-a\\c&-b&a&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-a'&-b'&-c'\\-a'&0&-c'&b'\\-b'&c'&0&-a'\\-c'&-b'&a'&0\end{pmatrix}.$$

De cette identité matricielle, on déduit $a=-a'=a'$,... d'où $a=0$, $b=0$, $c=0$, ce qui est impossible puisque $a^2+b^2+c^2=1$.

En conclusion ceci montre qu'il n'existe aucune structure presque complexe intégrable compatible avec la métrique usuelle sur $S^4$ en entier.

# CHAPITRE 6

# CALCUL DU CROCHET $[\hat{\theta}, \hat{\theta}']$

## 6.1. Crochets élémentaires

Pour calculer des différentielles de formes différentielles dans $\tau(M)$, il est nécessaire de calculer de tels crochets. On considère ici des champs verticaux sur $\tau(M)$ qui s'écrivent dans un repère local R sous la forme $(x, X) \to [X, A(x)]$ ou $A(x) \in so(2n)$. D'abord, on établit le lemme suivant :

***Lemme 6.1.1***. — *Si $A$ et $B$ sont des matrices de $so(2n, \mathbf{R})$ ($A$ et $B$ peuvent dépendre de $x$, mais pas de $X$)*

$$[[X, A]^\bullet, [X, B]^\bullet] = [X, [A, B]]^\bullet.$$

On se fixe le repère local $R$ sur un ouvert $U$ suffisamment petit pour que des coordonnées locales $(x_1, ..., x_{2n})$ existent. Posons $K = [X, A]^\bullet = \sum_{rs}[X, A]_{rs}\frac{\partial}{\partial X_{rs}}$ et $L = [X, B]^\bullet = \sum_{rs}[X, B]_{rs}\frac{\partial}{\partial X_{rs}}$ . Le crochet $[K, L]$ est à calculer dans $\tau(M)$, qui localement via $\psi_R$ est difféomorphe à $U \times Z_+(n)$. On peut alors écrire localement

$$[K, L] = \sum_k \alpha_k(x, X)\frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{r,s} \beta_{rs}(x, X)\frac{\partial}{\partial X_{rs}}.$$

On note

$$p_k : U \times Z_+(n) \to \mathbf{R} : (x, X) \to x_k$$
$$q_{rs} : U \times Z_+(n) \to \mathbf{R} : (x, X) \to X_{rs}.$$

$\alpha_k(x, X) = K(L(p_k)) - L(K(p_k)) = 0$ car $L(p_k) = 0$ et $K(p_k) = 0$.
$\beta_{rs}(x, X) = K(L(q_{rs})) - L(K(q_{rs}))$ . Comme $L(q_{rs}) = [X, A]_{rs}$ et $K(q_{rs}) = [X, B]_{rs}$ on

en déduit

$$\begin{aligned}
\beta_{rs}(x,X) &= K([X,B]_{rs}) - L([X,A]_{rs}) \\
&= \sum_{k,l}[X,A]_{k,l}\frac{\partial}{\partial X_{kl}}([X,B]_{rs}) - \sum_{k,l}[X,B]_{k,l}\frac{\partial}{\partial X_{kl}}([X,A]_{rs}) \\
&= \sum_{k,l}[X,A]_{k,l}\frac{\partial}{\partial X_{kl}}\sum_t(X_{rt}B_{ts} - B_{rt}X_{ts}) - \sum_{k,l}[X,B]_{k,l}\frac{\partial}{\partial X_{kl}}(\sum_t(X_{rt}A_{ts} - A_{rt}X_{ts}) \\
&= \sum_{k,l,t}[X,A]_{k,l}\frac{\partial}{\partial X_{kl}}(X_{rt}B_{ts}) \qquad (a) \\
&\quad -\sum_{k,l,t}[X,A]_{k,l}\frac{\partial}{\partial X_{kl}}(B_{rt}X_{ts}) \qquad (b) \\
&\quad -\sum_{k,l,t}[X,B]_{k,l}\frac{\partial}{\partial X_{kl}}(X_{rt}A_{ts}) \qquad (c) \\
&\quad +\sum_{k,l,t}[X,B]_{k,l}\frac{\partial}{\partial X_{kl}}(A_{rt}X_{ts}) \qquad (d)
\end{aligned}$$

Ces sommes se simplifient : $\beta_{rs}(x,X)$=(a)+(b)+(c)+(d) et
pour (a) :$k=r$ et $l=t$ soit (a)=$\sum_l [X,A]_{rl}B_{ls}$
pour (b) :$k=t$ et $l=s$ soit (b)=$-\sum_k [X,A]_{ks}B_{rk}$
pour (c) :$k=r$ et $l=t$ soit (c)=$-\sum_l [X,B]_{rl}A_{ls}$
pour (d) :$k=t$ et $l=s$ soit (d)=$+\sum_k [X,B]_{ks}A_{rk}$, d'ou :
$\beta_{rs}(x,X) = ([X,A]B - B[X,A] - [X,B]A + A[X,B])_{rs} = ((XA-AX)B - B(XA-AX) - (XB-BX)A + A(XB-BX))_{rs} = [X,[A,B]]_{rs}$.

***Remarque 6.1.2***. — Dans les différentielles partielles, il est primordial que $A$ et $B$ ne dépendent pas de $X$, mais peuvent être fonction de $x$, ce qui sera en général le cas dans les applications suivantes, pour lesquelles $A$ et $B$ sont du type $\tilde{\eta}(x,\theta(x))$ où $\theta$ est un champ défini localement sur $M$.

## 6.2. Crochet de deux relèvements horizontaux

On peut calculer des crochets de champs de la forme $f\theta + h[X,A]^\bullet$ dans l'espace twistoriel $\tau(M)$, où $f$ et $h$ sont des fonctions de $x$ et $X$. Soient $\theta$ et $\theta'$ deux champs de vecteurs sur $M$, définis localement dans un voisinage $U$ d'un point $x$. On peut considérer les deux champs $\hat{\theta}$ et $\hat{\theta}'$ , définis localement sur $\pi_\tau^{-1}(U)$, par l'étude précédente. Calculons $[\hat{\theta},\hat{\theta}']$

$$\begin{aligned}
[\hat{\theta},\hat{\theta}'] &= [\theta + [X,\tilde{\eta}(\theta)]^\bullet, \theta' + [X,\tilde{\eta}(\theta')]^\bullet] \\
&= [\theta,\theta'] + [X,[\tilde{\eta}(\theta),\tilde{\eta}(\theta')]]^\bullet + [\theta,[X,\eta(\theta')]^\bullet] - [\theta',[X,\eta(\theta)]^\bullet].
\end{aligned}$$

(lemme précédent pour le deuxième terme de cette dernière somme). On a de plus :

***Lemme 6.2.1***. — a.— $[\tilde{\eta}(\theta),\tilde{\eta}(\theta'] = \tilde{\eta}\wedge\tilde{\eta}(\theta,\theta')$.

b.— $[\theta,[X,\tilde\eta(\theta')]^\bullet] = [X,\theta(\tilde\eta(\theta'))]^\bullet$, *en supposant que $\theta$ est un champ simple, c'est à dire que dans son expression en coordonnées locales, les coefficients dépendent de $x$ mais pas de $X$.*

*Démonstration.* — a.— Résulte de la définition des crochets de matrices et de celle du produit extérieur de formes. Il faut remarquer qu'il s'agit ici de calculs dans so(2n), et non de calculs sur des champs de vecteurs.

b.— Il faut comprendre $\theta(\tilde\eta(\theta'))$ comme la matrice $(\theta(\tilde\eta_{ij}(\theta')))_{ij}$ où $\tilde\eta_{ij}(\theta'))$ est une fonction de $x$, $\eta_{ij}(x;.) : T_xM \to \mathbf{R}$. Le calcul peut se faire en appliquant une fonction $f(x,X)$ à $[\theta,[X,\tilde\eta(\theta')]^\bullet]$ comme suit, en posant $A = A(x) = \tilde\eta(x;\theta'(x))$

$$\begin{aligned}
[\theta,[X,\tilde\eta(x;\theta'(x))]^\bullet](f) &= \theta([X,A]^\bullet f) - [X,A]^\bullet(\theta(f))\\
&= \sum_{kl}\theta([X,A]_{kl}\frac{\partial f}{\partial X_{kl}}) - \sum_{kl}[X,A]_{kl}\frac{\partial}{\partial X_{kl}}(\theta(f)).
\end{aligned}$$

Notons que $\theta([X,A]_{kl} = \theta(\sum_j X_{kj}A_{jl})$ ; $\theta(X_{kj}) = 0$ car $\theta$ est un champ sur $M$. D'où $\theta([X,A]_{kl} = \sum_j X_{kj}\theta(A_{jl})$. En définissant la matrice $\theta(A)$ , comme la matrice de fonctions $(\theta(A))_{ij} = \theta(A_{ij)}$, on trouve $\theta([X,A]_{kl} = [X,\theta(A)]_{kl}$. Pour finir $\theta(\frac{\partial f}{\partial X_{kl}}) = \frac{\partial}{\partial X_{kl}}(\theta(f))$ , d'ou l'identité en b.

□

Utilisons la formule donnant la différentielle d'une 1-forme, appliquée à $\tilde\eta$ : $d\tilde\eta(\theta,\theta') + \tilde\eta([\theta,\theta']) = \theta(\tilde\eta(\theta')) - \theta'(\tilde\eta(\theta))$ En utilisant d'autre part les propriétés a- et b- ci-dessus et la proposition 4.2.5, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
[\hat\theta,\hat\theta'] &= [\theta,\theta'] + [X,\tilde\eta\wedge\tilde\eta(\theta,\theta')]^\bullet + [X,\theta(\tilde\eta(\theta'))]^\bullet - [X,\theta'(\tilde\eta(\theta))]^\bullet\\
&= [\theta,\theta'] + [X,\tilde\eta\wedge\tilde\eta(\theta,\theta')]^\bullet + [X,d\tilde\eta(\theta,\theta') + \tilde\eta([\theta,\theta'])]^\bullet.
\end{aligned}$$

Appliquons la formule du relèvement horizontal à $[\theta,\theta']$

$$\widehat{[\theta,\theta']} = [\theta,\theta'] + [X,\tilde\eta([\theta,\theta'])]^\bullet.$$

En conclusion

***Proposition 6.2.2.*** — *Lorsque $\theta$ et $\theta'$ sont des champs sur $M$, sans dépendance par rapport à $X$ (c'est à dire que dans l'expression en coordonnées locales, les coefficients ne dépendent que de $x$ (pas de $X$), alors :*

$$[\hat\theta,\hat\theta'] = \widehat{[\theta,\theta']} + [X,\widetilde\Omega(\theta,\theta')]^\bullet$$

*On peut consulter la définition 3.4.1 pour se rappeler la définition de $\widetilde\Omega$*

# CHAPITRE 7

# RELATION ENTRE L'OPÉRATEUR DE COURBURE $R$ ET $d\omega$

On reprend la précédente notation $\hat{g}$ pour désigner le produit scalaire sur $\wedge^2 TM$ induit par $g$. On fait de cette manière un léger abus de langage, pour être rigoureux on devrait dire $\hat{g} = (\hat{g}_x)_{x\in M}$ où $\hat{g}_x : \wedge^2 T_xM \times \wedge^2 T_xM \to \mathbf{R}$ où $\hat{g}_x$ $(\hat{g}(X \wedge Y, Z \wedge T) = g(X,Z)g(Y,T) - g(X,T)g(Z,Y)$ $(X,Y,Z,T \in T_xM)$. De plus, on note $so(TM)$ le $\mathbf{R}$-espace des endomorphismes anti-symétriques de $(M,g)$.

## 7.1. Isomorphisme entre $so(TM)$ et $\Lambda^2 TM$

On considère l'application $\Phi : so(TM) \to \wedge^2 TM$ définie par la propriété suivante : $\hat{g}(\Phi(u), X \wedge Y) = g(u(X), Y)$. Le fait que $u$ soit anti-symétrique, implique que $f$ : $(X,Y) \to g(u(X),Y)$ se factorise via $\wedge^2 E$ en $\tilde{f}$, qui est donc une forme linéaire sur $\wedge^2 E$. Comme $\hat{g}$ est non dégénérée, on conclut à l'existence (et l'unicité) de $\Phi(u)$ telle que $\tilde{f}(X \wedge Y) = g(u(X),Y) = \hat{g}(\Phi(u), X \wedge Y)$ ; cette dernière est visiblement injective. La dimension des deux espaces étant la même, $n(2n-1)$ si $dimM = 2n$, $\Phi$ est un isomorphisme.

## 7.2. Relation entre les vecteurs tangents verticaux et $so(T_xM)$

On se place dans le cadre habituel où $M$ est une variété riemannienne orientée de dimension paire, et on considère l'espace twistoriel correspondant $\tau(M)$. On fixe un repère local $R$ au voisinage de $x \in M$, $R(x) = (x; \theta_1(x), ..., \theta_{2n}(x))$. Un vecteur tangent vertical en $a \in \tau(M)$ tel que $\pi(a) = x$, s'écrit sous la forme $[a,u] = a \circ u - u \circ a$ ou $u \in so(T_xM)$. Dans la suite on note $(x,X) = \psi_R(a)$, qui représente $a$ dans $R$. $X$ est donc la matrice de $a$ dans le repère $R(x)$. Si on note $A = Mat(u, R(x))$, la matrice $[a,u]$ dans $R$ est $[X,A]$, qui est un crochet de matrices. On définit ci-dessous $\Lambda(\theta \wedge \theta')$ pour $\theta$ et $\theta'$ dans $T_xM$.

***Définition 7.2.1***. — C'est le vecteur vertical en $a$ à $\tau(M)$, défini par :

$$\Lambda(\theta \wedge \theta')(a) = [a, \Phi^{-1}(\theta \wedge \theta')] \overbrace{\equiv}^{\psi_R} [X, Mat(\Phi^{-1}(\theta \wedge \theta'), R(x))].$$

***Lemme 7.2.2***. — *Soit $R(x) = (x; \theta_1, ..., \theta_{2n})$ un repère orthonormé direct ($\in P_{SO}(M)$). Soit $a \in \pi_\tau^{-1}(x)$ ; on note $X = Mat(a; R(x))$. Soit $U$ un vecteur vertical en $a$ représenté par sa matrice (notée $U$ aussi) dans $R(x)$ ; on a* a.—

$$\mathbb{G}(\Lambda(\theta_i \wedge \theta_j), \mathbb{J}U) = \omega(\Lambda(\theta_i \wedge \theta_j), U) = 2U_{ij}$$

b.—

$$\mathbb{G}(\Lambda(a(\theta_i) \wedge a(\theta_j)), \mathbb{J}U) = \omega(\Lambda(a\theta_i \wedge a\theta_j), U) = -2U_{ij}.$$

*Démonstration.* — a.— Les indices $i$ et $j$ étant fixés, tels que $i < j$, on pose $E = \Phi^{-1}(\theta_i \wedge \theta_j)$. On a par définition de $\mathbb{J}$ sur les éléments verticaux, $\mathbb{J}U = XU$ (produit de matrices) et $\mathbb{G}(\Lambda(\theta_i \wedge \theta_j), \mathbb{J}(U)) = -\frac{1}{2}Tr([X, E]XU) = -\frac{1}{2}Tr(XEXU - EXXU)$. En utilisant la propriété de la trace, $Tr(MN) = Tr(NM)$, $X^2 = -Id$ et $UX+XU = 0$,(propriété des vecteurs verticaux en $a$) on obtient $\mathbb{G}(\Lambda(\theta_i \wedge \theta_j), \mathbb{J}(U)) = -Tr(EU)$. $Tr(EU) = \sum_{k,l} E_{lk}U_{kl} = 2\sum_{k<l} E_{lk}U_{kl}$. Pour $k < l$ et $i < j$ , $\hat{g}(\Phi(E), \theta_k \wedge \theta_l) = \hat{g}(\theta_i \wedge \theta_j, \theta_k \wedge \theta_l) = \delta_{ki}.\delta_{jl} = g(E\theta_k, \theta_l) = E_{lk}$. On déduit que $Tr(EU) = 2U_{ji} = -2U_{ij}$. Finalement, on obtient le résultat, pour tous i et j , pas nécessairement ordonnés, car $U$ est anti-symétrique.

b.— $a(\theta_i) = \sum_k X_{ki}\theta_k$ . $\mathbb{G}(\Lambda(a(\theta_i) \wedge a(\theta_j)), \mathbb{J}U) = \sum_{k,h} X_{ki}X_{hj}\mathbb{G}(\Lambda(\theta_k \wedge \theta_h), \mathbb{J}U)$. En utilisant la proposition précédente, $\mathbb{G}(\Lambda(a(\theta_i) \wedge a(\theta_j)), \mathbb{J}U) = 2\sum_{k,h} X_{ki}X_{hj}U_{kh} = -2U_{ij}$. Notons que $XUX = U$ car $UX + XU = 0$ et $X^2 = -Id$.

□

### 7.3. Relation entre l'opérateur de courbure $R$ et $d\omega$

On sait que $R(\theta_i, \theta_j) : T_xM \to T_xM$ est un endomorphisme anti-symétrique. On peut alors considérer $\Phi(R(\theta_i, \theta_j)) \in \wedge^2$. Par définition de $\Phi$, $\hat{g}(\Phi(R(\theta_i, \theta_j), \theta_k \wedge \theta_l) = g(R(\theta_i, \theta_j)\theta_k, \theta_l)$. Si on désigne par $\hat{R}$ l'endomorphisme symétrique de $\wedge^2 T_xM$, associé à R on a aussi $g(R(\theta_i, \theta_j)\theta_k, \theta_l) = \hat{g}(\hat{R}(\theta_i \wedge \theta_j), \theta_k \wedge \theta_l)$ , soit finalement

***Proposition 7.3.1.*** — $\Phi(R(\theta_i, \theta_j)) = \hat{R}(\theta_i \wedge \theta_j)(\in \wedge^2)$

On donne ici une autre expression de la formule de **[B-N]**, donnant $d\omega$, qui est une 3-forme sur $\tau(M)$ . Dans ce même article , il est montré que d$\omega$ n'est non nulle que lorsqu'elle est appliquée à deux vecteurs horizontaux et un vecteur vertical, toutes les autres configurations sont donc nulles : Pour des vecteurs horizontaux $H$ et $H_i$, et des vecteurs verticaux $V_j$ :

1. $d\omega(H_1, H_2, H_3) = 0$
2. $d\omega(V_1, V_2, H) = 0$
3. $d\omega(V_1, V_2, V_3) = 0$.

En supposant que $\mathbb{J}$ est intégrable la condition NS pour que $\tau(M)$ soit kählérienne est que $d\omega(\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j, U) = 0$, pour tous i et j et tout U vecteur vertical.

***Théorème 7.3.2.*** —

$$d\omega(\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j, U) = \omega(\Lambda((\frac{1}{2}Id - \hat{R})\theta_i \wedge \theta_j), U) = \mathbb{G}(\Lambda((\frac{1}{2}Id - \hat{R})\theta_i \wedge \theta_j), \mathbb{J}U).$$

*Démonstration.* — Comme d'habitude, on fixe un repère local $R$. On utilise la définition globale donnant d$\omega$, au point a de $\tau(M)$, de coordonnées $(x, X)$ dans $R$ :
$d\omega(\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j, U) = \hat{\theta}_i(\omega(\hat{\theta}_j, U)) - \hat{\theta}_j(\omega(\hat{\theta}_i, U)) + U(\omega(\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j)) - \omega([\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j], U)) + \omega([\hat{\theta}_i, U], \hat{\theta}_j) - \omega([\hat{\theta}_j, U], \hat{\theta}_i)$.

