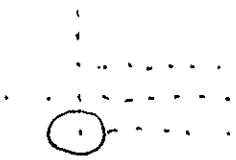
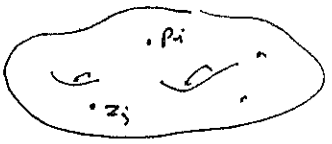
Nous allons présenter une théorie qui unifie les deux résultats suivants, et qui les généralisera largement





Dans $(\mathbb{R}^n, \text{eucl})$ un convexe borné symétrique admet un point à ~~coeffici~~ coordonnées entières dès que son volume est assez grand

$$\text{Vol} > 2^n$$

Sur une surface de Riemann compacte, il existe une fonction méromorphe avec des pôles d'ordre au plus m_i aux points p_i fixées et des zéros d'ordre au moins μ_j aux points z_j

dès que $\sum m_i - \sum \mu_j$ est assez grand

$$> 2g - 2$$

Ces aspects correspondront à

la géométrie analytique complexe hermitienne

la géométrie algébrique (ici, la théorie de l'intersection donne le degré des polynômes qui définissent l'espace)

la géométrie arithmétique (ici, la théorie de l'intersection donne le degré et la taille des coefficients)

prérequis : Un cours de géométrie algébrique
éventuellement un cours de géométrie différentielle.

Bibliographie :

Fulton "Intersection theory"
Berline Getzler Vergne "Heat kernel and Dirac operators"
Soulé & al. "Arakelov geometry"

Présentation

Nous étudierons dans ce cours les schémas sur $\mathbb{Z}$, en particulier les systèmes d'équations

$$\begin{cases} P_1(x_0, \dots x_n) = 0 \\ \vdots \\ P_N(x_0 \dots x_n) = 0 \end{cases}$$

où les P_i sont des polynômes homogènes à coefficients entiers. On s'intéresse en particulier aux solutions entières de ce type de système. Une ~~que~~ conjecture célèbre dans ce contexte qui a été démontrée par Faltings est

Conjecture de Mordell 1922, Théorème de Faltings 1983

Si l'ensemble des solutions complexes du système est une courbe projective lisse de genre supérieur à 2, alors le système n'a qu'un nombre fini de points rationnels solutions dans $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$.

Un outils important dans ce genre de contexte est la majoration a priori de la hauteur (c'est à dire le maximum de coordonnées homogènes normalisées) des solutions. Une borne sur la hauteur implique la finitude du nombre de solutions et permet même

de les localiser.

Par une série d'analogies, un calcul de hauteur correspond à un calcul de nombre d'intersection. On va essayer de détailler cette correspondance, pour l'analogie entre corps de nombres et corps de fonctions.

En dimension totale 1

* Corps de fonctions

Soit C_0 une courbe complexe lisse projective et $K = \mathbb{C}(C_0)$ le corps des fonctions rationnelles sur C_0.

Chaque point p de $C_0(\mathbb{C})$ l'ensemble des points complexes de C_0 donne lieu à une <u>valuation</u> sur K par

$$K \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$$

$$f \longmapsto \mathrm{ord}_p(f) \quad \begin{cases} \geq 0 & \text{si } f(p) = 0 \\ < 0 & \text{si } f \text{ a un pôle en } p \end{cases}$$

$\mathrm{ord}_p(0) = +\infty$

$\mathrm{ord}_p(fg) = \mathrm{ord}_p(f) + \mathrm{ord}_p(g)$

$\mathrm{ord}_p(f+g) \geq \min(\mathrm{ord}_p(f), \mathrm{ord}_p(g))$

(La valuation ordinaire dans l'espace des polynômes correspond à la valuation en 0 sur la droite complexe)

ou de manière équivalente à une <u>norme</u>

$$K \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$f \longmapsto r_p^{-\mathrm{ord}_p(f)} =: |f|_p \qquad r_p \in]1, +\infty[$$

$|f|_p = 0 \iff f = 0$

$|fg|_p = |f|_p \, |g|_p$

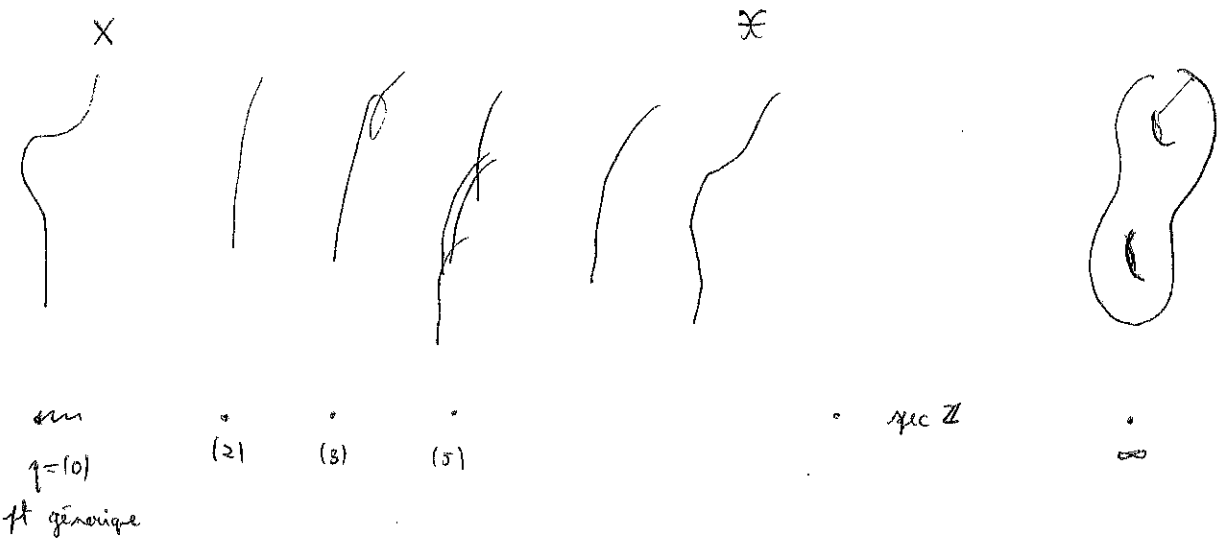
$|f+g|_p \leq \max(|f|_p, |g|_p)$ non-archimédienne.

En particulier, il y a une borne pour le nombre d'intersection d'une section avec une fibre.

Corps de nombres

Ici $K = \mathbb{Q}$, X est une courbe projective définie sur $\mathbb{Q}$.

Par la théorie des modèles, on peut étendre X en une variété $\mathcal{X}$ sur $\mathbb{Z}$ telle que $\mathcal{X} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = X$



Il est important de "compactifier" la situation pour avoir une bonne théorie de l'intersection.

Pour cela, on considère $\mathcal{X}_\sigma(\mathbb{C})$ l'ensemble des points complexes du schéma complexe défini par les équations transportées par $\sigma : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{C}$.
L'analogue des structures entières sera la donnée de métriques hermitiennes.
Il faut voir ces structures supplémentaires comme des extensions. Des classes secondaires ~~Que doit être l'intersection de deux diviseurs dans ce contexte~~ ? apparaissant donc comme obstruction à l'extension. De la même manière qu'une suite exacte sur $\mathbb{Q}_p$ ne se relève pas nécessairement en une suite exacte sur $\mathbb{Z}_p$ une suite exacte n'est plus nécessairement métriquement exacte.

En dimension totale 2

C'est le contexte de la conjecture de Mordell, des travaux originaux d'Arakelov, repris et affinés par Faltings. [Annals of Math 119 (1984)]

Corps de fonctions

C_0 courbe complexe projective lisse, $k = \mathbb{C}(C_0)$

X courbe définie sur le corps k. (lieu de zéros de polynôme à coefficients dans k)

Par la théorie de réductions stable, il existe un modèle pour X, c'est à dire ici une surface algébrique complexe projective lisse S avec un morphisme $\begin{array}{c} S \\ \downarrow \pi \\ C_0 \end{array}$ tel que

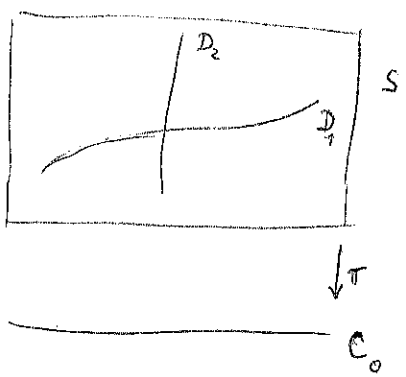
$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}(C_0) = k \arrow[r, "\pi^*"] \arrow[dr] & \mathbb{C}(S) \\ & \mathbb{C}(X) \arrow[u, phantom, "\cong"] \end{tikzcd}$$

structure de k-module

L'étude de X comme k-variété revient à l'étude de la surface fibrée $S \xrightarrow{\pi} C$. Par exemple, l'analogue géométrique de la conjecture de Mordell est

Théorème (Manin - Grauert 1965)

Si $\pi : S \to C$ est une famille non isotriviale de courbes de genre supérieure à 2, alors π n'a qu'un nombre fini de sections.



On remarque que f est régulière en p $\iff$ $|f|_p \leq 1$

Le théorème des résidus de Cauchy montre que

$$\forall f \in \mathbb{C}(C_0) \qquad \sum_{p \in C_0(\mathbb{C})} \mathrm{ord}_p(f) = 0$$

ou bien $$\prod_{p \in C_0(\mathbb{C})} |f|_p = 1$$ (en ayant choisi tous les r_p égaux)

* Corps de nombres

Ce sont les extensions finies de $\mathbb{Q}$. Considérons $\mathbb{Q}$ pour simplifier.

Chaque nombre premier p de $\mathbb{Z}$ donne lieu à une valuation

$$\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$$

$$q \longmapsto n_p(q) \qquad \text{si} \quad q = p^{n_p(q)} \frac{r}{s} \qquad \begin{array}{l} r \wedge p = 1 \\ s \wedge p = 1 \end{array}$$

L'analogue de la formule des résidu est la formule du produit

$$\forall q \in \mathbb{Q} \qquad |q| = \prod_{p \text{ premier}} |p|^{n_p(q)}$$

On est donc amener à choisir pour valuation

$$v_p(q) = \log(p) \; n_p(q)$$

$$v_\infty(q) = -\log |q|_{\mathbb{C}}$$

1er cours

Préliminaires

Griffiths Harris
Chap 0.

Principles of Alg. Geom

Demailly
Institut Fourier

www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/books.html

I) Variétés complexes, fibrés vectoriels

1/ variétés complexes : def, exemples

2/ structures presque complexes

~~3/~~ décomposition en type

3/ Fibrés vectoriels : def, exemples

4/ Métriques

5/ connexions

II) Courants

- définitions
- exemples
- opérations
- cohomologie
- ~~métriques singulières~~ la formule de Lelong-Poincaré

III) Théorie de Hodge

- opérateurs différentiels : def, ellipticité
- la condition de Kähler : def, exemples
- relations de commutation, formule de BKM
- théorème de décomposition
- lemme des deux types.

PRÉLIMINAIRES

1. Variétés analytiques complexes

1.1. Définitions.

Définition 1. *Une variété analytique complexe X de dimension n est un espace topologique séparé muni d'un atlas dont les changements de cartes sont holomorphes. Autrement dit, il existe un recouvrement (U^α) de X par des ouverts et des homéomorphismes $\psi^\alpha : U^\alpha \to V^\alpha \subset \mathbb{C}^n$ tels que $\psi^{\alpha\beta} := \psi^\beta \circ (\psi^\alpha)^{-1}$ soit une application holomorphe (et par suite un biholomorphisme) entre les deux ouverts $\psi^\alpha(U^\alpha \cap U^\beta)$ et $\psi^\beta(U^\alpha \cap U^\beta)$ de $\mathbb{C}^n$.*

Les composantes z_j^α de $\psi^\alpha(x)$ sont appelées les coordonnées holomorphes de $x \in X$ dans la carte (U^α, ψ^α). On notera $z_j^\alpha = x_j^\alpha + iy_j^\alpha$. Une application holomorphe entre deux variétés analytiques complexes est une application continue entre les deux espaces topologiques sous-jacents qui, lue dans les cartes, est une application holomorphe entre des ouverts d'espaces affines $\mathbb{C}^n$.

Il y a en particulier une structure différentiable sous-jacente et on pourra donc considérer le fibré tangent $T_\mathbb{R}X$, la notion de submersion, les formes différentielles, l'opérateur d de différentiation extérieure, la cohomologie de De Rham, les métriques Riemanniennes, le Laplacien,...