Mais, $\omega(\hat{\theta}_j, U) = \mathbb{G}(\hat{\theta}_j, \mathbb{J}U)= 0$ car $\hat{\theta}_j$ est horizontal et $\mathbb{J}U$ est vertical (comme U). De même $\omega(\hat{\theta}_i, U) = \mathbb{G}(\hat{\theta}_i, \mathbb{J}U)= 0$. De plus comme il existe A$\in$ so(2n) telle que U$=[X, A]^\bullet$, $[\hat{\theta}_i, U] = [\theta_i + [X, \tilde{\eta}(\theta_i)]^\bullet, [X, A]^\bullet]$. $[\theta_i, [X, A]^\bullet]$=0 . On déduit que $[\hat{\theta}_i, U] = [X, [\tilde{\eta}(\theta_i), A]]^\bullet$ est un vecteur vertical. Donc $\omega([\hat{\theta}_i, U], \hat{\theta}_j)$=0. De même $\omega([\hat{\theta}_j, U], \hat{\theta}_i)$=0.
L'expression donnant $d\omega$ se réduit alors à : $d\omega(\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j, U) = U(\omega(\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j)) - \omega([\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j], U))$.
Pour terminer, calculons les deux termes de cette somme, en utilisant les propositions antérieures :
$\bullet\omega(\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j) = \mathbb{G}(\hat{\theta}_i, \mathbb{J}(\hat{\theta}_j)) = \mathbb{G}(\hat{\theta}_i, (\widehat{a\theta_j})) = g(\theta_i, a\theta_j) = X_{ij}$. D'où $U(\omega(\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j)) = U(X_{ij}) = U_{ij} = \frac{1}{2}\mathbb{G}(\Lambda(\theta_i \wedge \theta_j), \mathbb{J}U)$.
$\bullet\omega([\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j], U)) = \omega(\widehat{[\theta_i, \theta_j]} + [X, \widetilde{\Omega}(\theta_i, \theta_j)]^\bullet, U))$.

Comme $\widehat{[\theta_i, \theta_j]}$ est horizontal , il est orthogonal à $U$ (et à $\mathbb{J}U$) . Donc $\omega(\widehat{[\theta_i, \theta_j]}, U) = 0$. Il reste donc le terme $\omega([X, \widetilde{\Omega}(\theta_i, \theta_j)]^\bullet, U) = \mathbb{G}(\Lambda(\hat{R}(\theta_i \wedge \theta_j)), \mathbb{J}U)$. En réunissant ces deux calculs, on obtient le résultat. $\square$

# CHAPITRE 8

# INTÉGRABILITÉ DE $\mathbb{J}$

## 8.1. Opérateur de Hodge

D'une manière générale, si $M$ est variété riemannienne orientée de dimension $n$, pour tout $0 \leq p \leq n$ l'opérateur de Hodge, noté $\star$, est un opérateur linéaire de $\wedge^p TM$ dans $\wedge^{n-p}TM$ que l'on peut définir comme suit :
•En chaque point $x \in M$, si $e_1, ..., e_n$ est une base orthonormale directe de $T_xM$,on sait que $e_1 \wedge ... \wedge e_n$ est indépendante de la base choisie car si $e_1^{'}, ..., e_n^{'}$ est une autre base du même type :
$e_1^{'} \wedge ... \wedge e_n^{\prime} = det()e_1 \wedge ... \wedge e_n$ où det()=déterminant du changement de base=1. On posera $\omega_{g_x} = e_1 \wedge ... \wedge e_n$ qui est donc intrinsèque (ne dépend pas de la base choisie).
•Pour $x \in M$, et $\alpha \in \wedge^p T_xM$ on considère la forme linéaire $\wedge^{n-p}T_xM \to \mathbf{R} : \beta \to \lambda(\beta)$ où $\lambda$ est le scalaire défini par : $\alpha \wedge \beta = \lambda \omega_{gx}$.
La métrique $g$ étant non dégénérée sur $\wedge^{n-p}T_xM$, il existe un seul élément, noté $\star\alpha$, dans $\wedge^{n-p}T_xM$, et telle que pour tout $\beta \in \wedge^{n-p}T_xM$ :

$$\alpha \wedge \beta = g(\star\alpha, \beta)\omega_{gx}.(1)$$

Si on se donne une base orthonormée $e_1, ..., e_n$ de $TM$, compatible avec l'orientation, si de plus $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_p \leq n$ alors on vérifie que :
$\star(e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_p}) = e_{j_1} \wedge ... \wedge e_{j_{n-p}}$ pour tout multi-indice $j_1, j_2, ..., j_{n-p}$ tel que $e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_p} \wedge e_{j_1} \wedge ... \wedge e_{j_{n-p}} = e_1 \wedge ... \wedge e_n$. Il suffit de vérifier que ce terme vérifie l'identité (1) ci-dessus.

## 8.2. $\sigma_a$ et $\mu_a$

***Définition 8.2.1.*** — Soit $a \in \pi^{-1}(x)$. On définit $\sigma_a$ et $\mu_a$ :$\wedge^2 TM \to \wedge^2 TM$ par :

$$\sigma_a(X \wedge Y) = a(X) \wedge Y + X \wedge a(Y)$$

$$\mu_a(X \wedge Y) = a(X) \wedge a(Y) - X \wedge Y$$

.

On vérifie que $\sigma_a^2 = 2\mu_a$, que $\sigma_a$ est $\hat{g}$-antisymétrique, et que $\mu_a$ est $\hat{g}$-symétrique.

## 8.3. cas particulier n=4

**8.3.1. $W_+$ et $W_-$.** — Dans ce cas on vérifie que $\star^2 = Id_{\wedge^2 TM}$. On en déduit une décomposition $\wedge^2 TM = \wedge_+^2 \oplus \wedge_-^2$, correspondant aux deux sous-espaces propres liés aux valeurs propres +1 et -1. On note $p_+$ et $p_-$ les deux propections associées. On pose alors $W_+ = W \circ p_+$ et $W_- = W \circ p_-$. On a la décomposition de l'opérateur de Weyl :

$$W = W_+ + W_-.$$

On vérifie (et on admet ici) que E étant un espace vectoriel enclidien de dimension 4, si on considère l'ensemble $End_{sym}(\wedge^2(E))$ des endomorphismes symétriques, on a la décomposition orthogonale :

$$End_{sym}(\wedge^2(E)) = \mathbf{R}\star \oplus \mathbf{R}Id \oplus \mathcal{Z} \oplus \mathcal{W}.$$

On peut sur ces sujets consulter par exemple [**B**]. Cette identité est la conséquence du fait que $Trace(\star \circ \hat{R})$=0 pour tout $R$ tenseur vérifiant les 4 conditions a,b,c,d décrites au début du document et d'un argument de dimension. (les deux espaces à gauche et à droite sont de même dimension 21).
On déduit que $Tr(W) = 0$ (orthogonalité de $W$ avec $Id_{\wedge^2 TM}$)et $Tr(\star \circ W) = 0$ (orthogonalité de $W$ avec $\star$).
On montre de plus que $\forall \varphi \in \mathcal{W}$, $\varphi \circ \star = \star \circ \varphi$, ce qui entraine en particulier que $W \circ \star = \star \circ W$. Il résulte de cette propriété et de la définition de $W_+$ et $W_-$ que :
$\star \circ W = \star \circ W_+ + \star \circ W_- = W_+ - W_-$, soit : $W_+ = \frac{1}{2}(W + \star \circ W)$, $W_+ = \frac{1}{2}(W - \star \circ W)$.
De ce qui précède, on déduit $Tr(W) = Tr(W_+) = Tr(W_-) = 0$.

**8.3.2. Anti-autodualité.** —

***Définition 8.3.1.*** — En dimension 4, la métrique $g$ de $M$ est dite anti-autoduale(AAD) (respectivement autoduale) si $W_+$=0 (respectivement $W_-$=0).

Par exemple les espaces $(M, g)$ à courbure nulles (cas de $\mathbf{R}^4$ ou $T^4 = \frac{\mathbf{R}^4}{\mathbb{Z}^4}$ munis des métriques naturelles ) ont des métriques AAD, puisque $R = 0$. Les surfaces $K^3$ munies d'une métrique Ricci-plate (qui existe) aussi, par le théorème de Calabi-Yau. Dans ce dernier cas, $\hat{R} = W_-$.

**8.3.3. $\wedge_{+x}$ et $\wedge_{-x}$.** — On se place dans $(\tau(M, g), \pi, M)$. En considérant $u \in \pi^{-1}(x) = \{u \in SO(T_xM), u^2 = -Id, u >> 0\}$, il existe une $\mathbf{C}$-base $e_1, e_2$ de $T_xM$ telle que $e_1, u(e_1), e_2, u(e_2)$ soit une $\mathbf{R}$ base g-orthonormale directe de $T_xM$. On a alors $\Phi(u) = e_1 \wedge u(e_1) + e_2 \wedge u(e_2)$(voir en 7.1 la définition de $\Phi$) et comme $u >> 0$, $*e_1 \wedge u(e_1) = e_2 \wedge u(e_2)$ d'où $*\Phi(u) = \Phi(u)$, donc $\Phi(\pi^{-1}(x)) \subseteq \wedge_{+x}$ (abrégé de $\wedge_+^2 T_xM$) . De plus $\hat{g}(\Phi(u), \Phi(u)) = \hat{g}(e_1 \wedge u(e_1) + e_2 \wedge u(e_2), e_1 \wedge u(e_1) + e_2 \wedge u(e_2)) = 2$, d'où $\Phi(\pi^{-1}(x)) \subseteq S_{\sqrt{2}}(\wedge_{+x})$ (sphère de rayon $\sqrt{2}$ de $\wedge_{+x}$). D'une manière analogue au fibré $(\tau(M), \pi, M)$ on peut considérer le fibré $(\tau'(M), \pi', M)$ où au lieu de considérer les endomorphismes $>> 0$, on considère les endomorphismes $<< 0$.

***Proposition 8.3.2.*** — *On a*

1. *si* $u \in SO(T_xM)$, *tel que* $u^2$=-$Id$ , *alors* $u >> 0 \Leftrightarrow *\Phi(u) = \Phi(u)$.
2. *On a* $\Phi(\pi^{-1}(x)) = S_{\sqrt{2}}(\wedge_{+x})$. *De même on a* $\Phi(\pi'^{-1}(x)) = S_{\sqrt{2}}(\wedge_{-x})$.
3. *Si* $u_1$ *et* $u_2 \in so(T_xM)$*(endomorphismes anti-symétriques) tels que* $\Phi(u_1) \in \wedge_{+x}$ *et* $\Phi(u_2) \in \wedge_{-x}$ *alors* $[u_1, u_2] = 0 (= u_1 \circ u_2 - u_2 \circ u_1)$.

*Démonstration.* — 1. On a déja montré l'implication $\Rightarrow$. À l'inverse, si $*\Phi(u) = \Phi(u)$, en utilisant une base $g$-orthonormale comme ci dessus $e_1, u(e_1), e_2, u(e_2)$, $\Phi(u) = e_1 \wedge u(e_1) + e_2 \wedge u(e_2)$ , $*e_1 \wedge u(e_1) = \epsilon e_2 \wedge u(e_2)$ avec $\epsilon$=+ ou -1 selon que cette base est directe ou non. Comme $*^2 = Id$, on déduit $*\Phi(u) = \epsilon\Phi(u) = \Phi(u)$ ; donc $\epsilon$=1, donc la base est directe et u>>0.

2. On prend $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ une base orthonormale directe de $T_xM$. Alors $X_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1 \wedge \theta_2 + \theta_3 \wedge \theta_4)$, $X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1 \wedge \theta_3 - \theta_2 \wedge \theta_4)$, $X_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1 \wedge \theta_4 + \theta_2 \wedge \theta_3)$, forment une base orthonormale de $\wedge_+$. De plus $X_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi(u_i)$ i=1,2,3 les endomorphismes $u_i$ vérifiant les relations quaternioniques $u_i^2 = -Id$, $u_1u_2 = -u_2u_1 = u_3$.($u_1, u_2$ et $u_3$ ont pour matrices $I, J, K$ indiquées au début du document, dans la base $\{\theta_i\}$) . Si $\xi \in S_{\sqrt{2}}(\wedge_{+x})$, $\xi = aX_1 + bX_2 + cX_3$ , $a, b, c \in \mathbf{R}$ et $a^2 + b^2 + c^2 = 2$, soit $(\frac{a}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{b}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{c}{\sqrt{2}})^2 = 1$ ; d'où $\xi = \Phi(\frac{au_1+bu_2+cu_3}{\sqrt{2}})$ et $(\frac{(au_1+bu_2+cu_3}{\sqrt{2}})^2$=-Id. On vérifie que $\frac{au_1+bu_2+cu_3}{\sqrt{2}} \in SO(T_xM)$, car $det(au_1 + bu_2 + cu_3) = (a^2 + b^2 + c^2)^2 = 4$ et la matrice considérée est anti-symétrique . Comme $\xi \in \wedge_+$ par hypothèse, en utilisant 1-, on obtient $\frac{au_1+bu_2+cu_3}{\sqrt{2}} >> 0$ d'où le résultat.

3. On peut toujours supposer $u_1 \neq 0$ et $u_2 \neq 0$, que $||\Phi(u_1)|| = \sqrt{2}$ et $||\Phi(u_2|| = \sqrt{2}$, auquel cas, d'après 2-, $u_1 \in SO(T_xM)$ (groupe spécial orthogonal), $u_1^2 = -Id$, $u_1 >> 0$. De même, $u_2 \in SO(T_xM)$(groupe spécial orthogonal), $u_2^2 = -Id$, $u_2 << 0$. En utilisant les notations des quaternions, il existe $p, q \in H$ (imaginaires purs) tels que $u_1(x) = p.x$ et $u_2(x) = x.q$, d'où $u_1 \circ u_2(x) = p.x.q = u_2 \circ u_1(x)$, soit $[u_1, u_2] = 0$. □

### 8.3.4. Propriétés liées à $\sigma_a$ et $\mu_a$ en dimension 4.

— Soit $a \in \pi^{-1}(x)$. On a défini précédemment de manière générale (sans restriction de dimension) $\sigma_a$ et $\mu_a$ deux endomorphismes de $\Lambda^2 T_xM$,

***Proposition 8.3.3.*** — *On a, en dimension 4*

1. $Im\sigma_a$ *et* $Im\mu_a$ *sont inclus dans* $\wedge_{+x}$.
2. $X \wedge Y + a(X) \wedge a(Y) \in \wedge_{-x} \oplus (\Phi(a))$ *où* $(\Phi(a))$ *est le sous-espace de dimension 1 de* $\wedge_{+x}$ *engendré par* $\Phi(a)$. *De même* $X \wedge a(Y) - a(X) \wedge (Y) \in \wedge_{-x} \oplus (\Phi(a))$.

*Démonstration.* — 1. Soit $\mathcal{B} = (\theta_1, ..., \theta_4)$ une base orthonormée directe de $T_xM$. On peut faire une démonstration directe en prenant successivement $a$ tel que $Mat(a, \mathcal{B}) = I$, $Mat(a, \mathcal{B}) = J$, $Mat(a, \mathcal{B}) = K$, où $I, J, K$ sont les matrices décrites au début de la thèse, en vérifiant la propriété dans chaque cas, puis en écrivant que tout endomorphisme $a$ de la fibre en $x$ est une combinaison linéaire de $I$, $J$ et$K$. La démonstration proposée ici est plus intrinsèque. Un élément de $\wedge^2 T_xM$ peut toujours s'écrire : $\xi = \sum_{i,j} u_{ij}\theta_i \wedge \theta_j$ où $U = (u_{ij})$ est une matrice anti-symétrique. On a alors $\sigma_a(\xi) = \sum_{i,j} u_{ij}(a(\theta_i) \wedge \theta_j + \theta_i \wedge a(\theta_j))$. On écrit $a(\theta_i) = \sum_k X_{ki}\theta_k$ , d'où

$$\begin{aligned}\sigma_a(\xi) &= \sum_{i,j,k} u_{ij}X_{ki}\theta_k \wedge \theta_j + \sum_{i,j,k} u_{ij}X_{kj}\theta_i \wedge \theta_k \\ &= \sum_{k,j}(XU)_{kj}\theta_k \wedge \theta_j - \sum_{i,j,k}(UX)_{ik}\theta_i \wedge \theta_k.\end{aligned}$$

En permutant $k$ et $i$ dans la dernière somme puis en changeant $i$ en $j$, on obtient : $\sigma_a(\xi) = \sum_{k,j}[X,U]_{kj}\theta_k \wedge \theta_j$. De plus $\Phi : so(T_xM) \to \wedge^2 T_xM$ est linéaire, et $\Phi(\pi^{-1}(x)) \subseteq \wedge_{+x}$ d'après la proposition précédente, qui est un espace vectoriel. La différentielle de $\Phi$ en $a$ envoie donc l'espace tangent en $a$ à la fibre dans $\wedge_{+x}$. L'endomorphisme $v$, dont la matrice est $[X,U]$ dans la base $\{\theta_i\}$ est dans cet espace tangent (v antisymétrique et $v \circ a + a \circ v$=0), donc $\Phi(v) \in \wedge_{+x}$ et $\sigma_a(\xi) = -2\Phi(v)$.

2. On peut supposer que $X = e_1$, premier élément d'une base orthonormée directe $e_1, a(e_1), e_2, a(e_2)$. Alors $Y = \alpha e_1 + \beta a(e_1) + \gamma e_2 + \delta a(e_2)$ et

$$\begin{aligned}&X \wedge Y + a(X) \wedge a(Y) = e_1 \wedge Y + a(e_1) \wedge a(Y) \\ &= e_1 \wedge (\beta a(e_1) + \gamma e_2 + \delta a(e_2)) + a(e_1) \wedge (-\beta e_1 + \gamma a(e_2) - \delta e_2) \\ &= 2\beta(e_1 \wedge a(e_1)) + \gamma(e_1 \wedge e_2 + a(e_1) \wedge a(e_2)) + \delta(e_1 \wedge a(e_2) - a(e_1) \wedge e_2).\end{aligned}$$

Pour finir, $a(e_1) \wedge a(e_2) + e_1 \wedge e_2 \in \wedge_{-x}$, $e_1 \wedge a(e_1) = \frac{1}{2}((e_1 \wedge a(e_1) + e_2 \wedge a(e_2) + (e_1 \wedge a(e_1) - e_2 \wedge a(e_2)) \in (\Phi(a)) \oplus \wedge_{-x}$ (($\Phi(a)$) désigne le sous espace de dimension 1 engendré par $\Phi(a)$) et $(e_1 \wedge a(e_2) - a(e_1) \wedge e_2) \in \wedge_{-x}$. L'autre démonstration peut s'obtenir en remplacant $Y$ par $a(Y)$.

□

## 8.4. CNS

***Théorème 8.4.1.*** — *L'intégrabilité de $\mathbb{J}$ sur $\tau(M,g)$ équivaut à*

1. $\dim M = 4$, *la métrique $g$ de $M$ est AAD.*
2. $\dim M > 4$, *$W$=0 (g est conformément plate).*

*Démonstration.* — Le principe de la démonstration consiste à montrer à quelle condition le tenseur de Nijenhuis $N_{\mathbb{J}}$ est nul. On calcule ce tenseur sur les types de vecteurs horizontaux et verticaux. On s'apercoit que la seule obstruction éventuelle à sa nullité est le calcul de $N_{\mathbb{J}}(\hat{\theta}, \hat{\theta}')$ où $\theta$ et $\theta'$ sont dans $TM$, les autres configurations étant toujours nulles ($N_{\mathbb{J}}(V,V') = 0 = N_{\mathbb{J}}(V,H)$).

***Lemme 8.4.2.*** — *.On a les relations*

1. $[\mathbb{J}\hat{\theta}_i, \mathbb{J}\hat{\theta}_j] = \mathbb{J}\widehat{\nabla_{a\theta_i}\theta_j} - \mathbb{J}\widehat{\nabla_{a\theta_j}}\theta_i + [X, \widetilde{\Omega}(a\theta_i, a\theta_j)]^\bullet$.
2. $\mathbb{J}[\mathbb{J}\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j] = \mathbb{J}\widehat{\nabla_{a\theta_i}\theta_j} + \widehat{\nabla_{\theta_j}\theta_i} + \mathbb{J}[X, \widetilde{\Omega}(a\theta_i, \theta_j)]^\bullet$.
3. $N_{\mathbb{J}}(\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j) = [X, \widetilde{\Omega}(a\theta_i, a\theta_j) - \widetilde{\Omega}(\theta_i, \theta_j) - X\widetilde{\Omega}(a\theta_i, \theta_j) - X\widetilde{\Omega}(\theta_i, a\theta_j)]^\bullet$.

*Démonstration.* — On utilise dans cette preuve des notations du type $\nabla_{\theta_i} a(\theta_j)$, $\nabla_{a\theta_i}(\theta_j), \nabla_{a\theta_i} a(\theta_j)$ qui n'ont pas de sens à priori, car les champs de type $a(\theta_i) = \sum_j X_{ji}\theta_j$ sont des champs sur $\tau(M)$, et non sur $M$. Dans ce qui suit, il faut comprendre les expressions considérées comme

$$\begin{aligned}
\nabla_{\theta_i} a(\theta_j) &= \sum_k X_{kj} \nabla_{\theta_i}\theta_k \quad , \quad \nabla_{a\theta_i} a(\theta_j) = \sum_{k,h} X_{hi} X_{kj} \nabla_{\theta_h}\theta_k \\
\nabla_{a\theta_i}(\theta_j) &= \sum_k X_{ki} \nabla_{\theta_k}\theta_j.
\end{aligned}$$

En bref dans ces expressions, les variables $X_{ij}$ sont "‘transparentes" (considérées comme constantes).

On se fixe un repère local $R(x) = (x; \theta_1(x), ..., \theta_{2n}(x))$. On se place en un point $a$ de $\tau(M)$ de coordonnées $(x, X)$ dans $R$. On a (*)$a(\theta_i) = \sum_k X_{ki}\theta_k$.

1. $[\mathbb{J}\hat{\theta}_i, \mathbb{J}\hat{\theta}_j] = [\widehat{a(\theta_i)}, \widehat{a(\theta_j)}] = \sum_{k,h} X_{ki}X_{hj}[\hat{\theta}_k, \hat{\theta}_h] + X_{ki}\hat{\theta}_k(X_{hj})\hat{\theta}_h - X_{hj}\hat{\theta}_h(X_{ki})\hat{\theta}_k$ ;

   On examine les trois sommes de ce développement :

   (a)
   $$\begin{aligned}
   S_1 &= \sum_{k,h} X_{ki}X_{hj}[\hat{\theta}_k, \hat{\theta}_h)] = \sum_{k,h} X_{ki}X_{hj}(\widehat{[\theta_k, \theta_h]} + [X, \widetilde{\Omega}(\theta_k, \theta_h)]^\bullet) \\
   &= \widehat{\nabla_{a(\theta_i)} a(\theta_j)} - \widehat{\nabla_{a(\theta_j)} a(\theta_i)} + [X, \widetilde{\Omega}(a\theta_i, a\theta_j]^\bullet)
   \end{aligned}$$

   Remarquons que $a(\theta_i)(X_{rs}) = 0$ puisque un élément $\theta_k$ n'a d'effet que sur les fonctions en $x$, pas sur les fonctions en $X$.

   (b)
   $$\begin{aligned}
   S_2 &= \sum_{k,h} X_{ki}\hat{\theta}_k(X_{hj})\hat{\theta}_h = \sum_{k,h} X_{ki}[X, \tilde{\eta}(\theta_k)]_{hj}\hat{\theta}_h \\
   &= \sum_{k,h,t} (X_{ki}X_{ht}\tilde{\eta}_{tj}(\theta_k) - X_{ki}\tilde{\eta}_{ht}(\theta_k)X_{tj})\hat{\theta}_h \\
   &= \sum_{h,t} X_{ht}\tilde{\eta}_{tj}(a(\theta_i))\hat{\theta}_h - \sum_{h,t} \tilde{\eta}_{ht}(a\theta_i)X_{tj}\hat{\theta}_h \\
   &= \mathbb{J}(\widehat{\nabla_{a(\theta_i)}\theta_j}) - \widehat{\nabla_{a(\theta_i)} a(\theta_j)}
   \end{aligned}$$

   en utilisant la relation (*) ci-dessus.

   (c) s'obtient à partir de la deuxième en permutant $i$ et $j$ soit

   $$S_3 = \mathbb{J}(\widehat{\nabla_{a(\theta_j)}\theta_i}) - \widehat{\nabla_{a(\theta_j)} a(\theta_i)}.$$

   Soit

   $$\begin{aligned}
   1 &= S_1 + S_2 - S_3 \\
   &= \widehat{\nabla_{a(\theta_i)} a(\theta_j)} - \widehat{\nabla_{a(\theta_j)} a(\theta_i)} + [X, \widetilde{\Omega}(a\theta_i, a\theta_j)]^\bullet) \\
   &\quad + \mathbb{J}(\widehat{\nabla_{a(\theta_i)}\theta_j}) - \widehat{\nabla_{a(\theta_i)} a(\theta_j)} - \mathbb{J}(\widehat{\nabla_{a(\theta_j)}\theta_i}) + \widehat{\nabla_{a(\theta_j)} a(\theta_i)} \\
   &= [X, \widetilde{\Omega}(\theta_i, \theta_j)]^\bullet) + \mathbb{J}(\widehat{\nabla_{a(\theta_i)}\theta_j}) - \mathbb{J}(\widehat{\nabla_{a(\theta_j)}\theta_i}).
   \end{aligned}$$

   Ceci termine la preuve du point 1.

2. Ici,

$$\begin{aligned}
[\mathbb{J}\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j] &= [\sum_k X_{ki}\hat{\theta}_k, \hat{\theta}_j] = \sum_k X_{ki}[\hat{\theta}_k, \hat{\theta}_j] - \hat{\theta}_j(X_{ki})\hat{\theta}_k \\
&= \sum_k X_{ki}(\widehat{[\theta_k, \theta_j]} + [X, \widetilde{\Omega}(\theta_k, \theta_j)]^\bullet) - \sum_k [X, \tilde{\eta}(\theta_j)]_{ki}\hat{\theta}_k \\
&= \sum_k X_{ki}(\widehat{\nabla_{\theta_k}\theta_j} - \widehat{\nabla_{\theta_j}\theta_k}) + [X, \widetilde{\Omega}(a\theta_i, \theta_j)]^\bullet) - \sum_{k,t}(X_{kt}\tilde{\eta}_{ti}(\theta_j) - \tilde{\eta}_{kt}(\theta_j)X_{ti})\hat{\theta}_k.
\end{aligned}$$

En utilisant encore le fait que $\theta_{rs}(X_{mn}) = 0$ pour tous indices $m, n, r, s$ on obtient

$$\begin{aligned}
[\mathbb{J}\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j] &= \widehat{\nabla_{a\theta_i}\theta_j} - \widehat{\nabla_{\theta_j}a\theta_i} + [X, \widetilde{\Omega}(a\theta_i, \theta_j)]^\bullet) - \mathbb{J}(\widehat{\nabla_{\theta_j}\theta_i}) + \widehat{\nabla_{\theta_j}a\theta_i}) \\
&= \widehat{\nabla_{a\theta_i}\theta_j} + [X, \widetilde{\Omega}(a\theta_i, \theta_j)]^\bullet) - \mathbb{J}(\widehat{\nabla_{\theta_j}\theta_i}).
\end{aligned}$$

Quand on applique $\mathbb{J}$ a cette expression, du fait que $\mathbb{J}^2 = -Id$, on obtient bien la formule du point 2.

3. Pour le point 3, on utilise les résultats obtenus

$$\begin{aligned}
N_{\mathbb{J}}(\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j) &= [\mathbb{J}\hat{\theta}_i, \mathbb{J}\hat{\theta}_j] - \mathbb{J}[\mathbb{J}\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j] - \mathbb{J}[\hat{\theta}_i, \mathbb{J}\hat{\theta}_j] - [\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j] \\
&= [X, \widetilde{\Omega}(a\theta_i, a\theta_j)]^\bullet) + \mathbb{J}(\widehat{\nabla_{a(\theta_i)}\theta_j}) - \mathbb{J}(\widehat{\nabla_{a(\theta_j)}\theta_i} - \mathbb{J}\widehat{\nabla_{\theta_{a\theta_i}}\theta_j} \\
&\quad -\mathbb{J}[X, \widetilde{\Omega}(a\theta_i, \theta_j)]^\bullet) - (\widehat{\nabla_{\theta_j}\theta_i}) + \mathbb{J}\widehat{\nabla_{\theta_{a\theta_j}}\theta_i} \\
&\quad +\mathbb{J}[X, \widetilde{\Omega}(a\theta_j, \theta_i)]^\bullet) + (\widehat{\nabla_{\theta_i}\theta_j}) - [\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j].
\end{aligned}$$

On déduit alors le résultat en 3-, grâce aux relations

$$[\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j] = \widehat{[\theta_i, \theta_j]} + [X, \widetilde{\Omega}(\theta_i, \theta_j)]^\bullet$$

(voir proposition 6.2.2) et

$$[\theta_i, \theta_j] = \nabla_{\theta_i}\theta_j - \nabla_{\theta_j}\theta_i.$$

□

Dans le lemme suivant on transforme la relation établie en 3-

***Définition 8.4.3***. — Pour $a \in \tau(M)$, on définit $\sigma_a, \mu_a : \wedge^2 TM \to \wedge^2 TM$ par

$$\begin{aligned}
\sigma_a(X \wedge Y) &= a(X) \wedge Y + X \wedge a(Y) \\
\mu_a(X \wedge Y) &= aX \wedge aY - X \wedge Y.
\end{aligned}$$

***Lemme 8.4.4***. — *On a*

1. *$\sigma_a$ est anti-symétrique pour $\hat{g}$, produit scalaire sur $\wedge^2 TM$ issu de $g$.*
2. *$\mu_a$ est symétrique et $2\mu_a = \sigma_a^2$.*
3. *Si $\xi$ et $\xi'$ sont deux éléments de $TM$ , et $X$ désignant la matrice de $a$ dans le repère$\{\theta_k\}$, alors : $[X, \widetilde{\Omega}(\xi, \xi')]_{kl} = -\hat{g}(\sigma_a \circ \hat{R}(\xi \wedge \xi'), \theta_k \wedge \theta_l)$.*

*Démonstration*. — Les points 1 et 2 se vérifient sur les éléments de la forme $X \wedge Y$. Pour le point 3 :
On pose $M = \widetilde{\Omega}(\xi, \xi')$ ; on a $M_{kl} = g(R(\xi, \xi')\theta_l, \theta_k) = \hat{g}(\hat{R}(\xi \wedge \xi'), \theta_l \wedge \theta_k)$. (par définition de $\hat{R}$). $[X, \widetilde{\Omega}(\xi, \xi')]_{kl} = \sum_t X_{kt}M_{tl} - M_{kt}X_{tl}$. En remplacant les termes $M_{rs}$ par les expressions

en $\hat{g}$ on obtient : $\sum_t X_{kt}M_{tl} = -\hat{g}(\hat{R}(\xi \wedge \xi'), \theta_l \wedge a\theta_k)$. De même,$\sum_t M_{kt}X_{tl} = \hat{g}(\hat{R}(\xi \wedge \xi'), a\theta_l \wedge \theta_k)$. En faisant la différence , on aboutit finalement au résultat. $\square$

De manière analogue, après développement ,$[X, X\widetilde{\Omega}(\xi, \xi')]_{kl} = -M_{kl} - (XMX)_{kl} = \hat{g}(\hat{R}(\xi \wedge \xi'), \theta_k \wedge \theta_l) - \hat{g}(\hat{R}(\xi \wedge \xi'), a\theta_k \wedge a\theta_l)$=-$\hat{g}(\hat{R}(\xi \wedge \xi'), \mu_a(\theta_k \wedge \theta_l))$.

On en déduit les identités :
$[X, \widetilde{\Omega}(a\theta_i, a\theta_j)]_{kl} = -\hat{g}(\sigma_a \circ \hat{R}(a\theta_i \wedge a\theta_j), \theta_k \wedge \theta_l)$,
$[X, \widetilde{\Omega}(\theta_i, \theta_j)]_{kl} = -\hat{g}(\sigma_a \circ \hat{R}(\theta_i \wedge \theta_j), \theta_k \wedge \theta_l)$,
$[X, X\widetilde{\Omega}(a\theta_i, \theta_j)]_{kl} = -\hat{g}(\mu_a \circ \hat{R}(a\theta_i \wedge \theta_j), \theta_k \wedge \theta_l)$,
$[X, X\widetilde{\Omega}(\theta_i, a\theta_j)]_{kl} = -\hat{g}(\mu_a \circ \hat{R}(\theta_i \wedge a\theta_j), \theta_k \wedge \theta_l)$. $\square$

Ces relations valant pour tous $k$ et $l$ , la relation $N_{\mathbb{J}}(\theta_i, \theta_j) = 0$ équivaut à :
$-\sigma_a \circ \hat{R}(a\theta_i \wedge a\theta_j) + \sigma_a \circ \hat{R}(\theta_i \wedge \theta_j) + \mu_a \circ \hat{R}(a\theta_i \wedge \theta_j) + \mu_a \circ \hat{R}(\theta_i \wedge a\theta_j)) = 0$, soit :
$-\sigma_a \circ \hat{R} \circ \mu_a + \mu_a \circ \hat{R} \circ \sigma_a$=0 (étant valable pour tous $i$ et $j$). D'où la proposition

***Proposition 8.4.5***. — *Pour que $\mathbb{J}$ soit intégrable , il faut et il suffit que pour tout $a \in \tau(M)$, $\sigma_a \circ \hat{R} \circ \mu_a = \mu_a \circ \hat{R} \circ \sigma_a$ , ou encore comme $2\mu_a = \sigma_a^2$, $\sigma_a \circ \hat{R} \circ \sigma_a^2 = \sigma_a^2 \circ \hat{R} \circ \sigma_a$ , ou encore $\sigma_a \circ [\hat{R}, \sigma_a] \circ \sigma_a = 0$.*

Maintenant, quand on écrit la décomposition $\hat{R} = \widehat{A \bullet g} + W$, où $W$ est l'opérateur de Weyl, la contribution de $\widehat{A \bullet g}$ dans la relation (E) $\sigma_a \circ [\hat{R}, \sigma_a] \circ \sigma_a = 0$ est nulle (que $A$ soit à trace nulle ou pas). Cela se vérifie sur les éléments et utilise la définition de $A \bullet g$ (calcul non reproduit ici). On déduit

***Proposition 8.4.6***. — *Pour que $\mathbb{J}$ soit intégrable , il faut et il suffit que pour tout $a \in \tau(M)$, $\sigma_a \circ [W, \sigma_a] \circ \sigma_a = 0$ (relation (E)) , ou $W$ désigne l'opérateur de Weyl.*

Pour clore la démonstration du théorème, nous proposons une preuve uniquement lorsque $\dim M = 4$ en utilisant cette dernière proposition ; on admet le théorème pour $dimM > 4$.

Pour un point $x$ fixé dans $M$, on veut montrer que la relation (E) équivaut à $W_+(x) = 0$

• Si la relation (E) est vraie, on fait varier $a \in \pi_\tau^{-1}(x)$ on écrit les matrices de $W$ et de $\sigma_a$ dans une base fixée comme suit. On fixe $R(x) = (x; \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ un repère orthonormé direct dans $T_xM$. On pose

$$\begin{aligned} X_1 &= \theta_1 \wedge \theta_2 + \theta_3 \wedge \theta_4 \quad , \quad X_2 = \theta_1 \wedge \theta_3 - \theta_2 \wedge \theta_4 \\ X_3 &= \theta_1 \wedge \theta_4 + \theta_2 \wedge \theta_3, \end{aligned}$$

alors $\{X_1, X_2, X_3\}$ est une base orthogonale de $\wedge_{x+}$. De même

$$\begin{aligned} Y_1 &= \theta_1 \wedge \theta_2 - \theta_3 \wedge \theta_4 \quad , \quad Y_2 = \theta_1 \wedge \theta_3 + \theta_2 \wedge \theta_4 \\ Y_3 &= \theta_1 \wedge \theta_4 - \theta_2 \wedge \theta_3, \end{aligned}$$

alors $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ est une base orthogonale $de\wedge_{x-}$. On écrit la matrice de $W_+$ dans la base $X_1, X_2, X_3$

$$W_+ = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{pmatrix}$$

•• On prend $a$ tel que $a(\theta_1) = \theta_2$, $a(\theta_2) = -\theta_1$, $a(\theta_3) = \theta_4$, $a(\theta_4) = -\theta_3$. En terme de matrices, si on note $X$ la matrice de $a$ dans la base $\{\theta_i\}$, $X = J_2$. Les matrices de $W$ et $\sigma_a$ sont des matrices $6 \times 6$, et dans la base $X_1, ..., Y_3$ elles s'écrivent comme des matrices $2 \times 2$ de matrices $3 \times 3$

$$W = \begin{pmatrix} W_+ & 0 \\ 0 & W_- \end{pmatrix}, \quad \sigma_a = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Le calcul de la matrice de $\sigma_a$(et donc $M$) s'effectue sur les éléments de la base $X_1, ..., Y_3$. On peut simplifier le calcul quand on sait que l'image de $\sigma_a \subseteq \wedge_{+x}$, et que $\sigma_a$ est anti-symétrique.(on pourra consulter la proposition 8.3.3). On vérifie facilement que $\sigma_a(X_1) = 0$ ; calculons $\sigma_a(X_2)$ : $\sigma_a(X_2) = \sigma_a(\theta_1 \wedge \theta_3 - \theta_2 \wedge \theta_4) = a(\theta_1) \wedge \theta_3 + \theta_1 \wedge a(\theta_3) - a(\theta_2) \wedge \theta_4 - \theta_2 \wedge a(\theta_4) = 2(\theta_2 \wedge \theta_3 + \theta_1 \wedge \theta_4) = 2X_3$. On a : $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ La relation (E) donne alors

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} W_+ & 0 \\ 0 & W_- \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} W_+ & 0 \\ 0 & W_- \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient que $M.W_+.M^2 = M^2.W_+.M$ (E') qui est une condition sur des matrices $3 \times 3$. Remarquons que $W_-$ n'intervient pas dans cette relation. Cette relation conduit aux deux relations : $w_{22} = w_{33}$ et $w_{23} = w_{32} = 0$.
•• Si on prend $a$ tel que $a(\theta_1) = \theta_3$, $a(\theta_3) = -\theta_1$, $a(\theta_2) = -\theta_4$. Par le même calcul, on obtient la même formule (E'), mais cette fois avec :

$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $M^2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ & 0 & -4 \end{pmatrix}$ On déduit cette fois $w_{11} = w_{33}$, $w_{13} = w_{31} = 0$. D'où $w_{11} = w_{22} = w_{33} = \lambda$.
•• Si on prend $a$ tel que $a(\theta_1) = \theta_4$, $a(\theta_2) = \theta_3$, $a(\theta_3) = -\theta_2$, $a(\theta_4) = -\theta_3$, on trouve de même $w_{21} = w_{12} = 0$. En résumé la matrice $W_+ = \lambda.Id$. Comme par ailleurs $Trace(W_+) =$

0, on déduit $\lambda = 0$, soit $W_+ = 0$.
• Inversement, si $W_+ = 0$, alors $W$ s'écrit comme une matrice $2\times 2$ de matrices $3\times 3$ : $W = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W_- \end{pmatrix}$ utilisant le fait que pour tout $a$, la matrice de $\sigma_a$, s'écrit comme une matrice $2 \times 2$ de matrices $3 \times 3$ (voir proposition 8.3.3) $\sigma_a = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ soit $\sigma_a^2 = \begin{pmatrix} S^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Alors, par un calcul évident de matrices, on obtient la relation (E).

# CHAPITRE 9

# CHAMPS DE VECTEURS DANS $\tau(M)$

Le calcul de $id'd"\omega$ nécessite au préalable une étude précise des crochets de champs de vecteurs complexes sur $\tau(M)$, qui est développée dans ce chapitre. On suppose que l'opérateur $\mathbb{J}$ est intégrable. On considère l'extension $\mathbf{C}$-linéaire de $\mathbb{J}_a$ au complexifié $T_a\tau(M)^c$ de $T_a\tau(M)$, que l'on notera aussi $\mathbb{J}$.

***Remarque 9.0.7***. — Il ne faut pas faire la confusion entre la structure d'espace vectoriel complexe sur $T_a\tau(M)$, donnée par $\mathbb{J}_a$ et le complexifié de $T_a\tau(M)$, $T_a\tau(M)^c = T_a\tau(M)\otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = T_a\tau(M) \oplus iT_a\tau(M)$.

Désormais, sauf cas particulier lorsque l'on fera référence à un champ de vecteur de $\tau(M)$, il s'agira d'un champ de vecteurs complexe.

## 9.1. Champs holomorphes et anti-holomorphes

Un vecteur tangent holomorphe en $a$ à $\tau(M)$ est un élément $U$ de $T_a\tau(M)^c$ tel que $\mathbb{J}U = iU$. De même un vecteur anti-holomorphe est un élément $U$ de $T_a\tau(M)^c$ tel que $\mathbb{J}U = -iU$.