1.2. Struture presque-complexe.

Sur une variété analytique complexe, on dispose en particulier d'un opérateur J_{geom} de structure presque-complexe ($\mathbb{R}$-linéaire de carré $-Id$) sur $T_\mathbb{R}X$. Il est défini sur U^α par transport de structure $J_{geom} := (\psi^\alpha)_\star^{-1} i (\psi^\alpha)_\star$ où $(\psi^\alpha)_\star$ est la différentielle de ψ^α. Autrement dit, sur U^α,

$$\begin{aligned}(\psi^\alpha)_\star J_{geom} (\psi^\alpha)_\star^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j^\alpha} &= \frac{\partial}{\partial y_j^\alpha} \\ (\psi^\alpha)_\star J_{geom} (\psi^\alpha)_\star^{-1} \frac{\partial}{\partial y_j^\alpha} &= -\frac{\partial}{\partial x_j^\alpha}\end{aligned}$$

Puisque $\psi^\beta \circ (\psi^\alpha)^{-1}$ est holomorphe donc de différentielle $\mathbb{C}$-linéaire, $(\psi^\alpha)_\star^{-1} i (\psi^\alpha)_\star = (\psi^\beta)_\star^{-1} i (\psi^\beta)_\star$ sur $U^\alpha \cap U^\beta$. La structure J_{geom} est donc bien définie. (Une variété munie d'une structure presque complexe n'est pas nécessairement une variété analytique complexe ; il y a une condition d'intégrabilité).

Pour diagonaliser J_{geom} on considère le fibré tangent complexifié

$$T_\mathbb{C}X := T_\mathbb{R}X \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C} = T_\mathbb{R}X \oplus iT_\mathbb{R}X$$

avec la structure presque-complexe J_{alg} donnée par $Id \otimes i$. L'opérateur J_{geom} s'étend en un opérateur $\mathbb{C}_{alg}$-linéaire de $T_\mathbb{C}X$ diagonalisable. On a $T_\mathbb{C}X = T^{1,0}X \oplus T^{0,1}X$ où $T^{1,0}X$ (resp. $T^{0,1}X$) est l'espace propre de J_{geom} de valeur propre i (resp. $-i$).

On oublie désormais ψ^α dans la notation, ce qui revient à identifier un vecteur tangent à $U^\alpha \subset X$ avec un vecteur tangent à $V^\alpha \subset \mathbb{C}^n$. Les vecteurs $\frac{\partial}{\partial z_j^\alpha} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j^\alpha} - i\frac{\partial}{\partial y_j^\alpha})$ (resp. $\frac{\partial}{\partial \overline{z_j^\alpha}} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j^\alpha} + i\frac{\partial}{\partial y_j^\alpha})$) engendrent $T^{1,0}X$ (resp.$T^{0,1}X$) et $\overline{\frac{\partial}{\partial z_j^\alpha}} = \frac{\partial}{\partial \overline{z_j^\alpha}}$.

Des calculs simples donnent avec les coordonnées polaires satisfaisant $x_i = r_i \cos\theta_i$ et $y_i = r_i \sin\theta_i$,

$$\begin{aligned} d^c &:= -\frac{i}{4\pi}(\partial - \overline{\partial}) \\ &= -\frac{i}{4\pi}(\sum dz_i \frac{\partial}{\partial z_i} - \sum d\overline{z}_i \frac{\partial}{\partial \overline{z}_i}) \\ &= -\frac{1}{4\pi}(\sum dx_i \frac{\partial}{\partial y_i} - \sum dy_i \frac{\partial}{\partial x_i}) \\ &= \frac{1}{4\pi}(\sum d\theta_i r_i \frac{\partial}{\partial r_i} - \sum dr_i \frac{1}{r_i}\frac{\partial}{\partial \theta_i}) \end{aligned}$$

et

$$dd^c = \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}.$$

2. Fibrés vectoriels holomorphes

2.1. Définitions.

Définition 2. *Un fibré vectoriel holomorphe de rang r sur une variété analytique complexe X (la base) est une variété analytique complexe E (l'espace total) avec une submersion $\pi : E \to X$ à fibre $\mathbb{C}^r$ telles qu'il existe un recouvrement de X par des ouverts U^α et des isomorphismes holomorphes $t^\alpha : \pi^{-1}(U^\alpha) \to U^\alpha \times \mathbb{C}^r$ (les trivialisations) vérifiant $p_1 \circ t^\alpha = \pi$ et les changements de trivialisation $t^\beta \circ (t^\alpha)^{-1} : (U^\alpha \cap U^\beta) \times \mathbb{C}^r \to (U^\alpha \cap U^\beta) \times \mathbb{C}^r$ sont donnés par des applications linéaires $g^{\beta\alpha}(x) \in GL(\mathbb{C}^r)$ dépendant holomorphiquement de x : $t^\beta \circ (t^\alpha)^{-1}(x, v) = (x, g^{\beta\alpha}(x).v)$.*

Un repère local de E est la donnée sur un ouvert U de X de r sections linéairement indépendantes. En choisissant une base canonique pour $\mathbb{C}^r$, la donnée d'un repère holomorphe local est équivalente à la donnée d'une trivialisation locale de E.

Un morphisme de fibrés vectoriels holomorphes est un morphisme des espaces totaux linéaires sur chaque fibre. Il est donné sur un recouvrement ouvert U^α trivialisant les deux fibrés par des applications linéaires.

On note la relation de cocycle sur $U^\alpha \cap U^\beta \cap U^\gamma$

$$g^{\gamma\beta} g^{\beta\alpha} = g^{\gamma\alpha}.$$

La donnée d'un fibré vectoriel holomorphe à isomorphisme près sur X est équivalente à la donnée d'un recouvrement ouvert de X et des changements de trivilisation $g^{\beta\alpha}$ satisfaisant la relation de cocycles. En effet,

$$\frac{\coprod (U^\alpha \times \mathbb{C}^r)}{(x^\alpha, v^\alpha) \in U^\alpha \times \mathbb{C}^r \sim (x^\beta, v^\beta) \in U^\beta \times \mathbb{C}^r \iff \begin{smallmatrix} x^\beta = x^\alpha \\ v^\beta = g^{\beta\alpha} v^\alpha \end{smallmatrix}} \xrightarrow{p_1} X$$

définit un fibré vectoriel. (La relation de cocycle montre la transitivité de la relation $\sim$).

Une section de E est une application $s : X \to E$ satisfaisant $\pi \circ s = Id$. La donnée d'une section est équivalente à la donnée sur chaque ouvert U^α d'une application $U^\alpha \xrightarrow{s^\alpha} \mathbb{C}^r$ satisfaisant sur $U^\alpha \cap U^\beta$, $(t^\alpha)^{-1}(x, s^\alpha(x)) = (t^\beta)^{-1}(x, s^\beta(x))$ soit $g^{\beta\alpha} s^\alpha = s^\beta$. Une forme différentielle de degré d sur X à valeurs dans E est une section du fibré (non holomorphe) $\Lambda^d T_{\mathbb{C}} X^\star \otimes E = \oplus_{p+q=d} \Lambda^{p,q} T X^\star \otimes E$.

où f est une forme locale à valeurs complexes et s une section locale de E.

La règle de Leibniz montre que la connexion ∇ est un opérateur local i.e. si s et s' coïncident au voisinage d'un point x, $\nabla s = \nabla s'$ au point x et que la différence de deux connexions est un opérateur C^∞-linéaire donc ponctuel : c'est donc un opérateur de multiplication par une 1-forme à valeur dans le fibré des endomorphismes de E. L'espace des connexions sur E est donc un espace affine sur $A^1(X, End(E))$. La formule de Leibniz montre aussi que l'opérateur $\frac{i}{2\pi}\nabla^2$ est un opérateur de multiplication par une 2-forme $\Theta(\nabla)$ à valeurs dans $End(E)$ appelée forme de courbure de ∇.

On considère e^α_λ un repère holomorphe de E sur un ouvert U_α. Par la formule de Leibniz, pour toute section locale $s \in \Gamma(U, E)$, $s = \sum s^\alpha_\lambda e^\alpha_\lambda \simeq_{U^\alpha} \begin{pmatrix} s^\alpha_1 \\ \vdots \\ s^\alpha_r \end{pmatrix} =: s^\alpha$

$$\nabla s = \sum ds^\alpha_\lambda \otimes e^\alpha_\lambda + \sum s^\alpha_\lambda \otimes \nabla e^\alpha_\lambda = \sum ds^\alpha_\lambda \otimes e^\alpha_\lambda + \sum s^\alpha_\lambda \otimes (\nabla e^\alpha_\lambda)_\mu e^\alpha_\mu.$$

Ainsi, ∇ est caractérisée sur U^α par la matrice de 1-formes

$$A^\alpha := (\nabla e_1, \cdots, \nabla e_r) = \begin{pmatrix} (\nabla e_1)_1 & \cdots & (\nabla e_r)_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (\nabla e_1)_r & \cdots & (\nabla e_r)_r \end{pmatrix}$$

et la formule

$$\nabla s \simeq_{U^\alpha} ds^\alpha + A^\alpha s^\alpha$$

La forme de courbure est sur U_α

$$\Theta(\nabla) \simeq_{U^\alpha} \frac{i}{2\pi}(dA^\alpha + A \wedge A).$$

Par changement de trivialisation, $s^\beta = g^{\beta\alpha} s^\alpha$, Donc,

$$\begin{aligned} \nabla s &\simeq_{U^\alpha} ds^\alpha + A^\alpha s^\alpha \\ &\simeq_{U^\beta} g^{\beta\alpha} ds^\alpha + g^{\beta\alpha} A^\alpha s^\alpha \\ &\simeq_{U^\beta} ds^\beta - dg^{\beta\alpha}(g^{\beta\alpha})^{-1} s^\beta + g^{\beta\alpha} A^\alpha (g^{\beta\alpha})^{-1} s^\beta \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$A^\beta = (g^{\alpha\beta})^{-1} dg^{\alpha\beta} + (g^{\alpha\beta})^{-1} A^\alpha g^{\alpha\beta}$$

Pour donner une connexion sur un fibré E, il suffit de donner des matrices de 1-formes A^α sur des ouverts de trivialisation soumises aux conditions de changement de trivialisations précédentes.

Une connexion est dite holomorphe si pour toute section holomorphe locale s et pour tout vecteur $V \in TX$, $\nabla_{\overline{V}} s = 0$. Alors, pour tout repère holomorphe e_λ de E, ∇e_λ est une forme de type $(1,0)$ à valeurs dans E.

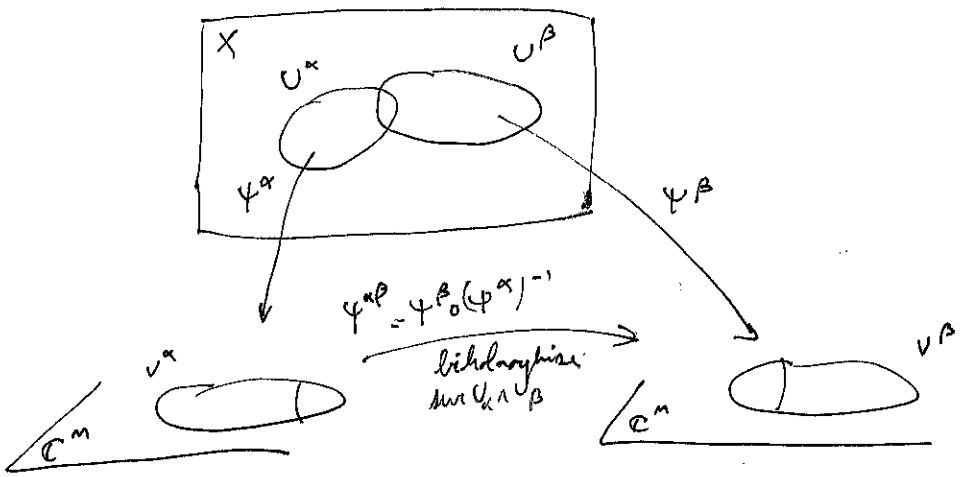
Une connexion est dite métrique (ou hermitienne) si

$$d\langle s, s'\rangle = \{\nabla s, s'\} + \{s, \nabla s'\}.$$

Proposition 1. *Sur tout fibré vectoriel hermitien (E, h), il existe une unique connexion holomorphe hermitienne. Elle est appelée connexion de Chern. Sa forme de courbure est appelée courbure de la métrique h.*

I) Variétés complexes, fibrés vectoriels holomorphes

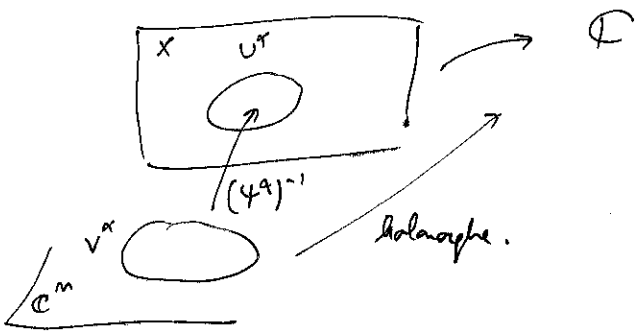
1) <u>Def</u> : Une variété analytique complexe est un espace topologique muni d'un atlas vers des ouverts de $\mathbb{C}^n$ dont les changements de cartes sont des biholomorphismes d'ouverts de $\mathbb{C}^n$.