Pour les crochets de champs de $\tau(M)^c$, on examine ici les propriétés d'holomorphie($h$), d' anti-holomorphie ($ah$) ainsi que les composantes horizontales($H$) et verticales($V$).

***Lemme 9.1.1***. — *Si $X$ et $Y$ sont des champs (anti-) holomorphes, $[X,Y]$ est aussi (anti-)holomorphe.*

Pour des champs holomorphes X etY, utilisons le théorème de Newlander-Nirenberg en écrivant $[\mathbb{J}X,\mathbb{J}Y] - \mathbb{J}[\mathbb{J}X,Y] - \mathbb{J}[X,\mathbb{J}Y] - [X,Y] = 0 = -[X,Y] - 2i\mathbb{J}[X,Y] - [X,Y]$ d'ou $\mathbb{J}[X,Y] = i[X,Y]$.
Le raisonnement est analogue pour deux champs anti-holomorphes.

***Lemme 9.1.2***. — *Pour tout $X \in (T_a\tau(M))^c$, $X = \frac{1}{2}(I - i\mathbb{J}_a)(X) + \frac{1}{2}(I + i\mathbb{J}_a)(X)$, $X^h = \frac{1}{2}(I - i\mathbb{J}_a)(X)$ représentant la composante holomorphe de $X$ et $X^a = \frac{1}{2}(I + i\mathbb{J}_a)(X)$ représentant la composante anti-holomorphe de X. remarque : dans l'expression de $X^a$, l'indice $a$ placé en haut indique la composante anti-holomorphe et non un point $a$ de $\tau(M)$.*

Pour montrer ce lemme, on utilise le fait que $\mathbb{J}^2 = -Id$.

***Lemme 9.1.3***. — *Si $f$ et $g$ sont des fonctions d'un ouvert de $\tau(M)$ dans $R$ ou $C$ , et $U$ et $V$ deux champs de vecteurs définis sur cet ouvert*

$$[fU, gV] = fg[U, V] + fU(g)V - gV(f)U.$$

*Démonstration.* — En effet, utilisons la propriété d'un crochet : $[fU, V] = f[U, V] - V(f)U$ pour tous champs U et V de $\tau(M)$, on obtient :
$[fU, gV] = f[U, gV] - gV(f)U = -f([gV, U] - gV(f)U$
$= -f(g[V, U] - U(g)V) - gV(f)U = fg[U, V] + fU(g)V - gV(f)U.$ □

## 9.2. Crochet de champs de vecteurs horizontaux

Dans cette partie, on généralise la formule donnant $[\hat{\theta}, \hat{\theta}']$ à des vecteurs horizontaux plus complexes. En effet pour calculer le hessien $id'd"\omega$, de manière exhaustive, il faut calculer la valeur de cette forme sur plusieurs combinaisons de vecteurs de type holomorphes, anti-holomorphes de type $I + \epsilon\mathbb{J}U$ ou $U$ est horizontal ou vertical, avec $\epsilon = +1$ ou -1.

***Proposition 9.2.1***. — *On se place en un point $a$ de l'espace twistoriel $\tau(M)$. On se donne un repère local orthonormé direct dans $M$ , $R(x) = (x, \theta_1(x), ..., \theta_{2n}(x))$. On suppose que les coordonnées de $a$ dans $R$ sont $(x, X)$ $(\psi_R(a) = (x, X)$ selon les notations précédentes, où $x \in M$ et $X \in Z_+(n))$ ; alors, pour $\epsilon$ et $\epsilon'$ réels*

$$[(I + i\epsilon\mathbb{J}_a)\hat{\theta}_i, (I + i\epsilon'\mathbb{J}_a)\hat{\theta}_j] = H + V$$

*avec*

$$\begin{aligned} V &= \text{composante verticale} = [X, \widetilde{\Omega}((I + i\epsilon a)\theta_i, (I + i\epsilon' a)\theta_j)]^\bullet \\ H &= \text{composante horizontale} = (I + i\epsilon'\mathbb{J}_a)(\widehat{\nabla_{(I+i\epsilon a)\theta_i}\theta_j}) - (I + i\epsilon\mathbb{J}_a)(\widehat{\nabla_{(I+i\epsilon' a)\theta_j}\theta_i}). \end{aligned}$$

Notation : dans la partie consacrée au calcul de $dd"\omega$ on posera en général

$$\begin{aligned} \Omega_{ij}^{++} &= \widetilde{\Omega}((1 + ia)\theta_i, (1 + ia)\theta_j), \\ \Omega_{ij}^{-+} &= \widetilde{\Omega}((1 - ia)\theta_i, (1 + ia)\theta_j), etc... \end{aligned}$$

*Démonstration.* — On utilise les points 1 et 2 du lemme 8.4.2

$$[(I + i\epsilon\mathbb{J})\hat{\theta}_i, I + i\epsilon'\mathbb{J})\hat{\theta}_j] = [\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j] + i\epsilon[\mathbb{J}\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j] + i\epsilon'[\hat{\theta}_i, \mathbb{J}\hat{\theta}_j] - \epsilon\epsilon'[\mathbb{J}\hat{\theta}_i, \mathbb{J}\hat{\theta}_j]$$

$$\begin{aligned} [\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j] &= \widehat{\nabla_{\theta_i}\theta_j} - \widehat{\nabla_{\theta_j}\theta_i} + [X, \widetilde{\Omega}(\theta_i, \theta_j)]^\bullet \\ i\epsilon[\mathbb{J}\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j] &= i\epsilon(\widehat{\nabla_{a\theta_i}\theta_j}(\alpha) - \mathbb{J}\widehat{\nabla_{\theta_j}\theta_i} + [X, \widetilde{\Omega}(a\theta_i, \theta_j)]^\bullet) \\ i\epsilon'[\hat{\theta}_i, \mathbb{J}\hat{\theta}_j] &= -i\epsilon'(\widehat{\nabla_{a\theta_j}\theta_i}(\beta) - \mathbb{J}\widehat{\nabla_{\theta_i}\theta_j}(\gamma) + [X, \widetilde{\Omega}(\theta_i, a\theta_j)]^\bullet) \\ -\epsilon.\epsilon'[\mathbb{J}\hat{\theta}_i, \mathbb{J}\hat{\theta}_j] &= -\epsilon.\epsilon'(\mathbb{J}\widehat{\nabla_{a\theta_i}\theta_j}(\alpha) - \mathbb{J}\widehat{\nabla_{a\theta_j}\theta_i}(\beta) + [X, \widetilde{\Omega}(a\theta_i, a\theta_j)]^\bullet). \end{aligned}$$

On regroupe les termes horizontaux analogues,par paire, indicés par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\lambda$ :

$$(\alpha) = i\epsilon(I + i\epsilon'\mathbb{J})\widehat{\nabla_{a\theta_i}\theta_j} \quad , \quad (\beta) = -i\epsilon'(I + i\epsilon\mathbb{J})\widehat{\nabla_{a\theta_j}\theta_i}$$
$$(\gamma) = (I + i\epsilon'\mathbb{J})\widehat{\nabla_{\theta_i}\theta_j} \quad , \quad (\lambda) = -(I + i\epsilon\mathbb{J})\widehat{\nabla_{\theta_j}\theta_i}.$$

On conclut alors facilement. □

## 9.3. Crochets d'un champ horizontal et d'un champ vertical

***Proposition 9.3.1***. — *Si $A$ est une matrice antisymétrique de $M(2n, R)$ ; on note $\epsilon$, $\epsilon'$,$\eta$,$\eta'$ 4 nombres réels. Alors*

(a) $[\theta_k, [X, A]^\bullet]=0$ *et* $[\theta_k, \mathbb{J}[X, A]^\bullet] = 0$.

(b) *le champ $T_k$ défini sur $\tau(M)$ par $T_k(x, X) = [\hat{\theta_k}, [X, A]^\bullet]$ est vertical et égal à $[X, [\tilde{\eta}(\theta_k), A]]^\bullet$.*

(c) *Si $M = M(x)$ est une matrice antisymétrique dépendant de la variable $x$ (sera utilisée avec $M(x) = \tilde{\eta}(\theta_k)$, puis dans la proposition suivante avec $M = B$ =matrice antisymétrique), alors*

$$[[X, M]^\bullet, \mathbb{J}([X, A]^\bullet)] = [X, X[M, A]]^\bullet = \mathbb{J}([X, [M, A]]^\bullet).$$

(c') *Si $A$ et $B \in so(2n)$, et si on pose $U = [X, A]$ et $V = [X, B]$ qui sont deux champs de vecteurs verticaux, alors*

$$\mathbb{J}([U, V]) = [\mathbb{J}U, V] = [U\mathbb{J}V].$$

(d)

$$[\hat{\theta_k}, \mathbb{J}[X, A]^\bullet] = [X, X[\tilde{\eta}(\theta_k), A]]^\bullet.$$

(e) *Si on pose $U = [X, A]^\bullet$, avec $A$ une matrice antisymétrique, alors*

$$\begin{aligned}[(I + \epsilon i\mathbb{J})\hat{\theta_k}, (I + \epsilon' i\mathbb{J})U] &= (I + \epsilon' i\mathbb{J})[X, [\tilde{\eta}((I + \epsilon ia)\theta_k), A]]^\bullet \\ &\quad -\epsilon i \sum_r (I + i\epsilon'\mathbb{J})(U)(X_{rk}))\hat{\theta_r}.\end{aligned}$$

(e') *Si on pose $U = [X, A]^\bullet$, avec $A$ une matrice antisymétrique, alors*

$$\begin{aligned}[(\eta I + \epsilon i\mathbb{J})\hat{\theta_k}, (\eta' I + \epsilon' i\mathbb{J})U] &= (\eta' I + \epsilon' i\mathbb{J})[X, [\tilde{\eta}((\eta I + \epsilon ia)\theta_k), A]]^\bullet \\ &\quad -\epsilon i \sum_r (\eta' I + i\epsilon'\mathbb{J})(U)(X_{rk}))\hat{\theta_r}.\end{aligned}$$

*(Non utilisé mais peut servir pour montrer $N_J(H, V) = 0$ pour tous vecteurs $H$ horizontal et $V$ vertical).*

*Démonstration.* — (a) si $f(x, X)$ est une fonction sur $\tau(M)$, définie localement

$$[\theta_k, [X, A]^\bullet]f = \theta_k(\sum_{rs}[X, A]_{rs}\frac{\partial f}{\partial X_{rs}}) - \sum_{rs}[X, A]_{rs}\frac{\partial}{\partial X_{rs}}(\theta_k(f)).$$

Du fait que $A$ est une matrice (constante), que $\theta_k(X_{ij}) = 0$ pour tous $i$ et $j$ et que $\theta_k(\frac{\partial f}{\partial X_{rs}}) = \frac{\partial}{\partial X_{rs}}(\theta_k(f))$ ($f$ est supposée $C^\infty$), on déduit bien la première partie de l'assertion a. L'autre partie se montre d'une manière analogue ($\mathbb{J}([X, A]^\bullet = [X, XA]^\bullet$).

(b) est une conséquence de (a) et du lemme 6.1.1.

(c) En appliquant une fonction $f(x,X)$

$$\begin{aligned}[][X,M]^\bullet,[X,XA]^\bullet]f &= \sum_{m,n,r,s}[X,M]_{rs}\frac{\partial}{\partial X_{rs}}([X,XA]_{mn}\frac{\partial f}{\partial X_{mn}}) \\ &\quad -[X,XA]]_{mn}\frac{\partial}{\partial X_{mn}}([X,M]_{rs}\frac{\partial f}{\partial X_{rs}}).\end{aligned}$$

Les termes des deux sommes qui font intervenir les dérivées $\frac{\partial^2}{\partial X_{rs}\partial X_{mn}}(f) = \frac{\partial^2}{\partial X_{mn}\partial X_{rs}}(f)$ s'annulent de manière évidente. Il reste donc, compte tenu du fait que $[X,XA] = -A - XAX$ et que $A$ est constante

$$\begin{aligned}[][X,M]^\bullet,[X,XA]^\bullet]f &= \sum_{m,n,r,s,p,q} -[X,M]_{rs}\frac{\partial}{\partial X_{rs}}(X_{mp}A_{pq}X_{qn})\frac{\partial f}{\partial X_{mn}} \\ &\quad - \sum_{r,s,m,n,t}[X,XA]_{mn}\frac{\partial}{\partial X_{mn}}(X_{rt}M_{ts}-M_{rt}X_{ts})\frac{\partial f}{\partial X_{rs}}.\end{aligned}$$

Ces sommes se décomposent en 4 sommes

$$\alpha = -\sum_{r,s,m,n,p,q}[X,M]_{rs}\frac{\partial X_{mp}}{\partial X_{rs}}A_{pq}X_{qn}\frac{\partial f}{\partial X_{mn}} \quad , \quad \beta = -\sum_{r,s,m,n,p,q}[X,M]_{rs}X_{mp}A_{pq}\frac{\partial X_{qn}}{\partial X_{rs}}\frac{\partial f}{\partial X_{mn}}$$

$$\gamma = -\sum_{m,n,s}[X,XA]_{mn}M_{ns}\frac{\partial f}{\partial X_{ms}} \quad , \quad \delta = +\sum_{m,n,r}[X,XA]_{mn}M_{rm}\frac{\partial f}{\partial X_{rn}}$$

En changeant $m$ en $r$ dans la somme $\gamma$, et $n$ en $s$ dans la somme $\delta$ , on trouve :
$\gamma + \delta = \sum_{rs}[M,[X,XA]]_{rs}\frac{\partial f}{\partial X_{rs}}$
Pour la somme $\alpha$ , ne subsistent que les termes pour lesquels $r = m$ et $p = s$, soit :
$\alpha = -\sum_{r,s,n,q}[X,M]_{rs}A_{sq}X_{qn}\frac{\partial f}{\partial X_{rn}}$
Pour la somme $\beta$ , $q = r$ et $n = s$, soit :
$\beta = -\sum_{r,s,m,p}[X,M]_{rs}X_{mp}A_{pr}\frac{\partial f}{\partial X_{ms}}$
En interchangeant $n$ en $s$ dans la somme $\alpha$, et $m$ en $r$ dans la somme $\beta$ :
$\alpha = -\sum_{rs}([X,M]AX)_{rs}\frac{\partial f}{\partial X_{rs}}$, $\beta = -\sum_{rs}(XA[X,M])_{rs}\frac{\partial f}{\partial X_{rs}}$.
$\alpha+\beta+\gamma+\delta = \sum_{r,s}([M,[X,XA]] - [X,M]AX - XA[X,M])_{rs}\frac{\partial f}{\partial X_{rs}}$
Pour finir :
$[M,[X,XA]] - [X,M]AX - XA[X,M] = M(-A-XAX) - (-A-XAX)M - XMAX + MXAX - XAXM + XAMX$
$=[A,M] - MXAX + XAXM - XMAX + MXAX - XAXM + XAMX = X[A,M]X + [A,M] = [X,X[M,A]]$ d'où le résultat en (c).

(c') On applique (c) avec $M = B$.

(d) résulte du a, et du c appliqué à M=$\hat{\eta}(\theta_k)$.

(e) appliquons le lemme 9.1.3 : pour tous champs $U$ et $V$ sur $\tau(M)$, $[fU,gV] = fg[U,V] + fU(g)V - gV(f)U$. $[(I+\epsilon i\mathbb{J})\hat{\theta}_k,(I+\epsilon' i\mathbb{J})[X,A]^\bullet] = [\sum_r(\delta_{rk} + \epsilon i X_{rk})\hat{\theta_r},[X,A]^\bullet + i\epsilon'\sum_{mn}[X,XA]_{mn}\frac{\partial}{\partial X_{mn}}]$.

Pour la première somme

$$\begin{aligned}
&[\sum_r(\delta_{rk}+\epsilon i X_{rk})\hat{\theta_r},[X,A]^\bullet]\\
&= \sum_r((\delta_{rk}+\epsilon i X_{rk})[\hat{\theta_r},[X,A]^\bullet]-\sum_r[X,A]^\bullet(\delta_{rk}+i\epsilon X_{rk})\hat{\theta_r}\\
&= [X,[\tilde\eta((I+i\epsilon a)\theta_k),A]]^\bullet-\epsilon i\sum_r[X,A]_{rk}\hat{\theta_r}.
\end{aligned}$$

Pour la seconde somme

$$\begin{aligned}
&[\sum_r(\delta_{rk}+\epsilon i X_{rk})\hat{\theta_r},\epsilon' i[X,XA]^\bullet]\\
&= \sum_r(\delta_{rk}+\epsilon i X_{rk})[\hat{\theta_r},\epsilon' i[X,XA]^\bullet]-\epsilon' i[X,XA]^\bullet(\delta_{rk}+\epsilon i X_{rk})\hat{\theta_r}\\
&= i\epsilon'\sum_r(\delta_{rk}+\epsilon i X_{rk})[X,X[\tilde\eta(\theta_r),A]]^\bullet+\epsilon\epsilon'\sum[X,XA]^\bullet(X_{rk})\hat{\theta_r}\\
&= \epsilon' i\mathbb{J}[X,[\tilde\eta((I+\epsilon i a)\theta_k),A]]^\bullet+\epsilon\epsilon'\sum_r[X,XA]_{rk}\hat{\theta_r}.
\end{aligned}$$

En considérant la somme de ces deux sommes, on voit que le résultat est

$$\begin{aligned}
&[(I+\epsilon i\mathbb{J})\hat{\theta_k},(I+\epsilon' i\mathbb{J})[X,A]^\bullet]\\
&= (I+\epsilon' i\mathbb{J})[X,[\tilde\eta((I+ia)\theta_k),A]]^\bullet-\epsilon i\sum_r([X,A]_{rk}+\epsilon' i[X,XA]_{rk})\hat{\theta_r}\\
&= (I+\epsilon' i\mathbb{J})[X,[\tilde\eta((I+\epsilon i a)\theta_k),A]]^\bullet-\epsilon i\sum_r(I+i\epsilon'\mathbb{J})(U)(X_{rk}))\hat{\theta_r}.
\end{aligned}$$

(e') analogue à (e).

□

### 9.4. Crochet de deux champs de vecteurs verticaux

On poursuit la numérotation utilisée ci-dessus : a,b,c,d,e,....

***Proposition 9.4.1.*** — (f) *Si $A$ et $B$ sont des matrices antisymétriques alors*

$$[[X,A]^\bullet,\mathbb{J}([X,B]^\bullet]=\mathbb{J}([X,[A,B]]^\bullet).$$

((g) *Si $U=[X,A]^\bullet$,$V=[X,B]^\bullet$, avec $A$ et $B$ des matrices antisymétriques, et $\epsilon=\pm1$,$\epsilon'=\pm1$*

$$[(I+\epsilon i\mathbb{J})(U),(I+\epsilon' i\mathbb{J})(V)]=((1+\epsilon\epsilon')I+i(\epsilon+\epsilon')\mathbb{J})[U,V].$$

*Démonstration.* — (f) Il suffit d'appliquer c- avec $M=B$.

(g) $[(I+\epsilon i\mathbb{J})U,(I+\epsilon' i\mathbb{J})(V)]=[U,V]-\epsilon\epsilon'[\mathbb{J}U,\mathbb{J}V]+\epsilon i[\mathbb{J}U,V]+\epsilon' i[U,\mathbb{J}V]$. Utilisons l'identité de Newlander $[\mathbb{J}U,\mathbb{J}V]=\mathbb{J}[\mathbb{J}U,V]+\mathbb{J}[U,\mathbb{J}V]+[U,V]$ ; on trouve $[(I+\epsilon i\mathbb{J})U,(I+\epsilon' i\mathbb{J})(V)]=[U,V]-\epsilon\epsilon'(\mathbb{J}[\mathbb{J}U,V]+\mathbb{J}[U,\mathbb{J}V]+[U,V])+\epsilon i[\mathbb{J}U,V]+\epsilon' i[U,\mathbb{J}V]$.

En utilisant la proposition 9.3.1, $[U, \mathbb{J}V] = \mathbb{J}[U, V] = [\mathbb{J}U, V]$, et d'autre part $(\mathbb{J})^2 = -Id$ soit

$$[(I + \epsilon i\mathbb{J})U, (I + \epsilon' i\mathbb{J})(V)] = (1 + \epsilon\epsilon')[U, V] + ((\epsilon + \epsilon')i\mathbb{J})[U, V].$$

$\square$

# PARTIE II

# CALCUL DE $id'd''\omega$ DANS LE CAS $n = 2$

Dans cette partie, on calcule $id'd"\omega(a;\xi_0,\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ sur certaines combinaisons $(\xi_0,\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ de vecteurs tangents, qui représentent toutes les combinaisons de vecteurs possibles, à l'ordre près. Le point $a$ est indiqué ici pour rappeler que l'on se place en un point $a$ de $\tau(M)$. En général on ne l'indique pas dans la suite, mais il apparait par ses coordonnées $(x,X)$, où $x \in M$ et $X = Mat(a,R(x)) \in Z_+(2)$, où $R$ est un champ de repères local. Auparavant, on étudie les propriétés spécifiques à la dimension $2n=4$.

# CHAPITRE 10

# EXPRESSIONS SIMPLIFIÉES

## 10.1. $\theta_i^h \wedge \theta_j^h$, $\theta_i^h \wedge \theta_j^a$

Soit $a$ un élément de $\tau(M)$, tel que $\pi(a) = x$ et un repère local $R$, tel que $R(x) = (x; \theta_1, ..., \theta_4)$ . On considère les éléments de $T_xM^c$ $\theta_i^h = \frac{1}{2}(Id - ia)\theta_i$ et $\theta_i^a = \frac{1}{2}(Id + ia)\theta_i$.

***Proposition 10.1.1***. — *$\theta_i^h \wedge \theta_j^h \in \wedge_{+x}^c$ et $\theta_i^h \wedge \theta_j^a \in \wedge_{-x}^c \oplus (\Phi(a))^c$.*

Pour la démonstration on oublie les coefficients $\frac{1}{2}$. $\theta_i^h \wedge \theta_j^h = -\mu_a(\theta_i \wedge \theta_j) - i\sigma_a(\theta_i \wedge \theta_j)$. Cet élément $\in$ à $\wedge_{+x}^c$, d'après la proposition précédente. De même, $\theta_i^h \wedge \theta_j^a = (\theta_i \wedge \theta_j + a\theta_i \wedge a\theta_j) + i(\theta_i \wedge a\theta_j - a\theta_i \wedge \theta_j) \in \wedge_{-x}^c \oplus (\Phi(a))^c$.

## 10.2. $d\omega$ et courbure scalaire

L'endomorphisme de courbure $\hat{R} \in Sym(\wedge^2 TM)$ peut s'écrire

$$\hat{R} = \frac{s}{12} Id + B + W$$

(on peut consulter **[K]** à ce sujet,à partir de la page 319) où $s$ est la courbure scalaire, avec $A = \frac{1}{2}(Ric - \frac{s}{4}g)$, $B = \widehat{A \bullet g}$ et $W$ est l'opérateur de Weyl. L'opérateur $B$ a la particularité d'envoyer $\wedge_-$ dans $\wedge_+$ et inversement. La partie $W_-$ laisse stable les deux sous-espaces $\wedge_+$ et $\wedge_-$.

En un point a $\in \tau(M)$, $U$ étant un vecteur vertical en $a$, les relèvements horizontaux sont à prendre en $a$. On note
$\hat{\theta}_i^h = \frac{1}{2}(I - i\mathbb{J})\hat{\theta}_i = \frac{1}{2}\widehat{(I - ia)}\theta_i$= composante holomorphe du relevé horizontal de $\theta_i$ en a.
$\hat{\theta}_i^a = \frac{1}{2}(I + i\mathbb{J})\hat{\theta}_i = \frac{1}{2}\widehat{(I + ia)}\theta_i$= composante anti-holomorphe du relevé horizontal de $\theta_i$ en a.
On procède de la même manière pour les vecteurs verticaux :
$U^h = \frac{1}{2}(I - i\mathbb{J})U$= composante holomorphe de U en a.
$U^a = \frac{1}{2}(I + i\mathbb{J})U$ = composante anti-holomorphe de U en a.

***Proposition 10.2.1.*** — *La métrique est supposée anti-autoduale($W_+=0$). Avec les mêmes notations que précédemment, on a l'identité*

$$\begin{aligned} d\omega(\hat{\theta_i^h}, \hat{\theta_j^h}, U) &= (1-\frac{s}{6})U^a_{ij} \\ d\omega(\hat{\theta_i^h}, \hat{\theta_j^h}, U^h) &= 0 \\ d\omega(\hat{\theta_i^h}, \hat{\theta_j^h}, U^a) &= (1-\frac{s}{6})U^a_{ij}. \end{aligned}$$

*Démonstration.* — Pour alléger les notations, on "oubliera" les coefficients $\frac{1}{2}$ le temps de la démonstration concernant les relevés horizontaux . Pour obtenir le résultat, on divisera à la fin par 4.

L'expression précédemment trouvée, $d\omega(\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j, U) = \omega(\Lambda((\frac{1}{2}Id - \hat{R})\theta_i \wedge \theta_j), U)$ étant multilinéaire, peut être étendue à des champs complexes de sorte que

$$d\omega(\hat{\theta_i^h}, \hat{\theta_j^h}, U) = \omega(\Lambda((\frac{1}{2}Id - \hat{R})\theta_i^h \wedge \theta_j^h), U) = \omega(\Lambda((\frac{1}{2}Id - (\frac{s}{12}Id + B + W))(\theta_i^h \wedge \theta_j^h)), U).$$

$W(\theta_i^h \wedge \theta_j^h) = W_-(\theta_i^h \wedge \theta_j^h) = 0$ car $\theta_i^h \wedge \theta_j^h \in \wedge_+$. La contribution de $W$ dans le calcul est donc nulle. Concernant la contribution de $B$, $B(\theta_i^h \wedge \theta_j^h) \in \wedge_-$, donc $\Lambda(B(\theta_i^h \wedge \theta_j^h))(a) = [a, \Phi^{-1}(B(\theta_i^h \wedge \theta_j^h))] = 0$ : en effet $\theta_i^h \wedge \theta_j^h \in \wedge_{+x}$,donc $B(\theta_i^h \wedge \theta_j^h) \in \wedge_{-x}$, on applique alors proposition 8.3.2 point 3.

Il reste donc

$$\begin{aligned} d\omega(\hat{\theta_i^h}, \hat{\theta_j^h}, U) &= (\frac{1}{2} - \frac{s}{12})(\omega(\Lambda(\theta_i \wedge \theta_j), U) \\ &\quad -\omega(\Lambda(a(\theta_i) \wedge a(\theta_j)), U) - i\omega(\Lambda(\theta_i \wedge a(\theta_j)), U) \\ &\quad -i\omega(\Lambda(a(\theta_i) \wedge \theta_j), U)). \end{aligned}$$

On connait les deux termes $\omega(\Lambda(\theta_i \wedge \theta_j), U) = 2U_{ij}$ et $\omega(\Lambda(a\theta_i \wedge a\theta_j), U) = -2U_{ij}$. Il reste à calculer le terme en $i$. On pose toujours $a(\theta_i) = \sum_k X_{ki}\theta_k$.

$$\begin{aligned} & i\omega(\Lambda(\theta_i \wedge a(\theta_j)), U) + i\omega(\Lambda(a(\theta_i) \wedge \theta_j), U) \\ &= i\sum_k X_{kj}\omega(\Lambda(\theta_i \wedge \theta_k), U) + i\sum_k X_{ki}\omega(\Lambda(\theta_k \wedge \theta_j), U) \\ &= 2i(\sum_k X_{kj}U_{ik} + X_{ki}U_{kj}) = 2i((UX)_{ij} - (XU)_{ij}); \end{aligned}$$

comme $U$ est vertical en $a$, $XU + UX = 0$, donc la somme en $i$ est égale à $4i(UX)_{ij}$. Le résultat final est donc

$$d\omega(\hat{\theta_i^h}, \hat{\theta_j^h}, U) = (\frac{1}{2} - \frac{s}{12})(4U_{ij} + 4i(XU)_{ij}) = (1 - \frac{s}{6})4U^a_{ij}$$

où $U^a$ désigne la composante anti-holomorphe de $U(\frac{1}{2}(I + i\mathbb{J})U)$. Comme indiqué au début de la démonstration , en divisant par 4, on obtient le résultat.

Les deux résultats annexes s'obtiennent comme suit. Pour la première,

$$(U^h)^a = \frac{1}{2}(I + i\mathbb{J})U^h = \frac{1}{4}(I + i\mathbb{J})(I - i\mathbb{J})U = 0$$

car $(I+i\mathbb{J})(I-i\mathbb{J}) = I - i^2\mathbb{J}^2 = 0$. Pour la seconde,

$$(U^a)^a = \frac{1}{4}(I+i\mathbb{J})^2 U = U^a.$$

□

***Proposition 10.2.2.*** — *On se place en un point $a$ de $\tau(M)$. On désigne par $U$ un vecteur tangent vertical en $a$. On désigne par $R(x) = (x; \theta_1, ..., \theta_4)$ un repère en $x = \pi(a)$. Avec les mêmes notations que dans la précédente proposition*

$$d\omega(\hat{\theta}_i^{\ h}, \hat{\theta}_j^{\ a}, U) = \omega(\Lambda(B(\theta_i^h \wedge \theta_j^a)), U)$$

*Démonstration.* — Examinons d'abord le terme $\Lambda(\theta_i^h \wedge \theta_j^a)$. Écrivons que $\theta_i^h \wedge \theta_j^a \in \wedge_- \oplus (\Phi(a))$, soit $\theta_i^h \wedge \theta_j^a = \alpha + \lambda\Phi(a)$, avec $\alpha \in \wedge_-$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors $\Lambda(\theta_i^h \wedge \theta_j^a) = [a, \Phi^{-1}(\alpha) + \lambda a] = 0$ (proposition 8.3.2 : commutation entre $a >> 0$ et $\Phi^{-1}\alpha << 0$). On déduit

$$\begin{aligned} d\omega(\hat{\theta}_i^{\ h}, \hat{\theta}_j^{\ a}, U) &= \omega(\Lambda(((\frac{1}{2} - \frac{s}{12})I + B + W_-)\theta_i^h \wedge \theta_j^a), U) \\ &= \omega(\Lambda((B + W_-)\theta_i^h \wedge \theta_j^a), U). \end{aligned}$$

La contribution de $W_-$ est nulle pour les mêmes raisons. □

## 10.3. Condition pour que $(\tau(M), \mathbb{J})$ soit kählérien

Précisons ici ce que l'on prend comme définition d'une variété kählérienne : c'est une variété $V$ $C^\infty$,riemannienne, munie d'une structure presque complexe $\mathbb{J}$ qui soit parallèle, c'est à dire que $\nabla\mathbb{J} = 0$, ou encore pour tout champs $X$ et $Y$ sur $V$, $\nabla_X(\mathbb{J}(Y)) = \mathbb{J}(\nabla_X Y)$. Si on désigne par $\omega$ la forme de Kähler ($\omega(X,Y) = g(X, \mathbb{J}(Y))$) Cette définition équivaut à $\mathbb{J}$ intégrable et $d\omega = 0$.

***Proposition 10.3.1.*** — *Si $g$ est anti-autoduale, on a les équivalences*

$$(\tau(M), \mathbb{J}) \text{ kählérien } \iff d\omega = 0 \iff \hat{R}|_{\wedge_+} = \frac{1}{2} Id_{\wedge_+}.$$

***Remarque 10.3.2.*** — Dans l'article **[H]**, on montre que les seules variétés compactes de dimension 4 ayant un espace de twisteurs kählérien sont conformes équivalentes à $S^4$ ou $P_2(\mathbf{C})$, munies de leurs métriques usuelles.

*Démonstration.* — La première équivalence est la définition. Démontrons la seconde équivalence.

$\Rightarrow$ Si $d\omega = 0$, par la proposition 10.2.1, $s = 6$ ; Par la proposition 10.2.2,

$$\Lambda((B(\theta_i^h \wedge \theta_j^a))(a) = [a, \Phi^{-1}(B(\theta_i^h \wedge \theta_j^a)] = 0.$$

Notons pour simplifier $\wedge_+ = \wedge_+^2 T_x M$ et $\wedge_- = \wedge_-^2 T_x M$. Comme $B(\wedge_+) \subseteq \wedge_-$ et inversement, $B(\theta_i^h \wedge \theta_j^h) \in \wedge_-$, d'où

$$\Lambda(B(\theta_i^h \wedge \theta_j^h))(a) = [a, \Phi^{-1}(B(\theta_i^h \wedge \theta_j^h))] = 0.$$

Par conjugaison, on déduit aussi $\Lambda(B(\theta_i^a \wedge \theta_j^a))(a) = [a, \Phi^{-1}(B(\theta_i^a \wedge \theta_j^a))] = 0$. De ces propriétés et du fait que $\theta_i = \theta_i^h + \theta_i^a$, on obtient

$$[a, \Phi^{-1}(B(\theta_i \wedge \theta_j))] = 0.$$

Mais le terme $u = \Phi^{-1}(B(\theta_i \wedge \theta_j))$ ne dépend pas de $a$, mais seulement de $x$. L'endomorphisme $u \in so(T_xM)$ est donc tel que $[a, u] = a \circ u - u \circ a = 0$, c'est à dire que $u$ commute avec tous les éléments $a \in \pi^{-1}(x)$. Montrons alors le

***Lemme 10.3.3.*** — *Si $u \in so(T_xM)$ commute avec tous les éléments de $\pi^{-1}(x)$, alors $u = 0$.*

*Démonstration.* — En effet, en utilisant la notation des quaternions, un élément $a$ de $\pi^{-1}(x)$ s'écrit $a(v) = p.v$ ou $p$ est un quaternion pur de norme 1 (partie réelle nulle). Si $u \circ a = a \circ u$, on obtient $u(p.v) = p.u(v)$. Comme par ailleurs $u$ est $\mathbf{R}$-linéaire, $u$ est $\mathbf{H}$- linéaire. Il existe donc $\lambda \in \mathbf{H}$ tel que $u(v) = \lambda.v$. En réutilisant le fait que $u$ commute avec tout $a$ , on aboutit au fait que $\lambda$ commute avec tout élément de $H$, c'est à dire que $\lambda$ est réel. Mais $u$ étant de plus anti-symétrique, $u = 0$. □

D'où $\hat{R} = \frac{1}{2}Id + W_-$, d'où $\hat{R}_{\wedge_+} = \frac{1}{2}Id$.

$\Leftarrow$ Si $\hat{R}_{\wedge_+} = \frac{1}{2}I$, alors s=6 et $B(\wedge_+) \subseteq \wedge_+$ ; comme de plus $B(\wedge_+) \subseteq \wedge_-$ on déduit $B|_{\wedge_+} = 0$. Par symétrie de $B$, $B = 0$, soit $d\omega = 0$, car les seules configurations éventuellement non nulles ont été calculées par les deux dernières propositions.

□

# CHAPITRE 11

# CALCUL DU HESSIEN $id'd"\omega$

## 11.1. Préparatifs

**11.1.1. Vecteurs tangents considérés dans le calcul.** — On distingue deux types de vecteurs tangents élémentaires : champs horizontaux ou verticaux, champs holomorphes ou anti-holomorphes. Un vecteur tangent quelconque est décomposable selon ces deux types car

$$(T_a\tau(M))^c = \mathcal{H}_a^c \oplus \mathcal{V}_a^c = \mathcal{E}_a \oplus \mathcal{F}_a$$

avec :
$\mathcal{H}_a^c$=complexifié de l'espace des vecteurs tangents en $a$ à $\tau(M)$, horizontaux.
$\mathcal{V}_a^c$=complexifié de l'espace des vecteurs tangents en $a$ à $\tau(M)$, verticaux.
$\mathcal{E}_a$=espace complexe des vecteurs tangents en $a$ à $\tau(M)$, holomorphes.
$\mathcal{F}_a$=espace complexe des vecteurs tangents en $a$ à $\tau(M)$, anti-holomorphes.
Les vecteurs holomorphes horizontaux en $a$, de coordonnées $(x, X)$ sont des combinaisons linéaires de vecteurs de la forme $(I - i\mathbb{J})(\hat{\theta_k})$ : en effet, si $\xi$ est un tel vecteur , il existe un seul $\theta \in T_xM^c$, tel que $\xi = \hat{\theta}^a$ (relèvement en $a$ , $\mathbf{R}$-isomorphisme entre $T_xM$et $\mathcal{H}_a$, donc entre $T_xM^c$ et $\mathcal{H}_a^c$ par extension $\mathbf{C}$-linéaire de cet isomorphisme). Comme $\xi$ est de plus supposé holomorphe $\mathbb{J}(\xi) = i\xi$. On déduit que $(I + i\mathbb{J})\hat{\theta} = 0$.

Comme par ailleurs $\hat{\theta} = \frac{1}{2}(I - i\mathbb{J})\hat{\theta} + \frac{1}{2}(I + i\mathbb{J})\hat{\theta}$, on obtient $\xi = \hat{\theta} = \frac{1}{2}(I - i\mathbb{J})\hat{\theta}$. Il suffit alors de décomposer $\theta$ , dans la base $(\theta_1, ..., \theta_4)$. Pour cette raison, il suffit de considérer(et on notera) des vecteurs tangents horizontaux holomorphes de la forme $(I - i\mathbb{J})(\hat{\theta_k})$. De même, il suffit de considérer des vecteurs horizontaux anti-holomorphes de la forme $(I + i\mathbb{J})(\hat{\theta_k})$.

Un vecteur vertical $V_a$ en un point $a$ de $\tau(M)$, de coordonnées $(x, X)$, où $x \in M$, et $X \in Z_+(2)$ est de la forme $V_a = [X, A]^\bullet = \sum_{i,j}[X, A]_{ij}\frac{\partial}{\partial X_{ij}}$, où $A$ désigne une matrice antisymétrique de $M(2n, \mathbf{R})$ et$[X, A]$ désigne le crochet de deux matrices. Par extension $\mathbf{C}$-linéaire, un vecteur vertical de $\mathcal{V}_a^c$ peut être représenté par la même formule $[X, A]^\bullet$, où $A$ est antisymétrique de $M(2n, \mathbf{C})$. Comme pour les vecteurs horizontaux, il suffit de considérer seulement des vecteurs de la forme $(I - i\mathbb{J})(V)$ et $(I + i\mathbb{J})(V)$. Pour éviter les confusions entre $a$, point de $\tau(M)$ et $a$, type anti-holomorphe, on ne mentionne pas le point.

Par convention, lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, on écrira $[X, A]$ au lieu de $[X, A]^\bullet$.

**11.1.2. Formule utilisée.** — Pour calculer $d'd"\omega$, il est plus facile de calculer $dd'\omega = -d'd"\omega$, car on peut dans ce cas utiliser la formule globale : si $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ sont des vecteurs tangents complexes à $\tau(M)$

$$
\begin{aligned}
dd'\omega(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \sum_{i=0}^{3}(-1)^i \xi_i(d'\omega(\xi_0, ..., \hat{\xi}_i, ..., \xi_3)) \\
&+ \sum_{(i,j), 0 \leq i < j \leq 3} (-1)^{i+j} d'\omega([\xi_i, \xi_j], \xi_0, ..., \hat{\xi}_i, ..., \hat{\xi}_j, ...\xi_3).
\end{aligned}
$$

**11.1.3. Tableau des combinaisons à calculer.** — Il résulte de ces commentaires et du fait que $\omega$ est de type $(2,2)$, que pour connaitre $d'd"\omega$ entièrement, il suffit de calculer $dd'\omega$ dans les 9 cas rassemblés dans le tableau ci-dessous, avec les notations $U, V, W, X$ vecteurs verticaux

| champ | $\xi_0$ | $\xi_1$ | $\xi_2$ | $\xi_3$ |
|---|---|---|---|---|
| type de champ | $h$ | $h$ | $ah$ | $ah$ |
| *cas* 1 | $\hat{\theta}_k^h$ | $\hat{\theta}_h^h$ | $\hat{\theta}_r^a$ | $\hat{\theta}_s^a$ |
| *cas* 2 | $\hat{\theta}_k^h$ | $U^h$ | $\hat{\theta}_r^a$ | $\hat{\theta}_s^a$ |
| *cas* 3 | $U^h$ | $V^h$ | $\hat{\theta}_k^a$ | $\hat{\theta}_h^a$ |
| *cas* 4 | $\hat{\theta}_k^h$ | $\hat{\theta}_h^h$ | $V^a$ | $\hat{\theta}_s^a$ |
| *cas* 5 | $\hat{\theta}_k^h$ | $U^h$ | $V^a$ | $\hat{\theta}_h^a$ |
| *cas* 6 | $U^h$ | $V^h$ | $W^a$ | $\hat{\theta}_k^h$ |
| *cas* 7 | $\hat{\theta}_k^h$ | $\hat{\theta}_h^h$ | $U^a$ | $V^a$ |
| *cas* 8 | $\hat{\theta}_k^h$ | $U^h$ | $V^a$ | $W^a$ |
| *cas* 9 | $U^h$ | $V^h$ | $W^a$ | $X^a$ |

### 11.2. Calcul final

On rappelle ici les différentes formules ou relations concernant $d$ et $d'$ dont nous nous servons pour traiter les différents cas : Pour des vecteurs de type holomorphes ($h$) ou anti-holomorphes ($a$), des vecteurs horizontaux $H$ ou verticaux ($V$)

(1)

$$d'\omega(h_1, h_2, a) = d\omega(h_1, h_2, a)$$

et

$$d'\omega = 0$$

pour toute autre combinaison de type ($a$ ou $h$) à l'ordre prés.