Les composantes z_i^α de φ^α dans $\mathbb{C}^n$ sont appelées fonctions coordonnées.

- Il y a donc une structure analytique réelle, une structure différentiable sous-jacente. On peut donc considérer les fonctions $\mathcal{C}^\infty$, le fibré tangent, les formes diff, l'opérateur d, la cohomologie de De Rham, les métriques riemanniennes, le laplacien

- Une fonction holomorphe $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue qui, lue dans les cartes est holomorphe



2/ <u>Structure presque-complexe.</u>

On peut définir une structure presque-complexe naturelle ~~sur le~~ sur ~~fibré tangent~~ une variété analytique complexe (i.e. un opérateur $\mathbb{R}$-linéaire J_{geom} sur $T_{\mathbb{R}}X$ avec $J_{geom}^2 = -Id$ $\forall x \in X$ dépendant de manière C^∞ de $x \in X$).

$$J_{geom}\, v = (\psi^\alpha)_*^{-1}\, i\, (\psi^\alpha)_*\, v$$

Comme $(\psi^{\alpha\beta})_*$ est $\mathbb{C}$-linéaire, J_{geom} est bien définie (ne dépend pas de la carte utilisée pour la définir).

- Pour diagonaliser J_{geom}, on complexifie $T_{\mathbb{R}}X$ en $T_{\mathbb{C}}X = T_{\mathbb{R}}X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ muni d'une structure presque complexe algébrique $J_{alg} = Id \otimes i$

$J_{geom} \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(T_{\mathbb{R}}X)$ devient $J_{geom} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}\,alg}(T_{\mathbb{C}}X)$ diagonalisable.

$$T_{\mathbb{C}}X = \underbrace{T^{1,0}X}_{vp\ i} \oplus \underbrace{T^{0,1}X}_{vp\ -i} = T_{\mathbb{R}}X \oplus i\, T_{\mathbb{R}}X$$

$$\text{vect}_{\mathbb{C}}\left\{\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right\} = \text{vect}_{\mathbb{C}}\left\{\frac{\partial}{\partial z_j}\right\} \oplus \text{vect}_{\mathbb{C}}\left\{\frac{\partial}{\partial \bar z_j}\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$$

Puisque $T_{\mathbb{C}}X$ est un complexifié, il possède une conjugaison naturelle

$$a + ib \longrightarrow a - ib \quad \text{sur} \quad T_{\mathbb{C}}X = T_{\mathbb{R}}X \oplus i\, T_{\mathbb{R}}X.$$

En particulier, $T^{0,1}X = \overline{T^{0,1}X}$

On remarque que $(T_{\mathbb{R}}X, J_{geom}) \simeq (T^{1,0}X, J_{alg}) = (TX, J)$

$$v \longmapsto \frac{1}{2}(v - i\, J_{geom}\, v)$$

• Par dualité, on peut aussi décomposer les espaces de formes différentielles.

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}_{alg}}(T_{\mathbb{C}}X, \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}_{alg}}(T^{1,0}, \mathbb{C}) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}_{alg}}(T^{0,1}, \mathbb{C})$$

$$\| $$

$$(T_{\mathbb{C}}X)^*$$

$$\|$$

$$\mathrm{vect}_{\mathbb{C}}\{dx_i, dy_j\} = \mathrm{vect}_{\mathbb{C}}\{dz_j\} \oplus \mathrm{vect}_{\mathbb{C}}\{d\bar{z}_j\}$$

$dz_j = dx_j + i\, dy_j$ $\qquad$ $\mathbb{C}_{alg}$ - linéaire $\qquad$ $\mathbb{C}_{geom}$ - linéaire

$d\bar{z}_j = dx_j - i\, dy_j$ $\qquad$ " $\qquad$ $\mathbb{C}_{geom}$ - anti-linéaire.

$$\Lambda^d (T_{\mathbb{C}}X)^* = \bigoplus_{p+q=d} \Lambda^{p,q} T^*X = \bigoplus_{p+q=d} \Lambda^p (TX)^* \otimes \Lambda^q (\overline{TX})^*.$$

• La conjugaison sur les espaces de formes est donnée par

$$\bar{u}(v) = \overline{u(\bar{v})}$$

Elle conserve la $\mathbb{C}_{alg}$ - linéarité et échange la $\mathbb{C}_{geom}$ - linéarité avec la $\mathbb{C}_{geom}$ anti-linéarité. Une forme est dite réelle si $\bar{u} = u$

Par exemple dx_j, $i\, dz_j \wedge d\bar{z}_j$

• La différentielle extérieure

$$d = \sum dx_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum dy_j \frac{\partial}{\partial y_j}$$

qui augmente le degré des formes diff par 1 se décompose en

$$d = \underbrace{\sum dz_j \frac{\partial}{\partial z_j}}_{\partial} + \underbrace{\sum d\bar{z}_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}}_{\bar{\partial}}$$

bidegré $(1,0)$ $\qquad$ bidegré $(0,1)$

$\bar{\partial}^2 = \partial^2 = \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0$

4/ Métriques hermitiennes de classe $\mathcal{C}^\infty$

Déf : Une métrique hermitienne h de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un fibré vect. holomorphe E est la donnée sur chaque fibre $\pi^{-1}(\{x\})$ d'un produit scalaire hermitien dont les coefficients dépendent de façon $\mathcal{C}^\infty$ de x.

Par partition de l'unité, tout fibré E possède une métrique hermitienne.
La métrique sur E donne naturellement une métrique sur E^*, $E \oplus F$ ..
On peut aussi "étendre" la métrique aux espaces de formes à valeurs dans E par

$$\{ u \otimes e, v \otimes e' \} = u \wedge \bar{v} \langle e, e' \rangle_h$$

en un accouplement sesquilinéaire.

Une métrique sur X est par définition une métrique sur TX.
$-2 \operatorname{Im} h_X = \omega_X$ est une $(1,1)$ forme différentielle.

5/ Connexions

On cherche maintenant à dériver les sections d'un fibré vectoriel.
Comme l'espace vectoriel fibre change avec le point, la notion de fonction constante n'est pas naturelle.

Déf : Une connexion ∇ sur un fibré vectoriel E est une application

$$\nabla : \mathcal{C}^\infty(U, E) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(U, \Lambda^1 T^*_{\mathbb{C}} X \otimes E)$$, compatibles aux restrictions

$\mathbb{C}$-linéaire sur les fibres vérifiant la règle de Leibniz

$$\nabla(u \otimes e) = du \otimes e + u \nabla e \qquad \left| \begin{array}{l} u \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C}) \\ e \in \mathcal{C}^\infty(U, E) \end{array} \right.$$

Pour dériver dans la direction $V \in T_{\mathbb{C}} X$ on peut alors contracter

∇ s'étend de manière unique aux espaces de formes à valeurs dans E par la règle de Leibniz.

$$\nabla(u \wedge e) = du \otimes e + (-1)^{\deg u} u \wedge \nabla e$$

∇ donne une connexion naturelle sur E^* par

$$(\nabla u)(v) = (\nabla_{E^*} u) \cdot v + u \cdot \nabla_E v$$

∇ donne une connexion sur $\operatorname{End} E$ par

$$(\nabla_{\operatorname{End} E} u) = [\nabla_{E^*}, u] \qquad = \nabla_E \circ u - u \circ \nabla_E \qquad [\alpha, \beta] = \alpha\beta - (-1)^{ab} \beta\alpha$$

- ∇ est un opérateur local i.e. Si s et s' coïncident au voisinage de $x \in X$ $\nabla s = \nabla s'$ en x.
- La différence de deux connexions est $\mathcal{C}^\infty$-linéaire donc fonctorielle. L'espace des connexions est un espace affine sur $\mathcal{C}^\infty_1(X, \mathrm{End}\, E)$
- $\nabla^2(fu) = \nabla(df \otimes u + f \nabla u) = - df \otimes \nabla u + df \nabla u + f \nabla^2 u$.

Donc ∇^2 est un opérateur $\mathcal{C}^\infty$-linéaire donc fonctoriel, donné par multiplication par une 2-forme à valeurs dans le fibré des endomorphismes de E.

$$\frac{i}{2\pi} \nabla^2 = \Theta(\nabla) \wedge \cdot \qquad \Theta(\nabla) \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathrm{End}\, E)$$

$$\nabla_{\mathrm{End}\, E}\, \Theta(\nabla) = [\nabla_E, \Theta(\nabla) \wedge \cdot] = [\nabla_E, \nabla_E^2] = 0. \qquad \text{Bianchi.}$$

En coordonnées. Dans une trivialisation $s \in \mathcal{C}^\infty(U, E)$ est donnée par

$$s \underset{U_\alpha}{\simeq} \sum s_i^\alpha e_i^\alpha$$

$$\nabla s \underset{U_\alpha}{\simeq} \sum ds_i^\alpha \otimes e_i^\alpha + \sum s_i \otimes \nabla e_i$$

$$= \sum ds_i + s_j (\nabla e_j)_i \, e_i^\alpha$$

La donnée d'une connexion est une manière d'écrire un système diff ordinaire d'ordre 1

∇ est donc donné par la matrice

$$A_\alpha = \left((\nabla e_j)_i \right)_{i,j}$$

par $\nabla S = dS + A \wedge S$ $\qquad S = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_r \end{pmatrix}$

$$d(A \wedge S) + A \wedge (dS + A \wedge S)$$

$$\nabla^2 S = A \wedge dS + dA \wedge S - A \wedge dS + A \wedge A \wedge S$$

$$\Theta(\nabla) = \frac{i}{2\pi} (dA + A \wedge A)$$

Par changement de trivialisation $s^\beta = g^{\beta\alpha} s^\alpha$

$$\nabla s \underset{U^\alpha}{\simeq} ds^\alpha + A^\alpha s^\alpha$$

$$\underset{U^\beta}{\simeq} g^{\beta\alpha} ds^\alpha + g^{\beta\alpha} A^\alpha s^\alpha$$

$$\simeq ds^\beta - (dg^{\beta\alpha} g^{\beta\alpha})^{-1} s^\beta + g^{\beta\alpha} A^\alpha (g^{\beta\alpha})^{-1} s^\beta$$

Donc $A^\beta = (g^{\alpha\beta})^{-1}\, dg^{\alpha\beta} + (g^{\alpha\beta})^{-1} A^\alpha (g^{\alpha\beta})$ sur $U_\alpha \cap U_\beta$.

Réciproquement, se donner une connexion sur E revient à se donner une famille de matrices de 1 formes A^α sur U_α soumise aux règles de changement de trivialisation.

- Une connexion est dite holomorphe si pour toute section holomorphe locale s et tout vecteur $v \in TX$, $\nabla_{\bar v} s = 0$

  Si (e_i^α) est alors un repère hol locale A^α est une matrice de $(1,0)$-forme.

- Une connexion est dite métrique ou hermitienne si pour toute couple sections locales s, s'

  $$d\langle s, s'\rangle_h = \{\nabla s, s'\} + \{s, \nabla s'\}$$

<u>Proposition</u> : Sur tout fibré holomorphe hermitien (E,h) il existe une unique connexion holomorphe hermitienne. Elle est appelé connexion de Chern.

<u>Dem</u> : Sur U_α, on pose $H_{ij}^\alpha = h(e_i^\alpha, e_j^\alpha)$ et on choisit

$$\nabla e_i = \Gamma_{ij}^\alpha e_j^\alpha$$

Puisque ∇ est hol, ~~la matrice~~ les Γ_{ij}^α ~~est une matrice de~~ sont des $(1,0)$/mes.

$$d' H_{ij}^\alpha = \Gamma_{ij}^\alpha H_{kj}^\alpha \qquad d'\langle e_i^\alpha, e_j^\alpha\rangle = \{\nabla e_i^\alpha, e_j^\alpha\}$$

Donc $\Gamma^\alpha = (d' H^\alpha)(H^\alpha)^{-1}$

$(d' H^\beta)(H^\beta)^{-1}$ et $(G^{\alpha\beta})^{-1} dG^{\alpha\beta} + (G^{\alpha\beta})^{-1}(d' H^\alpha)(H^\alpha)^{-1} G^{\alpha\beta}$

sont deux matrices de 1-forme qui définissent sur $E_{|U_\beta}$ des connexions hol. hermitiennes. Elles sont donc égales.