(2)

$$d\omega(H_1, H_2, H_3) = 0$$

(3)

$$d\omega(V_1, V_2, V_3) = 0$$

(4)

$$d\omega(H, V_1, V_2) = 0$$

(5)
$$d\omega(\theta_i^h,\theta_j^h,U^a)=(1-\frac{s}{6})U_{ij}^a$$
(6)
$$d\omega(\theta_i^h,\theta_j^a,U^h)=\omega(\Lambda(B(\theta_i^h\wedge\theta_j^a)),U^h).$$
Dans chaque cas, on transforme d'abord les expressions de type $d'\omega(...)$ en expressions de type $d\omega(...)$, via les relations (1), puis on calcule ces dernières en utilisant les relations (2) à (6).

**11.2.1. Cas 1.** — On prend
$$\xi_0=(I-i\mathbb{J})\hat{\theta}_k\ ,\ \xi_1=(I-i\mathbb{J})\hat{\theta}_h\ ,\ \xi_2=(I+i\mathbb{J})\hat{\theta}_r\ ,\ \xi_3=(I+i\mathbb{J})\hat{\theta}_s.$$
Dans le tableau ci-dessous, on calcule la première somme donnant $dd'\omega$ (somme en $(-1)^i$). On pose $\chi_i=d'\omega(\xi_0,...,\hat{\xi_i},...,\xi_3)$. rt représente le calcul effectif de $\chi_i$ pour la valeur $i$. On utilise aussi les abréviations : h$\leftrightarrow$ holomorphe , et ah$\leftrightarrow$ anti-holomorphe.

| $i$ | $\chi_i$ | $rt$ | commentaires | $(-1)^i\xi_i(\chi_i)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $d'\omega(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ | 0 | $\xi_2$ et $\xi_3$ sont ah | 0 |
| 1 | $d'\omega(\xi_0,\xi_2,\xi_3)$ | 0 | idem | 0 |
| 2 | $d'\omega(\xi_0,\xi_1,\xi_3)$ | 0 | $\xi_0$ et $\xi_1$ sont h, $\xi_3$ est ah et (2) | 0 |
| 3 | $d'\omega(\xi_0,\xi_1,\xi_2)$ | 0 | $\xi_0$ et $\xi_1$ sont h, $\xi_2$ est ah et (2) | 0 |

Pour calculer la deuxième somme, on pose $r_{ij}=[\xi_i,\xi_j]$, et on fait le calcul de
$$R_{ij}=d'\omega(r_{ij},\xi_0,...,\hat{\xi_i},...,\hat{\xi_j},...,\xi_3)$$
pour tous les couples (i,j) tels que $i<j$

$\underline{(i,j)=(0,1)}$ $R_{01}=d'\omega(r_{01},\xi_2,\xi_3)$. Comme $\xi_2$ et $\xi_3$ sont de type ah, $R_{01}=0$.

$\underline{(i,j)=(0,2)}$ $r_{02}=[\xi_0,\xi_2])=[X,\Omega_{kr}^{-+}]+H$ où $H$ est un vecteur horizontal. Alors, $R_{02}=d'\omega(r_{02},\xi_1,\xi_3)$. Comme $\xi_1$ est de type h et $\xi_3$ de type ah, pour passer à une expression utilisant $d$, il faut prendre la composante holomorphe de $r_{02}$, soit $\frac{1}{2}(I-i\mathbb{J})r_{02}$. On obtient
$$R_{02}=d'\omega(r_{02},\xi_1,\xi_3)=d\omega(\frac{1}{2}(I-i\mathbb{J})r_{02},\xi_1,\xi_3).$$
Comme $I$ et $\mathbb{J}$ conservent l'horizontalité et la verticalité des vecteurs, il en va de même de $I-i\mathbb{J}$ ; en particulier $(I-i\mathbb{J})H$ est horizontal. En utilisant le fait que $d\omega(H_1,H_2,H_3)=0$ pour tous champs horizontaux, la composante $d\omega((I-i\mathbb{J}(H),\xi_1,\xi_3)=0$. On obtient, en notant $[X,\Omega_{hs}^{-+}]^h=\frac{1}{2}(I-iX)[X,\Omega_{hs}^{-+}]=[X,\frac{1}{2}(I-iX)\Omega_{hs}^{-+}]$
$$\begin{aligned}R_{02}&=d\omega(\frac{1}{2}(I-i\mathbb{J})([X,\Omega_{kr}^{-+}]+H),\xi_1,\xi_3)\\&=d\omega(\xi_1,\xi_3,\frac{1}{2}(I-iJ)[X,\Omega_{kr}^{-+}])\\&=16\mathbb{G}(\Lambda(B(\theta_h^h\wedge\theta_s^a)),\frac{1}{2}(X+iI)([X,\Phi^{-1}(\hat{R}(\theta_k^h\wedge\theta_r^a))])\end{aligned}$$

Le coefficient 16 intervient suite à nos conventions $\theta_i^h = \frac{1}{2}(I - ia)\theta_i$, $\hat{\theta}_i^h = \frac{1}{2}(I - i\mathbb{J})\hat{\theta}_i = \hat{\theta_i^h}$,.... Du fait que $\theta_k^h \wedge \theta_r^a \in \wedge_- \oplus (\Phi(a))$ et que $W_-$ est à valeurs dans $\wedge_-$, lorsqu'on décompose $\hat{R} = \frac{s}{12}I + B + W$ les contributions de $\frac{s}{12}I$ et $W_-$ sont nulles. En effet si on écrit $\theta_k^h \wedge \theta_r^a = \mu + \lambda\Phi(a)$ avec $\mu \in \wedge_-$ et $\lambda \in \mathbf{R}$ alors

$$\begin{aligned}
[X, \Phi^{-1}(\hat{R}(\theta_k^h \wedge \theta_r^a))] &= [X, \Phi^{-1}(\frac{s}{12}I + B + W_-)(\theta_k^h \wedge \theta_r^a)] \\
[X, \Phi^{-1}(\frac{s}{12}I(\theta_k^h \wedge \theta_r^a))] &= \frac{s}{12}[X, \Phi^{-1}(\mu + \lambda\Phi(a))] \\
[X, \Phi^{-1}(\mu)] &= 0 \text{ à cause de la proposition 8.3.2} \\
\text{et } [X, \lambda\Phi(a)] &= \lambda[X, \Phi^{-1}(\Phi(a)] = 0.
\end{aligned}$$

Dans cette dernière égalité, il y a une légère ambiguité, la relation entre $a$ et $X$ est que $Mat(a, R(\pi_\tau(a))) = X$. Dans nos conventions $X$ représente $a$. Maintenant, $[X, \Phi^{-1}(W)] = [X, \Phi^{-1}(W_-)](W_+ = 0) = 0$ toujours à cause de la proposition 8.3.2. On conclut que

$$R_{02} = 8\mathbb{G}(\Lambda(B(\theta_h^h \wedge \theta_s^a)), (\mathbb{J} + iI)(\Lambda(B(\theta_k^h \wedge \theta_r^a)))).$$

$(i,j) = (0,3)$ C'est le même cas que ci-dessus, il suffit de permuter $\xi_2$ et $\xi_3$ ; soit $r$ et $s$

$$R_{03} = 8\mathbb{G}(\Lambda(B(\theta_h^h \wedge \theta_r^a)), (\mathbb{J} + iI)(\Lambda(B(\theta_k^h \wedge \theta_s^a)))).$$

$(i,j) = (1,2)$ $R_{12} = d'\omega([\xi_1, \xi_2], \xi_0, \xi_3)$ ; en comparant à $R_{03} = d'\omega([\xi_0, \xi_3], \xi_1, \xi_2)$ on voit que $R_{12}$ est obtenu à partir de $R_{03}$ en permutant $k$ et $h$ , et en permutant $r$ et $s$, soit

$$R_{12} = 8\mathbb{G}(\Lambda(B(\theta_k^h \wedge \theta_s^a)), (\mathbb{J} + iI)(\Lambda(B(\theta_h^h \wedge \theta_r^a)))).$$

$(i,j) = (1,3)$ $R_{13} = d'\omega([\xi_1, \xi_3], \xi_0, \xi_2)$ est obtenu à partir de $R_{12}$, en permutant $\xi_2$ et $\xi_3$ soit $r$ et $s$

$$R_{13} = 8\mathbb{G}(\Lambda(B(\theta_k^h \wedge \theta_r^a)), (\mathbb{J} + iI)(\Lambda(B(\theta_h^h \wedge \theta_s^a)))).$$

$(i,j) = (2,3)$ $R_{23} = d'\omega([\xi_2, \xi_3], \xi_0, \xi_1)$. Comme $\xi_2$ et $\xi_3$ sont de type ah, $[\xi_2, \xi_3]$ aussi ; de plus $[\xi_2, \xi_3] = [X, \Omega_{rs}^{++}] + H$ où $\Omega_{rs}^{++} = \widetilde{\Omega}((I+ia)\theta_r, (I+ia)\theta_s$ et $H$ est un vecteur horizontal complexe $R_{23} = d'\omega([\xi_2, \xi_3], \xi_0, \xi_1) = d\omega([\xi_2, \xi_3], \xi_0, \xi_1) = d\omega([X, \Omega_{rs}^{++}] + H, \xi_0, \xi_1)$. $d\omega(H, \xi_0, \xi_1) = 0$ car $d\omega = 0$ lorsque tous les vecteurs sont horizontaux ; il vient $R_{23} = d\omega([X, \Omega_{rs}^{++}], (I - i\mathbb{J})\hat{\theta}_k, (I - i\mathbb{J})\hat{\theta}_h)$.
Posons $U = [X, \Omega_{rs}^{++}]$. Alors, $R_{23} = 4d\omega(\hat{\theta}_k^h, \hat{\theta}_h^h, U) = 16d\omega(\hat{\theta}_k^h, \hat{\theta}_h^h, [X, \tilde{\Omega}(\theta_r^a, \theta_s^a)]) = 16d\omega(\hat{\theta}_k^h, \hat{\theta}_h^h, [X, \Phi^{-1}(\hat{R}(\theta_r^a \wedge \theta_s^a)])$. Cette dernière notation peut prêter à confusion, car $\Phi^{-1}(...)$ est un endomorphisme anti-symétrique et non une matrice. En fait on devrait dire $Mat(\Phi^{-1}(\hat{R}(\theta_r^a \wedge \theta_s^a)), \{\theta_k\})$. Pour ne pas alourdir les notations, on fera cet abus de langage.
Utilisons la décomposition $\hat{R} = \frac{s}{12}I + B + W$ : $(\theta_r^h \wedge \theta_s^h) \in \wedge_+$ implique $B(\theta_r^h \wedge \theta_s^h) \in \wedge_-$. De même $B(\theta_r^a \wedge \theta_s^a) \in \wedge_-$. Le terme en $W_-$ est nul aussi car $W_-$ est à valeurs dans $\wedge_-$. On déduit que dans la décomposition de $\hat{R}$, seul $\frac{s}{12}I$ a une contribution non nulle. Il reste donc

$$R_{23} = 4d\omega(\hat{\theta}_k^h, \hat{\theta}_h^h, U) = 16d\omega(\hat{\theta}_k^h, \hat{\theta}_h^h, U) = 16(1 - \frac{s}{6})\frac{s}{12}\Lambda(\theta_r^a \wedge \theta_s^a)_{kh}^a.$$

Pour obtenir le résultat final, celui indiqué dans le tableau, il faut diviser par 16

$$\begin{aligned}
d\omega(\hat{\theta_k}^h, \hat{\theta_h}^h \hat{\theta_r}^a, \hat{\theta_s}^a) &= \frac{1}{16}(-R_{01} + R_{02} - R_{03} - R_{12} + R_{13} - R_{23}) \\
&= 0 + \frac{1}{2}\mathbb{G}(\Lambda(B(\theta_h^h \wedge \theta_s^a)), (\mathbb{J} + iI)(\Lambda(B(\theta_k^h \wedge \theta_r^a)))) \\
&\quad -\frac{1}{2}\mathbb{G}(\Lambda(B(\theta_h^h \wedge \theta_r^a)), (\mathbb{J} + iI)(\Lambda(B(\theta_k^h \wedge \theta_s^a)))) \\
&\quad -\frac{1}{2}\mathbb{G}(\Lambda(B(\theta_k^h \wedge \theta_s^a)), (\mathbb{J} + iI)(\Lambda(B(\theta_h^h \wedge \theta_r^a)))) \\
&\quad +\frac{1}{2}\mathbb{G}(\Lambda(B(\theta_k^h \wedge \theta_r^a)), (\mathbb{J} + iI)(\Lambda(B(\theta_h^h \wedge \theta_s^a)))) \\
&\quad -(1 - \frac{s}{6})\frac{s}{12}\Lambda((\theta_r^a \wedge \theta_s^a))_{kh}^a
\end{aligned}$$

Les termes en $\mathbb{J}$ s'annulent dans $R_{02} + R_{13}$ ainsi que dans -($R_{03} + R_{12}$), car $\mathbb{J}^2$=-Id et $\mathbb{J}$ est $\mathbb{G}$ orthogonal, tandis que les autres termes sont les mêmes dans ces mêmes sommes, ce qui fait disparaitre les coefficients $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
d\omega(\hat{\theta_k}^h, \hat{\theta_h}^h \hat{\theta_r}^a, \hat{\theta_s}^a) &= i\mathbb{G}(\Lambda(B(\theta_h^h \wedge \theta_s^a)), (\Lambda(B(\theta_k^h \wedge \theta_r^a)))) \\
&\quad -i\mathbb{G}(\Lambda(B(\theta_h^h \wedge \theta_r^a)), (\Lambda(B(\theta_k^h \wedge \theta_s^a)))) - (1 - \frac{s}{6})\frac{s}{12}(\Lambda((\theta_r^a \wedge \theta_s^a)))_{kh}^a.
\end{aligned}$$

**11.2.2. Cas 2. —**

$$dd'\omega(\hat{\theta_k}^h, U^h, \hat{\theta_r}^a, \hat{\theta_s}^a) = -\overline{dd'\omega(\hat{\theta_k}^a, U^a, \hat{\theta_r}^h, \hat{\theta_s}^h)} = +\overline{dd'\omega(\hat{\theta_r}^h, \hat{\theta_s}^h, U^a, \hat{\theta_k}^a)}$$

ceci à cause de la propriété de conjuguaison ($\overline{\hat{\theta_i}^h} = \hat{\theta_i}^a, \overline{U^h} = U^a$). On reconnait la configuration 4 (voir plus loin) sous le terme de conjuguaison ; avec les changements d'indices et la conjuguaison on obtient le résultat

$$d\text{''}d\omega(\hat{\theta_k}^h, U^h, \hat{\theta_r}^a, \hat{\theta_s}^a) = (I - ia)\theta_k(\frac{s}{12})U_{rs}^h.$$

**11.2.3. Cas 3. —**

$$\begin{aligned}
dd'\omega(U^h, V^h, \hat{\theta_k}^a, \hat{\theta_h}^a) &= dd'\omega(\hat{\theta_k}^a, \hat{\theta_h}^a, U^h, V^h) = dd'\omega(\overline{\hat{\theta_k}^h}, \overline{\hat{\theta_h}^h}, \overline{U^a}, \overline{V^a}) \\
&= -\overline{dd'\omega(\hat{\theta_k}^h, \hat{\theta_h}^h, U^a, V^a)} = \overline{cas7} = 0
\end{aligned}$$

(Voir plus loin pour ce cas).

**11.2.4. Cas 4. —** On prend $\xi_0 = (I - i\mathbb{J})\hat{\theta_k}$, $\xi_1 = (I - i\mathbb{J})\hat{\theta_h}$, $\xi_2 = (I + iJ)U$ avec $U = [X, A]$, $\xi_3 = (I + i\mathbb{J})\hat{\theta_s}$.

| $i$ | $\chi_i$ | $rt$ | commentaires | $(-1)^i\xi_i(\chi_i)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $d'\omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ | 0 | $\xi_2$ et $\xi_3$ sont ah, | 0 |
| 1 | $d'\omega(\xi_0, \xi_2, \xi_3)$ | 0 | idem | 0 |
| 2 | $d'\omega(\xi_0, \xi_1, \xi_3)$ | 0 | $\xi_0\,\xi_1$ et $\xi_3$ sont h | 0 |
| 3 | $d'\omega(\xi_0, \xi_1, \xi_2)$ | (1) | (1) | (1) |

(1)$\chi_3 = d'\omega(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = d\omega(\xi_0, \xi_1, \xi_2)$ à cause des propriétés de $d'$. Utilisons la proposition qui indique que $d\omega(\hat{\theta_i}^h, \hat{\theta_j}^h, U) = (1 - \frac{s}{6})U_{ij}^a$. On obtient : $\chi_3 = 8(1 - \frac{s}{6})U_{kh}^a$. La somme des termes en $(-1)^i$ est donc $-16\hat{\theta_s}^a((1-\frac{s}{6})U^a_{kh})$. Pour obtenir le résultat final dans le tableau, il faut diviser par 16.

Calcul de la deuxième somme

$\underline{(i,j)=(0,1)}$

$$R_{01} = d'\omega(r_{01}, \xi_2, \xi_3) = 0$$

car $\xi_2$ et $\xi_3$ sont ah.