La courbure est donnée par

$$\Theta(E,h) = \frac{i}{2\pi}\, d\Gamma^\alpha + \Gamma^\alpha \wedge \Gamma^\alpha = \frac{i}{2\pi}\, (d'' d' H^\alpha)(H^\alpha)^{-1} - d' H^\alpha H^{\alpha -1} d'' H^\alpha (H^\alpha)^{-1} + d' H^\alpha (H^\alpha)^{-1} d' H^\alpha (H^\alpha)^{-1}$$

$$= \frac{i}{2\pi}\, d''\left(d' H^\alpha (H^\alpha)^{-1}\right)$$

On aura besoin aussi de considérer l'opérateur réel

$$d^c := \frac{1}{4\pi}\left(\sum dy_i \frac{\partial}{\partial x_i} - dx_i \frac{\partial}{\partial y_i} \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi i}\left(\partial - \bar\partial\right)$$

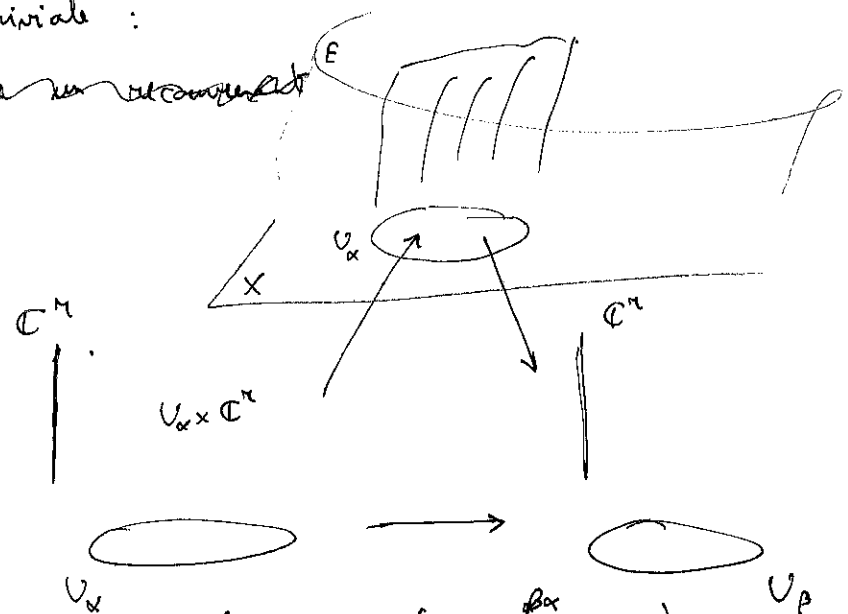
$$= \frac{1}{4\pi} \sum r_i \, d\theta_i \frac{\partial}{\partial r_i} - \frac{1}{r_i} dr_i \frac{\partial}{\partial \theta_i}$$

En particulier $\quad dd^c = \frac{i}{2\pi} \partial\bar\partial$

3) Fibrés vectoriels holomorphes

Par le principe du maximum, les fonctions holomorphes sur une variété analytique complexe compacte sont constantes. Il est donc indispensable d'étendre la notion de fonction holomorphe.

<u>Def</u> : Un fibré vectoriel holomorphe de rang r sur une variété analytique complexe X (la base) est une variété analytique complexe E (l'espace total) avec une submersion $\pi : E \to X$ dont les fibres sont des $\mathbb{C}$-ev de dim r, localement triviale :



$$(x, v) \longmapsto (x, g^{\beta\alpha}(x) \cdot v) \qquad g^{\beta\alpha} \in GL(r, \mathbb{C})$$

Il existe un recouvrement de X par des ouverts U_α et des homéomorphismes (les trivialisations)

$$\pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{t^\alpha} U_\alpha \times \mathbb{C}^r$$

tels que les changements de trivialisation

$$U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{C}^r \subset U_\alpha \times \mathbb{C}^r \xrightarrow{t^\beta \circ (t^\alpha)^{-1}} U_\beta \times \mathbb{C}^r \supset (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^r$$

$$(x, v) \longmapsto (x, g^{\beta\alpha}(x).v)$$

$g^{\beta\alpha}(x) \in GL(r, \mathbb{C})$

E est dit holomorphe si $g^{\alpha\beta}$ dépendant hol de $x \in X$ ~~dépend holomorphiquement de $x \in X$~~

- Sur l'intersection de trois ouverts, les changements de trivialisation vérifient alors la relation de cocycle

$$g^{\gamma\alpha} = g^{\gamma\beta} g^{\beta\alpha}$$

Se donner un fibré vectoriel holomorphe, revient à se donner sur chaque intersection de deux ouverts des changements de carte $g^{\beta\alpha}$ vérifiant la relation de cocycle. Deux fibrés vectoriels qui diffèrent par des fonctions f_α globalement définies sur U_α sont isomorphes. A isomorphisme près, se donner un fibré vectoriel revient à se donner un élément de $H^1_{\check{C}ech}(X, GL(r))$
On peut alors définir les opérations $\otimes$ $\oplus$ det ..

- Une section d'un fibré E est une application $s : X \to E$ telle que $\pi \circ s = Id$. Une section est donnée par des fonctions $s^\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^r$ vérifiant $s^\beta(x) = g^{\beta\alpha}(x)\, s^\alpha(x)$ sur $U_\alpha \cap U_\beta$.

On peut aussi considérer les formes à valeurs dans E (sections de $\Lambda^d T_{\mathbb{C}} X \otimes E$)

- L'opérateur D'' $\quad D''s \simeq_{U_\alpha} \sum \bar\partial s_i^\alpha e_i$ est bien défini car $g^{\beta\alpha}$ est holomorphe (Cohomologie Dolbeault

. Exemple : Si D est un diviseur de X donné sur U_α par l'équation $f_\alpha = 0$

$$g^{\beta\alpha} = \frac{f_\beta}{f_\alpha}$$ fonction holomorphe partout non nulle sur $U_\alpha \cap U_\beta$ $\quad GL(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$

vérifiant la relation de cocycle. (D, f) permet donc de définir un fibré en droites $\mathcal{O}(D, f)$. Si f' est un autre système d'équation pour D, $\mathcal{O}(D, f') \simeq \mathcal{O}(D, f)$. On peut donc considérer $\mathcal{O}(D)$.
(classe d'isomorphisme d'un fibré en droites muni de la section $s = (f_\alpha)$

Fin du 1er cours

Connexion

Une connexion ∇ sur un fibré vectoriel $E \to X$ ~~holomorphe~~ $\mathcal{C}^\infty$ est la donnée pour chaque ouvert U de X d'une application

$$\nabla : \mathcal{C}^\infty(U, E) \longrightarrow A^1(U, E)$$

$\mathbb{C}$ linéaire vérifiant la relation de Leibniz et compatible avec les restrictions.

A partir d'une connexion sur E, on déduit naturellement

1/ $A^d(U, E) \longrightarrow A^{d+1}(U, E)$ vérifiant la relation de Leibniz

2/ des connexions sur E^*, $\mathrm{End}\, E$, $S^k E$, $\Lambda^k E$ ..

Si $(e_i)_{i=1}^n$ est un repère local de E sur un ouvert U^α,

∇ est caractérisée par la matrice $A^\alpha_{\nabla, s} := \left((\nabla e_1)_1 \; \dots \; \nabla e_n \right)$

$$= \left((\nabla e_j)_i \right)$$

par la formule $s = \sum s_i e_i$

$$\nabla s = \sum ds_i \, e_i + \sum s_i (\nabla e_i)_j \, e_j$$

$$= ds + A \wedge s$$

La relation de Leibniz montre que ∇ est un opérateur local

(si s et s' coïncident au voisinage de x alors $(\nabla s)_x = (\nabla s)_{x'}$)

et que ∇^2 est un opérateur $\mathcal{C}^\infty$ linéaire donc ponctuel.

On note $\Theta(\nabla) := \frac{i}{2\pi} \nabla^2 \in \mathbf{A}^2(X, \operatorname{End} E)$.

En coordonnées on trouve $\nabla^2 s = d(ds + A \wedge s) + A \wedge (ds + A \wedge s)$

$$\Theta(\nabla) = \frac{i}{2\pi} \left(dA + A \wedge A \right)$$

Si $E \to X$ est un fibré vectoriel holomorphe, on définit un opérateur D'' ~~par~~ sur les sections $\mathcal{C}^\infty$ de E par

$$D'' s = \sum \bar{\partial} s_i \, e_i \qquad \text{si} \quad s = \sum s_i e_i$$

dans un repère holomorphe de E.

D'' n'est pas une connexion.

Si $(E, h) \to X$ est un fibré vectoriel $\mathcal{C}^\infty$ hermitien une connexion ∇ est dite <u>hermitienne</u> si

$$d \langle s, s' \rangle_h = \{ \nabla s, s' \} + \{ s, \nabla s' \}$$

<u>Proposition</u> : Sur un fibré vectoriel holomorphe hermitien $(E, h) \to X$ il existe une unique connexion hermitienne compatible avec la structure holomorphe $(\nabla)^{0,1} = D''$

Sa forme de courbure est appelée forme de Chern de (E, h)

Dem : Sur un ouvert U^α, si ∇ est solution

$$d\, h(e_i, e_j) = \{ \nabla e_i, e_j \} + \{ e_j, \nabla e_i \}$$

$$d''\, h(e_i, e_j) = \{ \nabla^{1,0} e_i, e_j \} \qquad (*)$$

Nécessairement $A^\alpha = (H^\alpha)^{-1}\, d' H^\alpha$

Réciproquement, $A^\alpha := (H^\alpha)^{-1}\, d' H^\alpha$ est une matrice de 1-formes qui définit une connexion ∇^α sur $E \to U^\alpha$.

Sur $U^\alpha \cap U^\beta$, les connexions données par A^α et par A^β sont toutes les deux hermitiennes et holomorphes. Elles coïncident donc par la relation $(*)$

La courbure de la connexion de Chern est localement

$$d A^\alpha + A^\alpha \wedge A^\alpha = d\left((H^\alpha)^{-1} d' H^\alpha \right) + (H^\alpha)^{-1} d' H \wedge H^{-1} d' H$$

$$= - H^{-1} d' H\, H^{-1} d' H' - H^{-1} d''$$

$$= d''\left(H^{-1} d' H \right)$$

Si $(L, h) \to X$ est un fibré en droites hermitien et $H = (h(e)) = (e^{-\varphi})$

$$\Theta(L, h) = \frac{i}{2\pi} d' d'' \varphi = - \frac{i}{2\pi} d' d'' \log h(e)$$

2ième cours

Courants

Retour sur la connexion de Chern.

Sur $(E,h) \to X$ un fibré vectoriel holomorphe hermitien, il existe une unique connexion compatible avec les structures holomorphe et hermitienne.

Si h est donnée dans une ~~carte~~ ~~par trivialisation~~ repère $(e_i^\alpha)_{1\le i\le n}$ par

$$H^\alpha = \left(h(e_i^\alpha, e_j^\alpha) \right)$$

∇ est donnée par la matrice de (1,0) formes $A^\alpha = (d' H^\alpha)(H^\alpha)^{-1}$

et la courbure $\Theta(E,h)$ par $\frac{i}{2\pi} d''\left((d' H^\alpha)(H^\alpha)^{-1} \right)$ de type 1,1.

Si E est de rang 1, en notant $h(e^\alpha, e^\alpha) = e^{-\varphi^\alpha}$

$$\Theta(E,h) = \frac{i}{2\pi} d'd'' \varphi^\alpha = dd^c \varphi^\alpha .$$

I) Définitions

X une variété analytique complexe (pour la plupart des propriétés et des définitions on n'utilise que la structure différentiable). On fixe un atlas U_α. $X = \bigcup \uparrow K_n$

$A^d(X)$ l'espace de forme $\mathcal{C}^\infty$ de degré d sur X muni de la topologie défini par la famille de semi-normes

$$p_{K,s}(u) = \sup_K \sup_{|\alpha|\le s} \sup_{|I|=d} \left| \frac{\partial^{|\alpha|} u_I}{\partial^\alpha a_\alpha} \right| \qquad u = \sum u_I \, da_I$$

$(a_i)_{1\le i\le 2n}$ coordonnées diff

$$A_c^d(X) = \bigcup_{K_n \subset\subset X} \uparrow A_c^d(K_n)$$ formes à support compact dans K_n

En particulier, $u_n \to 0$ signifie $\exists K \,/\, \forall n \;\; u_n \in A_c^d(K)$ et $u_n \to 0$ dans $A^d(X)$.

Def : Un courant de dimension d est une forme linéaire continue T sur $A_c^d(X)$

- $u_n \to 0 \Rightarrow \langle T, u_n \rangle \to 0$
- $\forall K$ compact $\exists s$ (ordre de T sur K) $/$ $\forall u \in A_c^d(K)$

$$|\langle T, u\rangle| \le C \; p_{K,s}(u)$$

(En particulier, T se prolonge en une fl continue sur $\mathcal{C}_c^{s,d}(K)$.

Un courant d'ordre 0 est à coefficients mesure.

<u>Exemples</u> : 1) Toute fonction L^1_{loc} (en particulier $\mathcal{C}^\infty$) a donne un courant $[a]$ de dimension $2n$ par

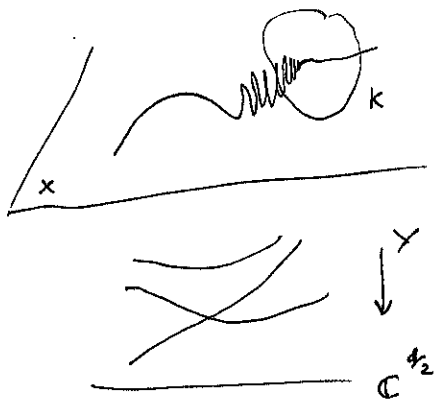
$$\langle [a], \varphi \rangle = \int_X a\,\varphi \qquad \text{d'ordre } 0.$$

$A^d(X) \subset \underset{\text{zim } d}{D}(X)$

2) Si Y est un sous-ensemble analytique de X de dimension $_{\mathbb{R}}$ d

$$\langle [Y], \varphi \rangle = \int_{Y_{reg}} \varphi$$ est un courant de dimension d (d'ordre 0)

Il faut vérifier la convergence
(Tout ensemble analytique est d'aire fini au voisinage de ses pts singuliers



On peut aussi remarquer que par le thm d'Hironaka

$$\langle [Y], \varphi \rangle = \int_{\tilde{Y}} \nu^* \varphi \qquad \nu : \tilde{Y} \to Y \subset X$$

$\uparrow$ résolution

II) <u>Opérations</u>

Comme pour les distributions, elles sont définies par dualité

- Image directe $\quad f : X \to Y$ une application $\mathcal{C}^\infty$ <u>propre</u> $\quad T \in D(X)$

$$\langle f_* T, \varphi \rangle = \langle T, f^* \varphi \rangle \quad \text{car } f^*\varphi \in A_c(X) \text{ et}$$

$\varphi \to f^*\varphi$ est continue

- Produit par une forme $\mathcal{C}^\infty$. $\quad D(X)$ est un $A(X)$-module

$$\langle u \wedge T, \varphi \rangle = (-1)^{\deg u \deg T} \langle T, u \wedge \varphi \rangle$$

- Image réciproque

Il faut étudier l'image directe de formes $\mathcal{C}^\infty$.

Si $\varphi \in A_c(X)$, ~~on pose f~~ et si $f : X \to Y$ est une ~~submersion~~ application $\mathcal{C}^\infty$ propre

on pose $$f_* \varphi(y) = \int_{f^{-1}(y)} \varphi \in L^1_{loc}(Y)$$

Par le théorème de ~~Fubini~~ l'intégration par rapport à une mesure image

$$\langle f_* [\varphi], \psi \rangle = \langle [\varphi], f^* \psi \rangle = \int_X \varphi \wedge f^* \psi$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_Y f_* \varphi \wedge \psi = \langle [f_* \varphi], \psi \rangle$$

(Reste vrai si φ est L^1_{loc})

Mais $\varphi \longrightarrow f_* \varphi$ est continue par le théorème d'intégrale dépendant d'un paramètre, si on suppose que f est une <u>submersion</u> (les fibres sont alors difféomorphes, Y connexe)

On peut alors considérer l'image réciproque de courant par une submersion propre.

De plus, si $\psi \in L^1_{loc}(X)$

$$\langle f^* [\psi], \varphi \rangle = \langle [\psi], f_* \varphi \rangle = \int_Y \psi \wedge f_* \varphi \overset{\text{Fubini}}{=} \int_X f^* \psi \wedge \varphi = \langle [f^* \psi], \varphi \rangle$$

$$\langle f^* [Z], \varphi \rangle = \langle [Z], f_* \varphi \rangle = \int_Z f_* \varphi = \int_{f^{-1} Z} \varphi = \langle [f^{-1} Z], \varphi \rangle$$

comme cycle $\deg f \, |f^{-1} z|$) mais les fibres ici sont réduites

Chap II

Courants

- Analytic Geometry Demailly
- Global residues and intersections on a complex manifold King Transaction of the AMS 192 (1974) 163 - 199

1/ Définitions

2/ Exemples

3/ Opérations

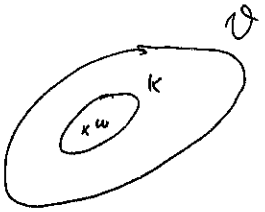
4/ La formule de Lelong - Poincaré

Formule de Cauchy

Si K est un compact à bord lisse de $\mathbb{C}$ et V un voisinage ouvert de K.

Soit $f \in \mathcal{C}^1(V)$. Alors

$\forall w \in \mathring{K}$ $$f(w) = \int_{\partial K} \frac{f(z)}{z-w} \frac{dz}{2i\pi} + \int_K \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(2i\pi)\, z-w}$$



Dem : On peut supposer $w = 0$

Comme $w \mapsto \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{1}{z-w}$ est L^1 sur K

$$\int_K \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{K - B(0,\varepsilon)} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{K - B(0,\varepsilon)} -\bar{\partial}\left(f \frac{dz}{z} \right)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{K - B(0,\varepsilon)} -d\left(f \frac{dz}{z} \right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|z|=\varepsilon} f \frac{dz}{z} - \int_{\partial K} f \frac{dz}{z}$$

$$= 2i\pi f(0) - \int_{\partial K} f \frac{dz}{z} \quad \text{car} \quad \frac{dz}{z}\Big|_{|z|=\varepsilon} = i\, d\theta$$

<u>Conséquence</u> : Soit $f \in A_c(K)$

$$\langle 2i\pi\delta_0, f\rangle = (2i\pi)\, f(0) = \int_K \frac{\partial f}{\partial \bar z}\, \frac{dz\wedge d\bar z}{z} = \int_{\mathbb{C}} -\bar\partial f \wedge \underbrace{\frac{dz}{z}}_{L^1_{loc}} = \left\langle \left[\frac{dz}{z}\right], \bar\partial f \right\rangle$$

$$= \left\langle \bar\partial \left[\frac{dz}{z}\right], f \right\rangle$$

Donc $\bar\partial \left[\frac{dz}{z}\right] = 2i\pi\, \delta_0$

Par un raisonnement analogue $\partial \left[\log|z|\right] = \left[\frac{dz}{z}\right]$

$$-\langle \partial \log|z|, f\rangle = \int_{\mathbb{C}} \log|z|\, \underbrace{\partial f}_{0,1} = \int_{\mathbb{C}} \log|z|\, df = \lim_{\varepsilon\to 0} -\int_{|z|>\varepsilon} \underbrace{\frac{dz}{z}}_{L^1_{loc}} f - \underbrace{\int_{|z|=\varepsilon} \log|z|\, f}_{\varepsilon\log\varepsilon \to 0}$$

$$= -\int_{\mathbb{C}} \frac{dz}{z} f = -\left\langle \left[\frac{dz}{z}\right], f\right\rangle$$

Donc $\frac{1}{2i\pi}\bar\partial\partial \left[\log|z|\right] = \delta_0$ $\qquad \boxed{dd^c[\log|z|^2] = \delta_0}$

- Si Y est une sous variété lisse de X, localement Y est donnée par $(z_1 = 0)$ dans un système de coordonnées bien choisi (z_i)

Par image réciproque par $\pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$
$(z_i) \to z_1$

$$[Y] = \pi^* \delta_0 = \pi^* dd^c[\log|z|^2] = dd^c[\log|z_1|^2]$$

- Si Y est un sous-ensemble analytique de X donné localement par $f = 0$

$[Y]$ et $\underbrace{dd^c \log|f|^2}_{\text{à coeff } L^1_{loc}}$ sont deux courants fermés d'ordre 0 qui coïncident sur Y_{reg}

Soit $T = [Y] - dd^c \log |f|^2$

Soit $z_1 = z_2 = 0$ des équations pour Y_{sing}

$z_1 T = 0$ car T est d'ordre 0 et supporté par Y_{sing}

$$|\langle T, z_1 f \rangle| \leq C \sup_{\text{support } T} |z_1 f| = 0$$

$z_1 dT = 0$ car T est fermé

Donc $T \wedge dz_1 = 0$. Si $T = \sum T_{ij}\, dz_i \wedge d\bar{z}_j$

on a nécessairement $T = dz_1 \wedge \smile = dz_1 \wedge dz_2 \wedge \dots = 0$

Donc $[Y] = dd^c \log |f|^2$

- Si s est une section holomorphe d'un fibré en droites holomorphes hermitien $(L, h) \to X$

$$dd^c \log \|s\|_h^2 \simeq dd^c \log |\sigma|^2 \|e\|_h^2 \simeq [(s=0)] - \Theta(L,h)$$

5/ <u>Cohomologie</u> (Voir par exemple Hirzebruch : Topological methods in algebraic geometry)

<u>Cohomologie de De Rham</u>

Si X est une variété différentiable, on a deux complexes de faisceaux

$$\begin{array}{ccccccc} A^0(U) & \xrightarrow{d} & A^1(U) & \xrightarrow{d} & A^2(U) & \dots \\ \downarrow i & & \downarrow i & & \downarrow i & \\ \mathcal{D}^0(U) & \xrightarrow{d} & \mathcal{D}^1(U) & \xrightarrow{d} & \mathcal{D}^2(U) & \end{array}$$

<u>Théorème</u> : (i) Chacun des deux complexes est une résolution acyclique du faisceau constant $\underline{\mathbb{C}}$. Donc

$$\begin{array}{ccccc} H^\bullet(A^\bullet(X,\mathbb{C})) & = & H^\bullet_{\check{C}ech}(X,\underline{\mathbb{C}}) & = & H^\bullet(\mathcal{D}^\bullet(X,\mathbb{C})) \\ \| & & & & \| \\ H^\bullet_{DR,\mathcal{C}^\infty}(X,\mathbb{C}) & & & & H^\bullet_{DR,\mathcal{D}}(X,\mathbb{C}) \end{array}$$

(ii) Le morphisme de résolution i est un quasi-isomorphisme

Donc i induit un isomorphisme en cohomologie.

$$H(i) : \quad H^\bullet_{DR,\mathcal{C}^\infty}(X,\mathbb{C}) \simeq H^\bullet_{DR,\mathcal{D}}(X,\mathbb{C})$$

<u>Rappels</u> : * Résolution - $\underline{\mathbb{C}} \xrightarrow{i} A^0(U) \xrightarrow{d} A^1(U) \to \cdots$

est exacte : . $\operatorname{Ker} d : A^0(U) \to A^1(U) = \underline{\mathbb{C}}(U)$

. $\forall x \quad \forall U \quad \forall u \in A^d(U) \quad d \geq 1 \quad du = 0$

$\exists V \ni x \quad \exists v \in A^{d-1}(V) / \ u = dv$.

(Lemme de Poincaré)

* Acyclique : Les faisceaux $A^d(U)$ ont une cohomologie de Čech nulle

(comme ce sont des faisceaux de $\mathcal{C}^\infty$ module et comme on a l'existence de partition de l'unité)

* Morphisme de résolution : $d\,i = i\,d$

* quasi-isomorphisme $\mathcal{H}(i) : \mathcal{H}^j(A^d) \to \mathcal{H}^j(\mathcal{D}^d)$ est un isomorphisme

$\mathcal{H}^j(A^d)$ faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto H^j_{\check{C}ech}(U, A^d)$

~~Pour tout ouvert~~

Cohomologie de Dolbeault

Si X est une variété analytique complexe et si p est fixé

$$\begin{array}{ccccccc} A^{p,0}(U) & \xrightarrow{d''} & A^{p,1}(U) & \xrightarrow{d''} & \cdots & A^{p,q}(U) & \longrightarrow \cdots \\ \uparrow i & & \uparrow i & & & & \\ \mathcal{D}^{p,0}(U) & \xrightarrow{d''} & \mathcal{D}^{p,1}(U) & \longrightarrow & & & \end{array}$$

<u>Théorème</u> : (i) Chacun des deux complexes de faisceaux est une résolution du faisceaux Ω_X^p des germes de p-formes holomorphes sur X

$$H^{p,q}_{\bar\partial, \mathcal{D}}(X, \mathbb{C}) := H^q(A^{p,\cdot}(X)) \simeq H^q(X, \Omega_X^p)$$

(ii) Le morphisme de résolution i est un quasi-isomorphisme :

Donc i induit un isomorphisme en cohomologie.

$$H(i) : \quad H^{p,q}_{\bar\partial, \mathcal{D}}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^{p,q}_{\bar\partial, \mathcal{D}}(X, \mathbb{C}).$$

Lemme de Dolbeault - Grothendieck

(i) Soit T un courant de bidegré $(p,0)$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}^n$ avec $\bar\partial T = 0$

Alors T est associé à une p-forme holomorphe sur U.

(ii) Soit T un courant de bidegré (p,q) $q>0$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}^n$ avec $\bar\partial T = 0$

Soit $x \in U$. $\exists V \ni x$ ouvert et Z courant tel que $T = \bar\partial Z$ sur V.

<u>Dem</u> : (i) Puisque $\bar\partial\left(\sum u_{IJ}\, dz_I \wedge d\bar z_J\right) = \sum \frac{\partial u_{IJ}}{\partial \bar z_k}\, d\bar z_k \wedge dz_I \wedge d\bar z_J$

on a localement $\binom{n}{p}$ complexes avec $p=0$. On suppose donc $p=0$.