$\underline{(i,j)=(0,2)}$

$$\begin{aligned} r_{02} &= [\xi_0, \xi_2] = [(I-i\mathbb{J})\hat{\theta_k}, (I+i\mathbb{J})U] \\ &= (I+i\mathbb{J})[X, [\tilde{\eta}((I-ia)\theta_k, A]]^\bullet + i\sum_r (I+i\mathbb{J})(U)(X_{rk})\hat{\theta_r} = V+H \end{aligned}$$

où $H$ et $V$ sont les composantes horizontales et verticales de $r_{02}$ (proposition 9.3.1). $R_{02} = d'\omega(r_{02}, \xi_1, \xi_3) = d'\omega(H+V, \xi_1, \xi_3) = d'\omega(H, \xi_1, \xi_3) + d'\omega(V, \xi_1, \xi_3)$; comme tous les vecteurs sont horizontaux, $d'\omega(H, \xi_1, \xi_3) = 0$ et comme $V$ et $\xi_3$ sont ah on obtient finalement

$$R_{02} = d'\omega(V, \xi_1, \xi_3) = 0.$$

$\underline{(i,j)=(0,3)}$ $r_{03} = [\xi_0, \xi_3] = [(I-i\mathbb{J})\hat{\theta_k}, (I+i\mathbb{J})\hat{\theta_s}] = H+V$ où $H$ et $V$ sont donnés par la proposition 9.2.1. Ainsi, $R_{03} = d'\omega(r_{03}, \xi_1, \xi_2) = d\omega(\frac{1}{2}(I-i\mathbb{J})r_{03}, \xi_1, \xi_2)$. Comme $\xi_2$ est vertical, $d\omega(\frac{1}{2}(I-i\mathbb{J})V, \xi_1, \xi_2) = 0$ soit

$$R_{03} = d\omega(\frac{1}{2}(I-i\mathbb{J})H, \xi_1, \xi_2) = d\omega(\frac{1}{2}(I-i\mathbb{J})H, (I-i\mathbb{J})\hat{\theta_h}, (I+i\mathbb{J})U)$$

avec $H = (I+i\mathbb{J})\nabla_{\widehat{(I-ia)\theta_k}}\theta_s - (I-i\mathbb{J})\nabla_{\widehat{(I+ia)\theta_s}}\theta_k$. Utilisons les deux identités $(I-i\mathbb{J})(I+i\mathbb{J}) = 0$, $(I-i\mathbb{J})^2 = 2(I-i\mathbb{J})$. On trouve

$$\frac{1}{2}(I-i\mathbb{J})H = -\frac{1}{2}(I-i\mathbb{J})^2\nabla_{\widehat{(I+ia)\theta_s}}\theta_k = -(I-i\mathbb{J})\nabla_{\widehat{(I+ia)\theta_s}}\theta_k;$$

D'où

$$\begin{aligned} R_{03} &= -d\omega((I-i\mathbb{J})\nabla_{\widehat{(I+ia)\theta_s}}\theta_k, (I-i\mathbb{J})\hat{\theta_h}, (I+i\mathbb{J})U) \\ &= -\sum_l \tilde{\eta}_{lk}((I+ia)\theta_s)d\omega(I-i\mathbb{J})\hat{\theta_l}, (I-i\mathbb{J})\hat{\theta_h}, (I+i\mathbb{J})U) \\ &= -8\sum_l \tilde{\eta}_{lk}((I+ia)\theta_s)d\omega(\hat{\theta_l}^h, \hat{\theta_h}^h, U^a) = -8\sum_l \tilde{\eta}_{lk}((I+ia)\theta_s)(1-\frac{s}{6})U^a_{lh} \\ &= +8(1-\frac{s}{6})(\tilde{\eta}((I+ia)\theta_s)U^a)_{kh}. \end{aligned}$$

$\underline{(i,j)=(1,2)}$ On compare $R_{12}$ à $R_{02}$ :
$R_{12} = d'\omega([\xi_1, \xi_2], \xi_0, \xi_3)$ et $R_{02} = d'\omega([\xi_0, \xi_2], \xi_1, \xi_3)$. On voit que $R_{12}$ est obtenu à partir de $R_{02}$ en permutant $\xi_0$ et $\xi_1$ qui ont les mêmes types (h,H)(h=holomorphe,H=horizontal), donc en permutant $k$ et $h$, soit

$$R_{12} = 0.$$

$\underline{(i,j)=(1,3)}$ On compare $R_{13}$ à $R_{03}$ :
$R_{13} = d'\omega([\xi_1, \xi_3], \xi_0, \xi_2)$ et $R_{03} = d'\omega([\xi_0, \xi_3], \xi_1, \xi_2)$. On voit que $R_{13}$ est obtenu à

partir de $R_{03}$ en permutant $\xi_0$ et $\xi_1$ qui ont les mêmes types (h,H), donc en permutant $k$ et $h$,

$$R_{13} = +8(1-\frac{s}{6})(\tilde{\eta}((I+ia)\theta_s)U^a)_{hk}.$$

$\underline{(i,j)=(2,3)}$ $r_{23} = [\xi_2, \xi_3] = [(I+i\mathbb{J})U, (I+i\mathbb{J})\hat{\theta_s}]$ est de type ah, comme crochet de deux champs de type ah. On déduit que $R_{23} = d'\omega(r_{23}, \xi_0, \xi_1) = d\omega(r_{23}, \xi_0, \xi_1)$ car $\xi_0$ et $\xi_1$ sont de type h. Par la proposition 9.3.1 , avec $\epsilon = \epsilon' = 1$ : $[\xi_2, \xi_3] = -[(I+i\mathbb{J})\hat{\theta_s}, (I+i\mathbb{J})U] = -(I+i\mathbb{J})[X, [\tilde{\eta}((I+ia)\theta_s), A]]^{\bullet}$+H ou H est horizontal.
Mais comme $\xi_0$ et $\xi_1$ sont aussi horizontaux, $d\omega(H, \xi_0, \xi_1) = 0$ ; il reste

$$\begin{aligned}
R_{23} &= -d\omega((I-i\mathbb{J})\hat{\theta_k}, (I-i\mathbb{J})\hat{\theta_h}, (I+i\mathbb{J})[X, [\tilde{\eta}((I+ia)\theta_s), A]]^{\bullet}) \\
&= -8d\omega((\hat{\theta_k}^h, \hat{\theta_h}^h, \frac{1}{2}(I+i\mathbb{J})[X, [\tilde{\eta}((I+ia)\theta_s), A]]^{\bullet})) \\
&= -8(1-\frac{s}{6})[X, [\tilde{\eta}(I+ia)\theta_s, A]]^a_{kh}
\end{aligned}$$

Globalement, dans le cas 4 :
$dd'\omega(\hat{\theta_k}^h, \hat{\theta_h}^h, U^a, \hat{\theta_s}^a) = \frac{1}{16}((-1)^3\xi_3(\chi_3) - R_{01} + R_{02} - R_{03} - R_{12} + R_{13} - R_{23}) =$
$(1)\hat{\theta_s}^a((1-\frac{s}{6})U^a_{kh})$
$(2) - \frac{1}{2}(1-\frac{s}{6})(\tilde{\eta}((I+ia)\theta_s)U^a)_{kh}$
$(3) + \frac{1}{2}(1-\frac{s}{6})(\tilde{\eta}((I+ia)\theta_s)U^a)_{hk}$
$(4) + \frac{1}{2}(1-\frac{s}{6})[X, [\tilde{\eta}(I+ia)\theta_s, A]]^a_{kh}$.

***Remarque 11.2.1***. — Il y a dans ces notations plusieurs ambiguités possibles : d'une part l'indice s ne doit pas être confondu avec s, la courbure scalaire, d'autre part pour un élément $\theta$ de $T_xM$, (*)$\hat{\theta}^a$ désigne ici la composante anti-holomorphe du relevé horizontal de $\theta$ en $a$, (**)$\frac{1}{2}(I+i\mathbb{J})\hat{\theta}^a = \frac{1}{2}((\widehat{I+ia})\theta)^a$. Dans le cas de (*), $a$ indique une composante anti-holomorphe, dans (**) $a$ désigne le point $a$ de $\tau(M)$ en lequel on calcule $d\omega$.

$(1) = \hat{\theta_s}^a(\frac{s}{6})U^a_{kh} - (1-\frac{s}{6})\hat{\theta_s}^a(\frac{1}{2}((I+i\mathbb{J})[X,A])_{kh})$. Pour une fonction $f$ qui ne dépend que de $x$, ce qui est le cas de la fonction $s$,

$$\hat{\theta_s}^a(f) = \frac{1}{2}(\widehat{I+ia})\theta_s(f) = \frac{1}{2}((I+ia)\theta_s + [X, \tilde{\eta}(I+ia)\theta_s])f = \frac{1}{2}((I+ia)\theta_s(f)$$

car le deuxième terme est nul. Donc, $\hat{\theta_s}^a(\frac{s}{6})U^a_{kh} = \frac{1}{2}(I+ia)\theta_s(\frac{s}{6})U^a_{kh}$. Pour le reste du calcul, on pose $\lambda = \tilde{\eta}(I+ia)\theta_s$. Concernant le terme $(1-\frac{s}{6})\hat{\theta_s}^a(\frac{1}{2}((I+i\mathbb{J})[X,A])_{kh})$ , seule agit sur la fonction la partie verticale de $\hat{\theta_s}^a$ qui est d'après ce qui précède $\frac{1}{2}[X,\lambda]$. Soit (1)=$\frac{1}{2}(I+ia)\theta_s(\frac{s}{6})U^a_{kh} - (1-\frac{s}{6})\frac{1}{2}[X,\lambda](\frac{1}{2}((I+i\mathbb{J})[X,A])_{kh})$. (Le crochet correspond au champ de vecteurs). On a $((I+i\mathbb{J})[X,A])_{kh} = [X,(I+iX)A]_{kh} = (XA - iA - AX - iXAX)_{kh}$.

Quand on applique le champ $[X,\lambda]$ à cette fonction, il suffit de remplacer $X$ par $[X,\lambda]$, soit

$$\begin{array}{rcl}
[X,\lambda]((XA)_{kh}) & = & ([X,\lambda]A)_{kh} \\
[X,\lambda]((iA))_{kh} & = & 0 \text{ car } A \text{ est une matrice fixée} \\
[X,\lambda](AX)_{kh}) & = & (A[X,\lambda])_{kh} \\
[X,\lambda]((iXAX)_{kh}) & = & i([X,\lambda]AX + XA[X,\lambda])_{kh}.
\end{array}$$

On déduit

$$\begin{array}{rcl}
(1) & = & \frac{1}{2}(I+ia)\theta_s(\frac{s}{6})U^a_{kh} - \frac{1}{4}(1-\frac{s}{6})([[X,\lambda],A] - i[X,\lambda]AX - iXA[X,\lambda])_{kh} \\
(2) & = & -\frac{1}{4}(1-\frac{s}{6})(\lambda[X,(I+iX)A])_{kh} \\
(3) & = & +\frac{1}{4}(1-\frac{s}{6})(\lambda[X,(I+iX)A])_{hk} = +\frac{1}{4}(1-\frac{s}{6})([X,(I+iX)A]\lambda)_{kh} \\
(4) & = & \frac{1}{4}(1-\frac{s}{6})([X,(I+iX)[\lambda,A]])_{kh}.
\end{array}$$

Examinons la somme de matrices (qui apparaissent ci-dessus) :
$[[X,\lambda],A] - i[X,\lambda]AX - iXA[X,\lambda] + \lambda[X,(I+iX)A] - [X,(I+iX)A]\lambda - [X,(I+iX)[\lambda,A]]$

$$\begin{array}{rcl}
[[X,\lambda],A] & = & X\lambda A - \lambda XA - AX\lambda + A\lambda X \\
-i[X,\lambda]AX & = & -iX\lambda AX + i\lambda XAX \\
-iXA[X,\lambda] & = & -iXAX\lambda + iXA\lambda X \\
\lambda[X,(I+iX)A] & = & \lambda XA - i\lambda A - \lambda AX - i\lambda XAX \\
-[X,(I+iX)A]\lambda & = & -XA\lambda + iA\lambda + AX\lambda + iXAX\lambda \\
-[X,(I+iX)[\lambda,A]] & = & -X\lambda A + XA\lambda + i\lambda A - iA\lambda + \lambda AX - A\lambda X + iX\lambda AX - iXA\lambda X.
\end{array}$$

Cette somme est nulle(!!). Il reste donc :

$$dd'\omega(\hat{\theta_k}^h, \hat{\theta_h}^h, U^a, \hat{\theta_s}^a) = (I+ia)\theta_s(\frac{s}{12})U^a_{kh}.$$

**11.2.5. Cas 5.** — $\xi_0 = (I - i\mathbb{J})\hat{\theta_k}$, $\xi_1 = (I - i\mathbb{J})U$, $\xi_2 = (I + i\mathbb{J})V$, $\xi_3 = (I + i\mathbb{J})\hat{\theta_h}$ avec $U = [X,A]$ et $V = [X,C]$ ($C$ et non $B$ pour éviter des confusions avec l'opérateur $B$, de $\wedge^2 TM$).

| $i$ | $\chi_i$ | $rt$ | commentaires | $(-1)^i\xi_i(\chi_i)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $d'\omega(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ | 0 | $\xi_2$ et $\xi_3$ sont ah | 0 |
| 1 | $d'\omega(\xi_0,\xi_2,\xi_3)$ | 0 | idem | 0 |
| 2 | $d'\omega(\xi_0,\xi_1,\xi_3)$ | (1) | $\xi_0$ et $\xi_1$sont h, $\xi_3$ est ah | (1) |
| 3 | $d'\omega(\xi_0,\xi_1,\xi_2)$ | 0 | $\xi_1$ et $\xi_2$sont verticaux | 0 |

$$\begin{array}{rcl}
(1) & = & \chi_2 = d'\omega(\xi_0,\xi_1,\xi_3) = d\omega(\xi_0,\xi_1,\xi_3) = -d\omega(\xi_0,\xi_3,\xi_1) \\
& = & -d\omega((I-i\mathbb{J})\hat{\theta_k}, (I+i\mathbb{J})\hat{\theta_h}, (I-i\mathbb{J})U) \\
& = & -8d\omega(\hat{\theta_k}^h, \hat{\theta_h}^a, U^h) = -8\mathbb{G}(\Lambda(B(\theta^h_k \wedge \theta^a_h)), \mathbb{J}U^h) \\
& = & -8i\mathbb{G}(\Lambda(B(\theta^h_k \wedge \theta^a_h)), U^h).
\end{array}$$

Notons que $\mathbb{J}U^h = iU^h$ car $U^h$ est holomorphe. D'où :

$$(-1)^2\xi_2(\chi_2) = -16iV^a(\mathbb{G}(\Lambda(B(\theta_k^h \wedge \theta_h^a)), U^h)).$$

Calcul des sommes à double indice

$\underline{(i,j) = (0,1)}$

$$R_{01} = d'\omega(r_{01}, \xi_2, \xi_3) = 0$$

car $\xi_2$ et $\xi_3$ sont ah.

$\underline{(i,j) = (0,2)}$ $r_{02} = [\xi_0, \xi_2] = [(I - i\mathbb{J})\hat{\theta_k}, (I + i\mathbb{J})V] = Ho + Ve$, Ho et Ve désignant les composantes horizontale et verticale, données par la proposition 9.2.1, avec $\epsilon = -1$,$\epsilon' = +1$, et en remplaçant $U$ par V.

$$R_{02} = d'\omega(r_{02}, \xi_1, \xi_3).$$

$Ve = (I + i\mathbb{J})[X, [\tilde{\eta}((I - ia)\theta_k), C]]$ est vertical comme $Ve$ est aussi ah, $d'\omega(Ve, \xi_1, \xi_3) = 0$. Il reste donc

$$\begin{aligned} R_{02} &= d'\omega(Ho, \xi_1, \xi_3) = d'\omega(i\sum_r (I + i\mathbb{J})(V)(X_{rk})\hat{\theta_r}, (I - i\mathbb{J})U, (I + i\mathbb{J})\hat{\theta_h}) \\ &= -8i\sum_r V_{rk}^a d\omega(\hat{\theta_r}^h, \hat{\theta_h}^a, U^h) = -8i\sum_r V_{rk}^a \mathbb{G}(\Lambda(B(\theta_r^h \wedge \theta_h^a)), \mathbb{J}U^h) \\ &= 8\sum_r V_{rk}^a \mathbb{G}(\Lambda(B(\theta_r^h \wedge \theta_h^a)), U^h). \end{aligned}$$

Notons que $\mathbb{J}U^h = iU^h$ car $U^h$ est holomorphe.

$\underline{(i,j) = (0,3)}$ $r_{03} = [\xi_0, \xi_3] = [(I - i\mathbb{J})\hat{\theta_k}, (I + i\mathbb{J})\hat{\theta_h}]$=(h)+(ah), ou (h) et (ah) désignent les composantes holomorphes et anti-holomorphes. $R_{03} = d'\omega((h) + (ah), \xi_1, \xi_2)$. Comme $\xi_2$ est ah, la composante $d'\omega((ah), \xi_1, \xi_2) = 0$. D'où $R_{03} = d\omega(h, \xi_1, \xi_2)$. Comme $\xi_1$ et $\xi_2$ sont verticaux,

$$R_{03} = 0.$$

$\underline{(i,j) = (1,2)}$ $r_{12} = [\xi_1, \xi_2] = [(I - i\mathbb{J})U, (I + i\mathbb{J})V] = 0$ à cause de la proposition 9.4.1. D'ou

$$R_{12} = 0.$$

$\underline{(i,j) = (1,3)}$ $r_{13} = [\xi_1, \xi_3] = [(I - i\mathbb{J})U, (I + i\mathbb{J})\hat{\theta_h}] = Ho + Ve$ , Ho et Ve désignant les composantes horizontale et verticale, données par la proposition 9.3.1, avec $\epsilon = +1$,$\epsilon' = -1$. $R_{13} = d'\omega(r_{13}, \xi_0, \xi_2) = d'\omega(Ho + Ve, (I - i\mathbb{J})\hat{\theta_k}, (I + i\mathbb{J})V)$. La contribution de Ve est nulle car $\xi_2$ est vertical. Il reste donc

$$R_{13} = d'\omega(Ho, (I - i\mathbb{J})\hat{\theta_k}, (I + i\mathbb{J})V).$$

$Ho = i\sum_r (I - i\mathbb{J})(U)(X_{rh})\hat{\theta_r} = 2i\sum_r (U)_{rh}^h \hat{\theta_r}$. ($-\epsilon i = -i$, mais il faut prendre l'opposé à cause de l'ordre).

$$\begin{aligned} R_{13} &= 8i\sum_r U_{rh}^h d\omega(\hat{\theta_r}^h, \hat{\theta_k}^h, V^a) = 8i(1 - \frac{s}{6})\sum_r U_{rh}^h V_{rk}^a \\ &= -8i(1 - \frac{s}{6})(V^a U^h)_{kh}. \end{aligned}$$

$\underline{(i,j)=(2,3)}$ $r_{23}=[\xi_2,\xi_3]=[(I+i\mathbb{J})V,(I+i\mathbb{J})\hat{\theta}_h]=Ho+Ve$, $Ho$ et $Ve$ désignant les composantes horizontale et verticale, qui sont données par la proposition 9.3.1, avec $\epsilon=\epsilon'=1$. $R_{23}=d'\omega(r_{23},(I-i\mathbb{J})\hat{\theta}_k,(I-i\mathbb{J})U))=\frac{1}{2}d'\omega((I+iJ)r_{23},(I-i\mathbb{J})\hat{\theta}_k,(I-i\mathbb{J})U))=\frac{1}{2}d\omega((I+iJ)r_{23},(I-i\mathbb{J})\hat{\theta}_k,(I-i\mathbb{J})U))$ (passage de d' à d). La contribution de Ve est nulle car $(I-i\mathbb{J})U$ est aussi verticale. Il reste

$$R_{23}=\frac{1}{2}d\omega((I+iJ)Ho,(I-i\mathbb{J})\hat{\theta}_k,(I-i\mathbb{J})U)).$$

On a $Ho=2i\sum_r V^a_{rh}\hat{\theta}_r$, soit

$$\begin{aligned}R_{23} &= 8i\sum_r V^a_{rh}d\omega(\hat{\theta}_r{}^a,\hat{\theta}_k{}^h,U^h))=-8i\sum_r V^a_{rh}d\omega(\hat{\theta}_k{}^h,\hat{\theta}_r{}^a,U^h))\\ &= -8i\sum_r V^a_{rh}\mathbb{G}(\Lambda(B(\theta^h_k\wedge\theta^a_r),\mathbb{J}U^h)=8\sum_r V^a_{rh}\mathbb{G}(\Lambda(B(\theta^h_k\wedge\theta^a_r)),U^h)\end{aligned}$$

En conclusion :(il faut diviser par 16)

$$\begin{aligned}dd'\omega(\hat{\theta}_k{}^h,U^h,V^a,\hat{\theta}_s{}^a) &= -iV^a(\mathbb{G}(\Lambda(B(\theta^h_k\wedge\theta^a_h)),U^h))+\frac{1}{2}\sum_r V^a_{rk}\mathbb{G}(\Lambda(B(\theta^h_r\wedge\theta^a_h)),U^h)\\ &\quad -\frac{1}{2}i(1-\frac{s}{6})(V^aU^h)_{kh}-\frac{1}{2}\sum_r V^a_{rh}\mathbb{G}(\Lambda(B(\theta^h_k\wedge\theta^a_r)),U^h).\end{aligned}$$

**11.2.6. Cas 6.** — $\xi_0=(I-i\mathbb{J})U$,$\xi_1=(I-i\mathbb{J})V$,$\xi_2=(I+i\mathbb{J})W$, $\xi_3=(I+i\mathbb{J})\hat{\theta}_k$, avec $U=[X,A]$, $V=[X,B]$, $W=[X,C]$, et $A,B,C$ sont des matrices anti-symétriques (dans $M(2n,\mathbf{R})$).

| $i$ | $\chi_i$ | $rt$ | commentaires | $(-1)^i\xi_i(\chi_i)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $d'\omega(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ | 0 | $\xi_2$ et $\xi_3$ sont ah | 0 |
| 1 | $d'\omega(\xi_0,\xi_2,\xi_3)$ | 0 | idem | 0 |
| 2 | $d'\omega(\xi_0,\xi_1,\xi_3)$ | 0 | $\xi_0$ *et* $\xi_1$ sont verticaux | 0 |
| 3 | $d'\omega(\xi_0,\xi_1,\xi_2)$ | 0 | $\xi_0$ *et* $\xi_1$ sont verticaux | 0 |

Calcul des sommes à double indice

$\underline{(i,j)=(0,1)}$ $R_{01}=d'\omega(r_{01},\xi_2,\xi_3)$=0 car $\xi_2$ et $\xi_3$ sont ah.
$\underline{(i,j)=(0,2)}$ $r_{02}=[\xi_0,\xi_2]=0$ selon la proposition 9.3.1, d'ou $R_{02}=0$.
$\underline{(i,j)=(0,3)}$ $R_{03}=d'\omega(r_{03},\xi_1,\xi_2)=0$ car $\xi_1$ et $\xi_2$ sont verticaux.
$\underline{(i,j)=(1,2)}$ $R_{12}=0$. Idem au cas (i,j)=(0,2).
$\underline{(i,j)=(1,3)}$ $R_{13}=0$. Idem au cas (i,j)=(0,3).
$\underline{(i,j)=(2,3)}$ $R_{23}=d'\omega(r_{23},\xi_0,\xi_1)=0$car $\xi_0$ et $\xi_1$ sont verticaux.