$T * \rho_\varepsilon \to T$ faiblement

$\bar\partial(T * \rho_\varepsilon) = (\bar\partial T) * \rho_\varepsilon = 0$ donc $T * \rho_\varepsilon$ est une fonction holomorphe.

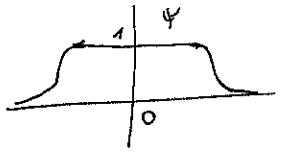
Par le principe de la moyenne

$$T * \rho_\varepsilon * \rho_\eta = T * \rho_\varepsilon$$

A la limite $T * \rho_\eta = T$ donc T est associé à une fonction $\mathcal{C}^\infty$, $\bar\partial$-fermée donc holomorphe.

(ii) T s'écrit $T = T_1 \wedge d\bar z_m + T_2$ où ni T_1 ni T_2 n'ont de $d\bar z_m$

Avec $\tau_1 = \psi(z_m)\, T_1 *_m \dfrac{1}{2i\pi z_m}$



convolution par rapport à z_m
définie ~~à l'aide du noyau de~~ par dualité

$$\langle \tau_1, \varphi \rangle = \langle \underbrace{\tau_1}_{\text{à support compact.}}, \varphi *_m \frac{1}{2i\pi z_m} \rangle$$

On vérifie $\bar\partial \tau_1 = \psi(z_m)\, T_1(z) \wedge dz_m$ $\qquad \bar\partial \dfrac{1}{2i\pi z_m} = \delta_0\, dz_m$

Donc $T - \bar\partial \tau_1$ ne contient pas de dz_m au voisinage de 0.

On termine par récurrence.

<u>Application</u> : Tout courant est cohomologue à [un courant associé à] une forme lisse.

dT représente la classe nulle dans $H_{DR,\mathcal{D}}(X, \mathbb{C})$ donc dans $H_{DR,A}$

$$dT = [da] = d[a] \quad \text{car } a \text{ est } \mathcal{C}^\infty$$

$T - [a]$ défini une classe dans $H_{DR,\mathcal{D}}(X, \mathbb{C})$ donc dans $H_{DR,A}$

$\exists\, b \in A \;/\; T - [a] = [b] + dR \qquad R \in \mathcal{D}$.

Cohomologie de Dolbeault

$$\begin{array}{ccccccc} D^{p,0}(U,E) & \xrightarrow{D''} & D^{p,1}(U,E) & \cdots & & D^{p,q}(U,E) & \xrightarrow{D''} \\ \cup & & \cup & & & & \\ A^{p,0}(U,E) & \xrightarrow{D''} & A^{p,1}(U,E) & & & & \end{array}$$

<u>Théorème</u>: Les deux complexes sont des résolutions acycliques du faisceau des sections holomorphes de $\Omega^p_X E$. L'injection $D^{p,\bullet}(U,E) \supset A^{p,\bullet}(\cdot,E)$ est un quasi-isomorphisme

$$H^{p,q}_{Dolb}(X,E) := H^q(D^{p,\bullet}(X,E)) \simeq H^q(\Omega^p_X \otimes E)$$

$$\uparrow\wr\, H(i)$$

$$H^q(A^{p,\bullet}(X,E)) \simeq H^q(\Omega^p_X \otimes E)$$

<u>Dem</u>: Puisque $D''\left(\sum u_{IJ\lambda}\, dz_I \wedge d\bar{z}_J \otimes e_\lambda\right) = \sum \frac{\partial u_{IJ\lambda}}{\partial \bar{z}_j}\, d\bar{z}_j \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J \otimes e_\lambda$

pour chaque $|I| = p$ on obtient localement un complexe de Dolbeault avec $p=0$.

On peut donc supposer $p=0$ pour les questions locales.

- $(D^{0,\bullet}(U,E), D'')$ est une résolution de E

Soit v une ~~forme~~ courant de bidegré $0,0$ avec $D''v = 0$

Soit ρ_ε une famille régularisante

$T * \rho_\varepsilon$ est une famille de courants (associés à des formes) $\mathcal{C}^\infty$

$$\langle d''(T*\rho_\varepsilon), \varphi\rangle = (-1)^{\deg T+1} \langle T*\rho_\varepsilon, d''\varphi\rangle$$

$$= (-1)^{\deg T+1} \langle T, \rho_\varepsilon * d''\varphi\rangle = (-1)^{\deg T+1} \langle T, d''(\rho_\varepsilon * \varphi)\rangle = 0$$

Donc $T*\rho_\varepsilon$ est une fonction holomorphe.

$(T*\rho_\varepsilon)*\rho_\eta = T*\rho_\varepsilon$ car la moyenne des valeurs d'une fonction holomorphe sur une sphère vaut sa valeur au centre

$T*\rho_\varepsilon \longrightarrow T$ faiblement, $T*\rho_\varepsilon = T$ est holomorphe.

$\ker D'' : D^{0,0}(U,E) \longrightarrow D^{0,1}(U,E) = \mathcal{O}(E)$

- Exactitude en degré ≥ 1 au voisinage de x_0

T de bidegré $0, q$ $q \geq 1$ $d''T = 0$ sur $U \ni x_0$

$T = R \wedge d\bar{z}_m + S$ ni T_1 ni T_2 contiennent $d\bar{z}_m$

$r \overset{\text{def}}{=} \sum_{|J|=q-1} r_J \, d\bar{z}_J$ $r_J = (\rho(z_m) R_J) *_{z_m} \frac{1}{\pi z_m}$ (solution fondamentale)

$\frac{\partial r_J}{\partial \bar{z}_k} = 0$ $k > m$ $\frac{\partial r_J}{\partial \bar{z}_m} = \rho(z_m) R_J$

$T - d''r = (1 - \rho(z_m)) R \wedge d\bar{z}_m + S$ n'a pas de $d\bar{z}_m$ au voisinage de x_0

Par récurrence, on trouve un courant r tel que $T - d''r = 0$.

- $D^{p,\bullet}(U, E)$ est un complexe de $\mathcal{C}^\infty$-modules. Il est donc acyclique (ces modules n'ont pas de cohomologie de Čech.)

- L'application i vérifie $D''i = i D''$ est induit donc une application $H(i)$ en cohomologie.

Soit u une forme globale D'' fermée telle que

$u = D''T$ $\{u\}_{\text{courant}} = 0$

Localement, $u = D''v$ $T - v$ est un courant D''-fermé.

Par le premier point, c'est une forme $\mathcal{C}^\infty$. Donc T est $\mathcal{C}^\infty$

Donc $\{u\}_{\mathcal{C}^\infty} = 0$. et $H(i)$ est injective.

Théorie de Hodge

I) Introduction

II) Representation des classes de cohomologie par des formes harmoniques

III) L'opérateur $*$ de Hodge

IV) Théorie de Hodge sur les variétés kählériennes.

I) Introduction.

L'objectif initial de Hodge, comme il l'exprime dans son texte au congrès international en 1950 est de comprendre et d'affiner l'étude de la topologie des variétés projectives V, due à Lefschetz, à l'aide principalement de la théorie des formes différentielles.

II) Représentation par des formes harmoniques

Le complexe de De Rham des formes différentielles permet de calculer la cohomologie des variétés différentiables. La donnée d'une métrique sur la variété permet de faire un choix de représentants pour ces classes de cohomologie.

On définit une norme sur les espaces de formes (à valeurs dans un fibré vect C^∞ hermitien E)
On cherche une forme de norme minimale parmi les formes fermées représentant la même classe.

$$\| \phi + t\, d\psi \|^2 = \| \phi \|^2 + 2t \langle \phi, d\psi \rangle + O(t^2).$$

Il faut donc $\forall \psi \quad \langle \phi, d\psi \rangle = 0$.

On introduit l'opérateur adjoint formel de d noté d^* défini par la condition

$$\forall \psi \in A_c^\bullet(X, \mathbb{C}) \qquad \langle d\phi, \psi \rangle = \langle \phi, d^*\psi \rangle$$

L'existence est assurée par un calcul local d'intégration par partie, que l'on peut formaliser à l'aide de l'opérateur $*$.

On introduit alors l'opérateur Laplacien Δ agissant sur les espaces de formes à support compact $A_c(X, \mathbb{C})$.

$$\Delta = (d + d^*)^2 = dd^* + d^*d. \qquad \text{Notons} \quad \operatorname{Ker}\Delta = \operatorname{Ker} D \cap \operatorname{Ker} D^*$$

On peut considérer Δ comme un opérateur linéaire non borné à domaine dense sur les espaces de formes $L^2_{loc}(X, \mathbb{C})$.
On fait désormais l'hypothèse que X est <u>compacte</u>. Il y a alors une unique extension maximale de Δ en un opérateur auto-adjoint ($\operatorname{Dom}\Delta = \operatorname{Dom}\Delta^*$ et $\Delta = \Delta^*$ sur $\operatorname{Dom}\Delta$) positif.

La théorie des opérateurs différentiels de Fredholm (en particulier des opérateurs elliptiques) (Voir par exemple Taylor "Partial diff equations" Basic theory p 351 - 357 montre que

<u>Théorème</u> : (i) $\operatorname{Ker}\Delta$ est de dimension finie et composé de formes lisses

(ii) $A_0(X, E) = \operatorname{Ker}\Delta \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im}\Delta : A(X, \mathbb{C}) \to A(X, \mathbb{C})$

<u>Corollaire</u> : $\operatorname{Ker}\Delta \longrightarrow H_{dR}(X, \mathbb{C})$ est un isomorphisme.

Toute classe de cohomologie de de Rham ~~admet~~ contient une unique forme harmonique.

Ce théorème reste vrai pour * (E, D) si D est une connexion plate
* $E \to X$ vectoriel holomorphe hermitien $(E, \bar\partial)$ cohomologie de Dolbeault.

$$\operatorname{Ker}\Delta'' \longrightarrow H^{p,q}_{Dol}(X, E) \quad \text{est un isomorphisme.}$$

III) L'opérateur $*$ de Hodge

Ponctuellement, on vérifie par l'algèbre linéaire l'existence d'un opérateur $*$

$$* : \Lambda^d T^* M \longrightarrow \Lambda^{n-d} T^* M$$

telle que $dV_g \langle u, v \rangle = u \wedge * v$

Dans une base orthonormée dx_i de $T^* M$ on trouve

$$*\left(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_d}\right) = \pm \; dx_{i_1^c} \wedge \dots \wedge dx_{i_{m-1}^c}$$

La relation $\displaystyle\int_M u \wedge * v = \int_M \langle u, v \rangle dV_g = \langle\langle u, v \rangle\rangle$

montrera que $d^* = * d *$ et $** = \pm \, Id$.

On en déduit que si u est harmonique, $* u$ aussi.
Par conséquent

$$\begin{array}{ccccc} H^d(M, \mathbb{C}) & \times & H^{n-d}(M, \mathbb{C}) & \longrightarrow & H^n(M, \mathbb{C}) \overset{\int_M}{\simeq} \mathbb{C} \\ \wr\wr & & \wr\wr & & \\ \mathcal{H}^d(M, \mathbb{C}) & \times & \mathcal{H}^{n-d}(M, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \end{array}$$

est une dualité parfaite car $\displaystyle\int_M u \wedge * u = \|u\|^2 > 0$ si $u \neq 0$.

C'est en fait une conséquence de la dualité de Poincaré

$$H_d(M)^* \times H_{n-d}(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z} \quad \text{est unimodulaire.}$$

i.e. Toute forme linéaire $H_{n-d}(M, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ se représente comme intersection avec un cycle fermé de dim d

Toute classe de $H_d(M, \mathbb{Z})$ d'intersection nulle avec toute classe de $H_{n-d}(M, \mathbb{Z})$ est de torsion.

IV) Théorie de Hodge sur les variétés kählériennes compactes

a/ Définition, premières obstructions.

b/ Les opérateurs de la géométrie kählérienne.

c/ Relations de Hodge ~~et conséquences~~

d/ Décomposition de Hodge (autre obstruction)

e/ Représentation de SL_2 et forme primitive

f/ Double décomposition.

g/ Signature de la forme d'intersection (autre obstruction)

a/ X est une variété analytique complexe. $h = \sum h_{ij}\, dz_i \otimes \overline{dz_j}$ sur $TX = (T^{1,0}, J^{alg})$ — but

La donnée d'une métrique hermitienne $J = J^{geom}$ sur $(T_{\mathbb{R}}X, J)$ (~~localement~~ complexifiée $h = \sum h_{ij}\, dz_i \otimes d\bar{z}_j$ sur $T_{\mathbb{C}}X$, $h_{ij} = \overline{h_{ji}}$, $\bar{\omega} = \omega$) est équivalente à la donnée d'une 2-forme de type $(1,1)$ réelle (localement $\omega = i \sum dz_i \wedge d\bar{z}_j\, h_{ij}$) positive

$\forall X \in T_{\mathbb{R}}X - \{0\}$ $\omega(X, JX) > 0$

$$i\, dz \wedge d\bar{z} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) > 0$$

$$i\, dz \wedge d\bar{z} \left(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x}\right) > 0$$

Sur $\mathbb{C}^{N+1*}$ la forme $i\partial\bar{\partial} \log |z|^2$ a pour noyau en V la droite $\mathbb{C}V$

~~Si $\phi : X \to \mathbb{P}^N$ est un plongement~~

$$i\partial\bar{\partial} \log |z|^2_{(a)} = \frac{\left(\sum dz_i \wedge d\bar{z}_i\right) |a|^2 - \sum \bar{a}_i\, dz_i \wedge \sum a_j\, d\bar{z}_j}{|a|^4}$$

$$i\partial\bar{\partial} \log |z|^2_{(\lambda a)} (\lambda X, \lambda JX) = i\partial\bar{\partial} \log |z|^2_{(a)} (X, JX).$$

passe au quotient sur $\mathbb{P}^N$ en une forme positive.

Si $\phi : X \to \mathbb{P}^N$ est un plongement, X hérite d'une métrique hermitienne.

Ici ω est en plus fermée.

<u>Def</u> : Une forme de type $(1,1)$, réelle positive et fermée est dite kählérienne.

Si $h = \sum dz_j \otimes d\bar{z}_j = \sum (dx_j + i\,dy_j) \otimes (dx_j - i\,dy_j)$

$$= \underbrace{\sum dx_j \otimes dx_j + dy_j \otimes dy_j}_{\mathrm{re}\,(h)} - i \underbrace{\sum (dx_j \otimes dy_j - dy_j \otimes dx_j)}_{-\mathrm{Im}\,h}$$

g : métrique riemannienne sur X.

A un coefficient près, sur tout sev complexe V (orienté avec l'orientation complexe X, JX) de dimension $_{\mathbb{C}}$ d,

$$d\mathrm{Vol}_g \,|_V = \omega^d$$

$$2\, dx \wedge dy = i\, dz \wedge d\bar{z}$$

Remarque : $d\mathrm{Vol}_g \,|_{y_1 = y_2 = 0} = dx_1 \wedge dx_2$

<u>Conséquences</u> : (1) Si $Y \subset X$ est un sous ensemble analytique fermé de X projective (Käh compact) de dim d

$$\int_Y \omega^d \overset{\text{def}}{=} \int_{\tilde{Y}} \pi^* \omega^d = \int_{Y_{reg}} \omega^d = \int_{Y_{reg}} d\mathrm{Vol}_g > 0.$$

Donc la classe d'homologie de Y n'est pas nulle.

(2) $\int_X \omega^n = \mathrm{Vol}_g X > 0$ Donc $\forall\, 1 \le d \le n$ ω^d n'est pas exacte

et $H^{2d}(X, \mathbb{C}) \neq 0$. obstruction topologique.

b/ Les opérateurs de la géométrie kählérienne.

La condition de fermeture de ω s'écrit localement

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial z_k} = \frac{\partial h_{kj}}{\partial z_i} \qquad \forall\ (i,k) \qquad \forall\ j$$

Cette condition permet de trouver localement un repère holomorphe sur X $z_1 \dots z_n$ tel que au voisinage de x_0

$$h\left(\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial z_j}\right) = \delta_{ij} + O(|z|^2)$$

On en déduit que sur une variété kählérienne, les relations entre opérateurs différentiels d'ordre 1 sont les mêmes que sur $\mathbb{C}^n$ plat.

$L = \omega \wedge \cdot$ $\qquad\qquad$ Λ son adjoint

La relation de Hodge $\qquad i\bar\partial^* = [\Lambda, \bar\partial] \qquad -i\partial^* = [\Lambda, \partial]$

c/ La décomposition de Hodge

$$\Delta'' = [\bar\partial, \bar\partial^*] = [\bar\partial, -i[\Lambda, \partial]]$$

$$= -i\,[[\bar\partial, \Lambda], \partial] - i\,[\Lambda, [\bar\partial, \bar\partial]] = \Delta'$$

$[A, \quad]$ est une dérivation pour le produit $[\ ,\ ]$ gradué

$$[A, [B, C]] = [[A, B], C] + (-1)^{ab}[B, [A, C]]$$

On en déduit $\Delta = 2\Delta''$

Cor : Sur une variété kählérienne, les p-formes holomorphes sont fermées.

Cor : Les composantes de type (p,q) d'une forme de degré d harmoniques sont harmoniques. Donc

$$\mathcal{H}^d(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=d} \mathcal{H}^{p,q}(X,\mathbb{C})$$

↑ espace de forme harmonique de type p,q

En appliquant le théorème de représentation, on en déduit

$$H^d(X,\mathbb{C}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{de R}}}{\simeq} H^d_{DR}(X,\mathbb{C}) \simeq \mathcal{H}^d_{\Delta}(X,\mathbb{C})$$

$$H^{p,q}(X,\Omega^p) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dolb}}}{\simeq} H^{p,q}_{\text{Dolb}}(X,\mathbb{C}) \simeq \mathcal{H}^{p,q}_{\Delta''}(X,\mathbb{C})$$

$$H^d(X,\mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{p+q=d} H^{p,q}(X,\mathbb{C})$$

ne dépend pas de la métrique.

Classe de coh qui admettent un représentant de type p,q

avec de plus $\overline{H^{p,q}(X,\mathbb{C})} = H^{q,p}(X,\mathbb{C})$.

après le lemme des deux types.

<u>Conséquence topologique</u> : Les nombres de Betti de X d'indice impair sont pairs.

<u>Lemme des deux types</u>. Soit X kählérienne compacte.

Soit α d-fermée et $\bar\partial$-exacte.

Alors α est $\partial\bar\partial$-exacte.

<u>Dem</u> : $\alpha = \bar\partial\beta$ $\qquad \beta = H'(\beta) + \Delta' G'\beta$

$$\partial\alpha = -\bar\partial\partial\beta = -\bar\partial\partial\partial^*\partial G'\beta = \partial\partial^*\bar\partial\partial G'\beta = 0$$

car $\bar\partial\partial + \partial\bar\partial = 0$ et $\partial\partial^* + \partial^*\bar\partial = 0$

Donc $\partial^* \bar\partial \partial G'\beta = 0$ par intégration

et donc $\alpha = \bar\partial \Delta' G'\beta = \bar\partial \partial \partial^* G'\beta + \underbrace{\bar\partial \partial^* \partial G'\beta}_{=0}$

V) Prolongements

- Voir la décomposition de Lefschetz et la définition des formes primitives dans Voisin et Demailly (Panorama et synthèse)

- Voir la décomposition de Hodge comme dégénérescence d'une suite spectrale dans Demailly.

- Voir la signature de la forme d'intersection dans Voisin

<u>Prop</u> : $$H^d(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=d} H^{p,q}_{DR}(X, \mathbb{C})$$

où $H^{p,q}_{DR}(X, \mathbb{C})$ est l'ensemble des classes de cohomologie de Del Rham qui admettent un représentant de type (p,q).

<u>Dem</u> :

$$\begin{array}{ccc} H^d(X, \mathbb{C}) & & \bigoplus_{p+q=d} H^{p,q}_{DR}(X, \mathbb{C}) \\ \wr & & \uparrow p \\ \mathcal{H}^d(X, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \bigoplus_{p+q=d} \mathcal{H}^{p,q}(X, \mathbb{C}) \end{array}$$

p est injective car une forme harmonique exacte est nulle.
Soit u_{pq} de type (p,q) fermée

Par les deux théorèmes de représentation

$$u_{p,q} = h + d\,v \qquad \Delta h = 0$$
$$= H_{pq} + \bar{\partial}\, v_{p,q-1} \qquad \Delta'' h = 0$$

$u_{p,q} - H_{pq}$ est d-fermée et $\bar{\partial}$ exacte donc d exacte

$$u_{p,q} = H_{pq} + d\,\omega$$

$h - H_{pq}$ est harmonique et d exacte donc nulle.

Donc h est de type p,q.

Donc p est surjective.

Conséquence : Comme $\overline{H^{p,q}_{DR}(X,\mathbb{C})} = H^{q,p}_{DR}(X,\mathbb{C})$

$h^{p,q} = h^{q,p}$ et les nb de Betti d'ordre impair sont pairs.

Le cup produit est bi gradué par le type.

(attention, le produit extérieur de formes harmoniques n'est pas harmonique en général).

Courants de Green.

I) Retour sur la cohomologie des courants (GS p 101)

II) Définition des courants de Green.
Différence de deux courants de Green.

III) Construction

IV) Définition du $*$-produit.

- $\displaystyle\int_{\substack{\varepsilon\text{-normal}\\ \text{circle}}} \frac{df}{f} \longrightarrow 1$

- La régularisation ne conserve pas la filtration de Hodge.

-

I) Retour sur la cohomologie des courants

<u>Théorème</u> : X variété analytique complexe

(i) Si α est un courant avec $\partial\bar\partial\alpha$ lisse alors

$$\alpha = a + \bar\partial\beta + \partial\gamma \quad \text{avec } a \text{ lisse}$$

(ii) Si $a = \bar\partial\alpha + \partial\beta$ avec a lisse alors

$$a = \bar\partial b + \partial c \quad \text{avec } b, c \text{ lisse}$$

~~Corollaire~~

Dém :

(i) est une version précise de l'isomorphisme $H_{DR,\mathcal{C}^\infty} = H_{DR,\text{courants}}$

Si α est un courant avec $d\alpha$ lisse, alors $d(d\alpha) = 0$

donc $d\alpha$ défini une classe dans $H_{DR,\mathcal{C}^\infty}$ nulle dans $H_{DR,\text{courants}}$

donc nulle dans $H_{DR,\mathcal{C}^\infty}$: Il existe a / $d\alpha = da$ $a \in \mathcal{C}^\infty$.

$\alpha - a$ défini une classe dans $H_{DR,\text{courants}}$ donc dans $H_{DR,\mathcal{C}^\infty}$.

Il existe $b \in \mathcal{C}^\infty$ / β courant $\alpha - a = b + d\beta$

Donc $\alpha = \text{lisse} + d\beta$

Si α vérifie $\partial\bar\partial\alpha$ lisse, $\partial(\bar\partial\alpha)$ lisse donc $\bar\partial\alpha = a + \partial\alpha_1$

~~$\bar\partial\alpha = a_1 + \partial\alpha_1$~~ $\partial(\bar\partial\alpha_1)$ lisse $\bar\partial\alpha_1 = a_1 + \partial\alpha_2$

Si α est de type (p,q), on peut choisir α_1 de type $(p-1, q+1)$

car ∂ est de type pure. α_2 $(p-2, q+2)$. $\bar\partial\alpha_i = a_i + \partial\alpha_{i+1}$

Après un nombre fini d'étapes on trouve $\alpha_N = 0$ et $\bar\partial\alpha_{N-1} = a_{N-1} \in \mathcal{C}^\infty$

Donc $\alpha_{N-1} = \text{lisse} + \bar\partial\beta_{N-1}$

~~$\partial(\alpha_{N-1} - \bar\partial\beta_{N-1})$ lisse donc $\alpha_{N-1} - \bar\partial\beta_{N-1} = b_{N-2} + \partial\alpha_{N-1} - \partial\bar\partial\beta_{N-1} = \partial b_{N-2}$~~

$\bar\partial\alpha_{N-2} = a_{N-2} + \partial\alpha_{N-1} = \text{lisse} - \bar\partial\partial\beta_{N-1}$

$\bar\partial(\alpha_{N-2} + \partial\beta_{N-1})$ lisse

$\alpha_{N-2} + \partial\beta_{N-1} = \text{lisse} + \bar\partial\beta_{N-2}$

$\bar\partial\alpha_{N-3} = \text{lisse} + \partial\alpha_{N-2} = \text{lisse} + \bar\partial\partial\beta_{N-2}$

En remontant, on trouve $\alpha = \text{lisse} + \partial\,\_\_ + \bar\partial\,\_\_$

(ii) Si $a = \bar\partial\alpha + \partial\beta$ avec a lisse

$\partial\bar\partial\alpha$ lisse donc $\alpha = b + \partial\gamma + \bar\partial\delta$

$\beta = c + \partial\phi + \bar\partial\psi$

$$a = \bar\partial b + \partial c + \partial\bar\partial(\psi - \delta)$$

Donc $\partial\bar\partial(\psi - \delta)$ lisse $\quad \psi - \delta = \text{lisse} + \partial\,\_\_ + \bar\partial\,\_\_$

$\partial\bar\partial\,\psi - \delta = \partial\,\text{lisse}$

$$a = \bar\partial\,\text{lisse} + \partial\,\text{lisse}.$$

<u>Corollaire</u>

$$\widetilde{A}^{p,q} := \frac{A^{p,q}(X,\mathbb{C})}{\partial A^{p-1,q} + \bar\partial A^{p,q-1}} \qquad \widetilde{\mathcal{D}}'^{pq} = \frac{\mathcal{D}'^{pq}}{\partial\mathcal{D}'^{p-1,q} + \bar\partial\mathcal{D}'^{p,q-1}}$$

$\widetilde{A}^{p,q} \xrightarrow{\iota} \widetilde{\mathcal{D}}'^{pq}$ bien définie, injective par (ii)

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{A}^{p,q} & \xrightarrow{\iota} & \widetilde{\mathcal{D}}'^{pq} \\ \partial\bar\partial \downarrow & & \downarrow \partial\bar\partial \\ B^{p+1,q+1} = \partial\bar\partial\widetilde{A}^{pq} & & \mathcal{B}^{p+1,q+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}$$

$\operatorname{Ker}\partial\bar\partial : \widetilde{\mathcal{D}}'^{pq} \to \mathcal{B}^{p+1,q+1} \subset \operatorname{Im}\iota$ par (i)

<u>Théorème</u> : X kählérienne compacte lisse

(i) $\alpha \in \mathcal{D}'^{pq}$ $p \geq 1$ $q \geq 1$ d-fermé et d ou ∂ ou $\bar\partial$ exacte

Alors α est $\partial\bar\partial$ exacte. De plus, si α est $\mathcal{C}^\infty$ sur un ouvert U le potentiel peut être choisi $\mathcal{C}^\infty$ sur cet ouvert

(ii) $\alpha \in \mathcal{D}'^{pq}$ avec $\partial\bar\partial\alpha = 0$

Alors $\alpha = h + \partial\beta + \bar\partial\gamma$ h $\mathcal{C}^\infty$ harmonique.