En conclusion,

$$dd'\omega(\xi_0,\xi_1,\xi_2,\xi_3)=0.$$

**11.2.7. Cas 7.** — $\xi_0=(I-i\mathbb{J})\hat{\theta}_k$, $\xi_1=(I-i\mathbb{J})\hat{\theta}_h$, $\xi_2=(I+i\mathbb{J})U$, $\xi_3=(I+i\mathbb{J})V$, avec $U=[X,A]$, $V=[X,B]$, et $A$, $B$ sont des matrices anti-symétriques (dans $M(2n,\mathbf{R})$).

| $i$ | $\chi_i$ | $rt$ | commentaires | $(-1)^i\xi_i(\chi_i)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $d'\omega(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ | 0 | $\xi_2$ et $\xi_3$ sont ah | 0 |
| 1 | $d'\omega(\xi_0,\xi_2,\xi_3)$ | 0 | idem | 0 |
| 2 | $d'\omega(\xi_0,\xi_1,\xi_3)$ | (1) | | (1) |
| 3 | $d'\omega(\xi_0,\xi_1,\xi_2)$ | (2) | | (2) |

$$\begin{aligned}(1) &= \chi_2=d'\omega(\xi_0,\xi_1,\xi_3)=d\omega(\xi_0,\xi_1,\xi_3)=d\omega((I-i\mathbb{J})\hat{\theta}_k,(I-i\mathbb{J})\hat{\theta}_h,(I+i\mathbb{J})V)\\ &= 8d\omega(\hat{\theta}_k^{\ h},\hat{\theta}_h^{\ h},V^a)=8(1-\frac{s}{6})V^a_{kh}. \quad (V^{aa}=V^a).\\ (2) &= \chi_3=8(1-\frac{s}{6})U^a_{kh}.\end{aligned}$$

D'où :
(1)$=(-1)^2\xi_2(\chi_2)=16U^a((1-\frac{s}{6})V^a_{kh})$. Comme $s$ est une fonction de $x$ seulement et que $U^a$ a une action nulle sur de telles fonctions, $(1)=16(1-\frac{s}{6})U^a(V^a_{kh})$. De même, en permutant $\xi_2$ et $\xi_3$, $(2)=(-1)^3\xi_3(\chi_3)=-16(1-\frac{s}{6})V^a(U^a_{kh})$. On obtient

$$(1)+(2)=16(1-\frac{s}{6})[U^a,V^a]_{kh}.$$

Calcul des sommes à double indice

$\underline{(i,j)=(0,1)}$ $R_{01}=d'\omega(r_{01},\xi_2,\xi_3)=0$ car $\xi_2$ et $\xi_3$ sont ah.

$\underline{(i,j)=(0,2)}$ $r_{02}=[\xi_0,\xi_2]=[(I-i\mathbb{J})\hat{\theta}_k,(I+i\mathbb{J})U]=Ho+Ve$, $Ho$ et $Ve$ désignant les composantes horizontale et verticale, données par la proposition 9.3.1, avec $\epsilon=-1$, $\epsilon'=+1$.
$R_{02}=d'\omega(r_{02},\xi_1,\xi_3)=d'\omega(Ho+Ve,(I-i\mathbb{J})\hat{\theta}_h,(I+i\mathbb{J})V)$. La contribution de $Ve$ est nulle car $V$ est vertical, donc aussi $(I+i\mathbb{J})V$ et alors $d'\omega(Ve,(I-i\mathbb{J})\hat{\theta}_h,(I+i\mathbb{J})V)=0$.
Il reste donc

$$\begin{aligned}R_{02} &= d'\omega(Ho,(I-i\mathbb{J})\hat{\theta}_h,(I+i\mathbb{J})V)=id'\omega(\sum_r(I+i\mathbb{J})U(X_{rk})\hat{\theta}_r,(I-i\mathbb{J})\hat{\theta}_h,(I+i\mathbb{J})V)\\ &= id'\omega(\sum_r 2U^a_{rk}\hat{\theta}_r,2\hat{\theta}_h^{\ h},2V^a)=8i\sum_r d'\omega(U^a_{rk}\hat{\theta}_r,\hat{\theta}_h^{\ h},V^a).\end{aligned}$$

Par passage de $d'$ à $d$ cette dernière expression est égale à

$$R_{02}=8i\sum_r U^a_{rk}d\omega(\hat{\theta}_r^{\ h},\hat{\theta}_h^{\ h},V^a)=8i\sum_r U^a_{rk}(1-\frac{s}{6})V^a_{rh}=-8i(1-\frac{s}{6})(U^aV^a)_{kh}=0.$$

(pour cette dernière écriture, comme $U=[X,A]$, $V=[X,B]$, il s'agit du produit des deux matrices $\frac{1}{4}(I+iX)[X,A](I+iX)[X,B]=\frac{1}{4}[X,A](I-iX)(I+iX)[X,B]=0$ car $(I-iX)(I+iX)=0$ car $X^2=-I$).

$\underline{(i,j)=(0,3)}$ C'est le même cas que (i,j)=(0,2) en permutant le rôle de $U$ et $V$, soit $R_{03}=0$.

$\underline{(i,j)=(1,2)}$ C'est le même cas que (i,j)=(0,2) en permutant $k$ et $h$, soit : $R_{12}=0$.

$\underline{(i,j)=(1,3)}$ C'est le même cas que $R_{03}$ en permutant $h$ et $k$ soit $R_{13}=0$.

$\underline{(i,j)=(2,3)}$ Puisque $r_{23}=[\xi_2,\xi_3]=[(I+i\mathbb{J})U,(I+i\mathbb{J})V]=4[U^a,V^a]$,

$$R_{23} \quad = \quad d'\omega(r_{23},\xi_0,\xi_1)=4d\omega((\hat{\theta_k}^h,\hat{\theta_h}^h,4[U^a,V^a])=16(1-\frac{s}{6})[U^a,V^a]_{kh}.$$

En conclusion le cas 7

$$(1)+(2)-R_{23}=0.$$

**11.2.8. Cas 8.** — $\xi_0=(I-i\mathbb{J})\hat{\theta}_k$, $\xi_1=(I-i\mathbb{J})U$, $\xi_2=(I+i\mathbb{J})V$, $\xi_3=(I+i\mathbb{J})W$.

| $i$ | $\chi_i$ | $rt$ | commentaires | $(-1)^i\xi_i(\chi_i)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $d'\omega(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ | 0 | $\xi_2$ et $\xi_3$ sont ah | 0 |
| 1 | $d'\omega(\xi_0,\xi_2,\xi_3)$ | 0 | idem | 0 |
| 2 | $d'\omega(\xi_0,\xi_1,\xi_3)$ | 0 | $\xi_1 et \xi_3$ sont verticaux | 0 |
| 3 | $d'\omega(\xi_0,\xi_1,\xi_2)$ | 0 | $\xi_1 et \xi_2$ sont verticaux | 0 |

Calcul des sommes à deux indices

$\underline{(i,j)=(0,1)}$ $R_{01}=d'\omega(r_{01},\xi_2,\xi_3)=0$ car $\xi_2$ et $\xi_3$ sont ah.
$\underline{(i,j)=(0,2)}$ $R_{02}=d'\omega(r_{02},\xi_1,\xi_3)=0$ car $\xi_1$ et $\xi_3$ sont verticaux.
$\underline{(i,j)=(0,3)}$ $R_{03}=d'\omega(r_{03},\xi_1,\xi_2)=0$ car $\xi_1$ et $\xi_2$ sont verticaux.
$\underline{(i,j)=(1,2)}$ $r_{12}$ est vertical comme crochet de deux verticaux, d'où $R_{12}=d'\omega(r_{12},\xi_0,\xi_3)=0$ car $\xi_3$ est aussi vertical.
$\underline{(i,j)=(1,3)}$ Idem au cas $(i,j)=(1,2)$.
$\underline{(i,j)=(2,3)}$ Idem au cas $(i,j)=(1,2)$.

Pour le cas 8 on a donc

$$dd'\omega(\xi_0,\xi_1,\xi_2,\xi_3)=0.$$

On peut aussi raisonner en utilisant la propriété de conjugaison

$$\begin{aligned} dd'\omega(\hat{\theta_k}^h,U^h,V^a,W^a) &= -\overline{dd'\omega(\hat{\theta_k}^a,U^a,V^h,W^h)}=+\overline{dd'\omega(V^h,W^h,U^a,\hat{\theta_k}^a)} \\ &= 0=\overline{cas6} \end{aligned}$$

à une permutation près entre $U$,$V$ et $W$.

**11.2.9. Cas 9.** — Chaque fibre $\pi^{-1}(x)$ est kählérienne, donc d$\omega$ =0 sur des vecteurs tangents à cette fibre (en un point $a$ de la fibre) qui ne sont autres que les vecteurs verticaux en $a$. A fortiori $dd'\omega=0$ sur ces vecteurs.

## 11.3. Tableau récapitulatif

Pour obtenir des expressions en $id'd"\omega$, il faut multiplier les résultats obtenus par $-i(d'd"=-d"d'=-dd')$. On résume les résultats dans le tableau ci- dessous. Lorsque $R=0$ ou dans le cas d'une surface $K^3$ munie d'une métrique Ricci-plate , $B=0$, $s=0$.

On réunit ces deux cas dans la dernière colonne.

| champ | $\xi_0$ | $\xi_1$ | $\xi_2$ | $\xi_3$ | id'd"$\omega$ | $K^3$ ou $R=0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| type de champ | $h$ | $h$ | $ah$ | $ah$ | | |
| cas 1 | $\hat{\theta}^h_k$ | $\hat{\theta}^h_h$ | $\hat{\theta}^a_r$ | $\hat{\theta}^a_s$ | (1) | 0 |
| cas 2 | $\hat{\theta}^h_k$ | $U^h$ | $\hat{\theta}^a_r$ | $\hat{\theta}^a_s$ | $-i(I-ia)\theta_k(\frac{s}{12})U^h_{rs}$ | 0 |
| cas 3 | $U^h$ | $V^h$ | $\hat{\theta}^a_k$ | $\hat{\theta}^a_h$ | 0 | 0 |
| cas 4 | $\hat{\theta}^h_k$ | $\hat{\theta}^h_h$ | $V^a$ | $\hat{\theta}^a_s$ | $-i(I+ia)\theta_s(\frac{s}{12})U^a_{kh}$ | 0 |
| cas 5 | $\hat{\theta}^h_k$ | $U^h$ | $V^a$ | $\hat{\theta}^a_h$ | (5) | $-\frac{1}{2}(V^aU^h)_{kh}$ |
| cas 6 | $U^h$ | $V^h$ | $W^a$ | $\hat{\theta}^h_k$ | 0 | 0 |
| cas 7 | $\hat{\theta}^h_k$ | $\hat{\theta}^h_h$ | $U^a$ | $V^a$ | 0 | 0 |
| cas 8 | $\hat{\theta}^h_k$ | $U^h$ | $V^a$ | $W^a$ | 0 | 0 |
| cas 9 | $U^h$ | $V^h$ | $W^a$ | $X^a$ | 0 | 0 |

En posant $B=\widehat{A\bullet g}$, $A$ étant l'opérateur de Ricci à trace nulle intervenant dans la décomposition de $\hat{R}$

$$\begin{aligned}
(1) &= \mathbb{G}(\Lambda(B(\theta^h_h\wedge\theta^a_s)),\Lambda(B(\theta^h_k\wedge\theta^a_r))) \\
&\quad -\mathbb{G}(\Lambda(B(\theta^h_h\wedge\theta^a_r)),\Lambda(B(\theta^h_k\wedge\theta^a_s))) + i(1-\frac{s}{6})\frac{s}{12}(\Lambda(\theta^a_r\wedge\theta^a_s))^a_{kh}. \\
(5) &= -V^a(\mathbb{G}(\Lambda(B(\theta^h_k\wedge\theta^a_h)),U^h)) \\
&\quad -i\frac{1}{2}\sum_r V^a_{rk}\mathbb{G}(\Lambda(B(\theta^h_r\wedge\theta^a_h)),U^h) - \frac{1}{2}(1-\frac{s}{6})(V^aU^h)_{kh} \\
&\quad +i\frac{1}{2}\sum_r V^a_{rh}\mathbb{G}(\Lambda(B(\theta^h_k\wedge\theta^a_r)),U^h).
\end{aligned}$$

### 11.4. Signe du $id'd"\omega$ dans le cas $R=0$ ou $M$ est $K^3$

On déduit du tableau précédent, en écrivant le cas 5 :
$id'd"\omega(\hat{\theta_k}^h,U^h,V^a,\hat{\theta_h}^a)=-\frac{1}{2}(V^aU^h)_{kh}$.
Si U=V et k=h :
$id'd"\omega(\hat{\theta_k}^h,U^h,\hat{\theta_k}^a,U^a)=+\frac{1}{2}(U^aU^h)_{kk}=\frac{1}{2}\sum_r U^a_{kr}U^h_{rk})$. Du fait que les matrices considérées sont antisymétriques et que $U^a_{kr}=\overline{U^h_{kr}}$, $id'd"\omega(\hat{\theta_k}^h,\hat{\theta_k}^a,U^h,U^a)=\frac{1}{2}\sum_r\left|U^h_{kr}\right|^2\geq 0$.
On peut s'affranchir des indices $k$, car tout $\theta\in T_xM$, à un coefficient positif prés (la norme de $\theta$) peut être considéré comme unitaire :
$id'd"\omega(\hat{\theta}^h,U^h,\hat{\theta}^a,U^a)\leq 0$. D'une manière plus générale, si $\eta$ est un autre champ sur $M$ et en tenant compte des résultats :
$id'd"\omega(\hat{\theta}^h,\hat{\eta}^h+U^h,\hat{\theta}^a,\hat{\eta}^a+U^a)\leq 0$. Cette identité peut se traduire en disant que si $\theta\in T_xM$ et $\xi\in T_a\tau(M)$, avec $\pi_\tau(a)=x$, alors :

$$id'd"\omega(\hat{\theta}^h,\hat{\theta}^a,\xi^h,\xi^a)\geq 0.$$

### 11.5. Cas où la variété est Einstein et $2n > 4$

Le principe de calcul des cas de 1 à 9 peut être transposé dans le cas général où la variété $M$ est de dimension $2n$, Einstein ($B = 0$) où la métrique est intégrable ($W = 0$). On déduit :

$$\hat{R} = \frac{s}{2n(2n-1)} Id_{\wedge^2} + B + W = \frac{s}{2n(2n-1)} Id_{\wedge^2}$$

Il reste à modifier les données initiales suivantes :
1) le théorème 7.3.2 fournit la formule suivante :

$$d\omega(\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j, U) = \omega(\Lambda((\frac{1}{2}Id - \hat{R})\theta_i \wedge \theta_j), U) = \mathbb{G}(\Lambda((\frac{1}{2}Id - \hat{R})\theta_i \wedge \theta_j), \mathbb{J}U).$$

L'identité de la proposition 10.2.1 est adaptable au cas général par cette formule, et donne :

$$d\omega(\hat{\theta_i^h}, \hat{\theta_j^h}, U) = (1 - \frac{s}{n(2n-1)}) U^a_{ij}$$

L'autre identité devient :

$$d\omega(\hat{\theta_i^h}, \hat{\theta_j^a}, U) = 0$$

En effet :
$d\omega(\hat{\theta_i^h}, \hat{\theta_j^a}, U) = \frac{1}{4}(\omega(\Lambda(\theta_i \wedge \theta_j), U) + \omega(\Lambda(a\theta_i \wedge a\theta_j), U) + i\omega(\Lambda(\theta_i \wedge a\theta_j), U) - i\omega(\Lambda(a\theta_i \wedge \theta_j), U)) = \frac{1}{2}(U_{ij} - U_{ij} + i(XU + UX)_{ij}) = 0$ car $U$ est un vecteur vertical en $a$ (de coordonnées $(x, X)$).
Alors on peut se convaincre par exemple dans le cas 1, en examinant les calculs en amont des notions qui utilisent $W_+$, $\wedge_+$, $\wedge_-$ qui sont spécifiques à la dimension 4, qu'il suffit de considérer les mêmes formules que dans le cas 4, avec $B = 0$. En tenant compte du fait que pour une variété d'Einstein de dimension $\geq 3$, la courbure scalaire est constante, on déduit que dans tous les cas le résultat est nul sauf dans les cas 1 et 5 :

$$cas1 : i(1 - \frac{s}{n(2n-1)}) \frac{s}{2n(2n-1)} \Lambda((\theta^a_r \wedge \theta^a_s))^a_{kh}.$$

$$cas5 : -\frac{1}{2}(1 - \frac{s}{n(2n-1)})(V^a U^h)_{kh}.$$

# BIBLIOGRAPHIE


[A-H-S] MF Atiyah, N.J. Hitchin, I.M Singer, *Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry* Mathematical Institute,University of Oxford,24-29 St Giles,Oxford, UK,Department of Mathematics, University of California, Berkely, California 94720, U.S.A,Received 23 December 1977, printed R.Soc.London A.362, 425-461(1978),

[B-N] de Bartolomeis, Paolo and Nannicini, Antonella, *Introduction to differential geometry of twistor spaces*, In Geometric theory of singular phenomena in partial differential equations (Cortona, 1995, Sympos. Math., XXXVIII, pages 91–160, Cambridge Univ. Press,Cambridge,(1998),

[B] Arthur L.Besse, *Einstein Manifolds*,volume 10 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grensgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas(3)]*,Springer-Verlag-Berlin,1987,

[B-T] Bott Raoul, Loring W.Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*,Springer,Graduate Texts in Mathematics,1982,

[CO] Cowen J Michael, *Notes on Bott and Chern's Hermitian Vector Bundles...*, Lecture notes, Tulane University Math. Dept., 1972/1973. Department of Mathematics, Tulane University, New Orleans, La., 1975. iii+98 pp.,

[D] Deschamps Guillaume, *Espaces twistoriels et structures complexes exotiques*,thèse,(2005),no d'ordre :3209,

[DO] P.Dolbeault *analyse complexe*,Collection de mathématiques pures, Masson,1990,

[G-H] Phillip Griffiths, Joseph Harris *Principles of Algebraic Geometry*,Harvard University, Pures and Applied Mathematics A Wiley.Interscience Series of Texts,Monographs and Tracts1978,

[H] N.J.Hitchin *Kählérian Twistor Spaces*,Proc. London Math.Soc(3) 43 133-150 ,1981,

[JJ] Jürgen Jost *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*,Fourth Edition,Universitext,Springer,2005 ?,

[K] Kühnel Wolfgang, *Differential Geometry, Curves-Surfaces-Manifolds*,AMS, Student Mathematical Library,2000

[L-M] Lawson, Jr., H. Blaine and Michelsohn, Marie-Louise, *Spin geometry*,Princeton Mathematical Series,38, Princeton University Press,Princeton, NJ, (1989),

[L] Lee John, *Riemannian Manifolds-An introduction to Curvature*,Graduate Texts in Mathematics,Springer,1991,

[M-S] John W.Milnor and James D. Stasheff *Characteristic Classes*,Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press number 76, 1974,

[M-T] Rached Mneimné et Frédéric Testard *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*,Hermann, collection méthodes, 1986,

[W] John C Woods *Harmonic Morphisms and Hermitian Structure on Einstein 4-Manifolds*,Internat.J.Math, 1992.