C'est une conséquence de la théorie de Hodge des variétés kählériennes compactes (Voir Griffiths - Harris, Demailly ch 6)

<u>Corollaire</u> : Si X est kählérienne compacte

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^{p,q}(X) \arrow[r, phantom, "\overset{\text{Hodge}}{\simeq}"] & \mathcal{H}^{p,q} \arrow[r] & \widetilde{A}^{pq} \arrow[r, "\partial\bar\partial"] & \mathcal{B}^{p+1,q+1} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^{p,q}(X) \arrow[r] \arrow[u, equal] & \widetilde{\mathcal{D}}'^{pq} \arrow[r, "\partial\bar\partial"] & \mathcal{B}^{p+1,q+1} \arrow[r] \arrow[u, "i"] & 0 &
\end{tikzcd}$$

et $\mathcal{B}^{p+1,q+1} = \partial\bar\partial\, \widetilde{A}^{p,q} = (d\, A(X))^{p+1,q+1}$

II) Courants de Green - Formes de Green

<u>Def</u> : Un <u>courant de Green</u> pour un cycle analytique Z de codim p dans une variété analytique complexe X est un courant $\eta \in \mathcal{D}'^{p-1,p-1}$ tel que

$$dd^c \eta + [Z] \in A^{p,p}(X)$$

<u>Remarques</u> : (*) $d[Z] = 0$ donc $[Z]$ définit une classe dans $H^{2p}_{DR,\,\text{Courant}}(X)$

$\exists\, a \in H^{2p}_{DR\,\mathcal{C}^\infty}(X)$ / $[Z] - a = d\alpha$

Si X est kählérienne compacte, $d\alpha$ peut être choisi de type (p,p) et donc pour $p \geq 1$ $d\alpha = -dd^c\beta$ par le lemme des deux types.

Il existe donc un courant de Green.

(*) Si g et g' sont deux courants de Green pour Z

$d'd''(g-g')$ lisse donc $g - g' = \text{lisse} + \partial\,\square + \bar\partial\,\square$

$[g-g'] \in \operatorname{Im} i \subset \widetilde{\mathcal{D}}'^{p-1,p-1}$

On cherche des courants de Green avec des singularités faibles afin de pouvoir les multiplier avec d'autres courants pour construire une théorie de l'intersection.

<u>Def</u> : Une <u>forme de Green</u> pour un cycle analytique Z est un courant de Green pour Z associé à une forme L^1, $\mathcal{C}^\infty$ sur $X - |Z|$.

Def : Une forme η sur $X-|Z|$ est dite à singularités logarithmiques le long de Z s'il existe

- Une variété lisse M quasi-projective, un diviseur D à composante lisse à croisements normaux, une application $\pi : M \to X$ propre telle que $\pi : M - |D| \longrightarrow X - |Z|$ soit lisse
- Une forme ρ L^1_{loc} sur M, $\mathcal{C}^\infty$ sur $M-|D|$ telle qu'au voisinage de tout point de $|D|$ où $D_i = \{ z_i = 0 \}$ $D = \bigcup_{i=1}^{r} D_i$ il existe des formes a_i d-fermées et b $\mathcal{C}^\infty$ avec

$$\rho = \sum_{i=1}^{r} a_i \log \left(\sum_{i=1}^{r} |z_i|^2 \right) + b$$

- $\eta = \pi_* \rho_{|M-|D|}$

Remarques : η est alors L^1_{loc}

$$[\eta] = \pi_* [\rho]$$

car $|D|$ est négligeable et le théorème de Fubini s'applique sur $M-|D|$ car π y est lisse.

III) Construction des formes de Green

* En codimension 1.

Soit $D \subset X$ un diviseur effectif, $\mathcal{O}(D)$ le fibré en droites associé avec $s \in H^0(\mathcal{O}(D))$ telle que $(s) = D$.

Soit h une métrique sur $\mathcal{O}(D)$. La formule de Lelong-Poincaré donne

$$dd^c \log \|s\|^{-2} + [D] = \Theta_h(\mathcal{O}(D), h)$$

Par le théorème de résolution des singularités d'Hironaka, il existe

$$\begin{array}{ccc} E & \subset & \tilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ D & \subset & X \end{array}$$

E diviseur à composantes lisses à croisement normaux

$\pi^{-1} D = E$

$\pi^* \log \|s\|^{-2}$ est à singularités logs le long de E.

* En codimension supérieure $p>1$ si Y est une sous-~~variété lisse~~ ensemble analytique de X projective

$$\begin{array}{ccc} E & \overset{j}{\hookrightarrow} & \tilde{X} = Bl_Y(X) \\ \nu_Y \downarrow & & \downarrow \nu \\ Y & \overset{i}{\hookrightarrow} & X \end{array}$$

$s \in H^0(\tilde{X}, \mathcal{O}(E))$ $\quad$ h métrique sur $\mathcal{O}(E)$

avec $(s) = E$

$$dd^c \log \|s\|^{-2} + [E] = \Theta(\mathcal{O}(E), h) = b$$

Si a est une forme fermée sur $\tilde{X}$ telle que $\{j^* a\} = c_{p-1}(Q) \in H^{p-1,p-1}(E)$

alors
- $\nu_*(a[E]) = [Y]$
- $\{a \wedge b\} = \nu^* \{[Y]\} \in \nu^* H^\bullet(X)$

Soit alors $c \in \{[Y]\}$ une forme lisse fermée et e une forme lisse sur $\tilde{X}$ telles que

$$a \wedge b = \nu^* c + dd^c e$$

$$\nu_*(a \wedge b) = c + dd^c \nu_* e$$

$$dd^c \nu_*(a \log \|s\|^{-2} - \nu_* e) + [Y] = c \quad \text{et} \quad \nu_*(a \log \|s\|^{-2} - \nu_* e) \text{ forme de Green log pour } Y.$$

Reste donc à montrer que l'on peut construire la forme a fermée de type $(p-1,p-1)$ telle que $\{j^*a\} = c_{p-1}(Q) \in H^{p-1,p-1}(E)$ et à vérifier les conséquences $\partial_*(a[E]) = [Y]$ et $\{a \wedge b\} \in \partial^* H^*(X)$

- $\partial_*(a[E]) = \partial_*(a\, j_* 1) = \partial_* j_*(j^* a) = i_* \partial_{Y*}(j^* a)$

Or $\displaystyle\int_{\partial_Y^{-1}(y)} c_{p-1}(Q) = \int_{\mathbb{P}(N_{Y/X},y)} c_{p-1}(Q) = 1$ $\qquad = i_* 1 = [Y]$

- Pour une formule d'intersection (voir Fulton)

$$\{\partial^*[Y]\} = j_* c_{p-1}(Q) = \{j_* j^* a\} = \{a \wedge [E]\} = \{a \wedge b\}$$

On va construire la forme a dans deux cas

- Si Y est le lieu d'annulation d'une section σ d'un fibré F vect. hol. de rang $p = \operatorname{codim} Y$

(1) $N_{Y/X} = i^* F$.

(2) $$\widetilde{X} \subset \mathbb{P}(F)$$

$\widetilde{X}$ est obtenu à partir de X en remplaçant Y par $\mathbb{P}(N_{Y/X})$

$\widetilde{X} = \operatorname{Proj}\left(\bigoplus_{k\geq 0} \mathcal{I}_Y^k\right)$ $\qquad \mathbb{P}(F) = \operatorname{Proj}\left(\bigoplus_{k\geq 0} \operatorname{Sym}^k \mathcal{F}^\vee\right)$

$$\mathcal{F}^\vee \xrightarrow{\cdot\sigma} \mathcal{I}_Y \quad \text{surjective}$$

$$\begin{tikzcd}
E = P(N_{Y/X}) \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "\nu_Y"] & \tilde{X} \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\nu"] & P(F) \arrow[dl, "p"] \\
Y \arrow[r, hook, "i"] & X &
\end{tikzcd}$$

On choisit

$a \in \iota^* c_{p-1}(Q_F)$

- Si $Y = \Delta \subset M \times M = X$

Sur E $\quad 0 \to \mathcal{O}_M(-1) \to j_Y^* N_{Y/X} \to Q \to 0$

$\mathcal{O}_M(-1) = j^*\mathcal{O}(E) = \mathcal{O}(E)|_E = N_{E/\tilde{X}}$ ← Griffiths Harris p 184

Par la formule du produit de Whitney, pour assurer que $c_{p-1}(Q) \in j^* H^*(\tilde{X})$

il suffit d'assurer que $c(N) \in i^* H^*(X)$.

Or

$$\begin{tikzcd}
 & H^*(X) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, equal] & H^*(Y) \\
H^*(M) \arrow[r, "p_1^*"] \arrow[rr, bend right, "\text{isomorphisme}"'] & H^*(M \times M) \arrow[r, "i^*"] & H^*(\Delta)
\end{tikzcd}$$

donc i^* est surjective.

Pour la décomposition en type de a, on utilise l'hypothèse kählérienne

compacte lisse.

Maintenant, si g_Δ est une forme de Green à singularités logarithmiques pour $\Delta \subset X \times X$, $g := pr_{1*}(g_\Delta \cdot pr_2^* \delta_y)$ est une ~~courant~~ forme de Green à singularités log pour y. (Voir Bost - Gillet - Soulé).

<u>Théo</u> : Tout cycle Z dans une variété projective lisse (ou quasi-projective) admet une forme de Green à singularité log le long de $|Z|$.

IV) Définition du $*$-produit (Voir Demailly Gazette Exemple p 16).

Soit Y un cycle de X, g_Y une forme de Green à singularité log pour Y. Soit Z une sous-ensemble analytique irreductible de X $Z \not\subset Y$.

Soit $\tilde{Z} \xrightarrow{\nu_Z} Z$ une résolution de Z et $Z \overset{i_Z}{\hookrightarrow} X$

$(i_Z \circ \nu_Z)^* g_Y$ est une forme L^1_{loc} sur $\tilde{Z}$ ($\mathcal{C}^\infty$ sur $\tilde{Z} - \nu_Z^{-1}(Y \cap Z)$ et ν_Z est propre). Elle est à singularité log le long de $\nu_Z^{-1}(Y \cap Z)$. Elle définit donc un courant sur $\tilde{Z}$ $[(i_Z \circ \nu_Z)^* g_Y]$

On pose $[Z] \cdot g_Y := (i_Z \circ \nu_Z)_* \left[(i_Z \circ \nu_Z)^* g_Y \right]$

Si de plus Y et Z s'intersecte proprement, $(i_Z \circ \nu_Z)^* g_Y$ est une fonc de Green pour $\nu_Z^{-1}(Y \cap Z)$ dans $\tilde{Z}$.

Si $\quad dd^c[g_Y] + [Y] = \omega_Y$

image réciproque de cycle

$$dd^c \left[(i_Z \circ \nu_Z)^* g_Y \right] + \left[\nu_Z^* (Y \cap Z) \right] = (i_Z \circ \nu_Z)^* \omega_Y$$

$$\begin{aligned} dd^c (i_Z \circ \nu_Z)_* \left[(i_Z \circ \nu_Z)^* g_Y \right] + [Y \cap Z] &= \omega_Y \, (i_Z \circ \nu_Z)_* (i_Z \circ \nu_Z)^* 1 \\ &= \omega_Y [Z] \\ &= \omega_Y (\omega_Z - dd^c \eta_Z) \end{aligned}$$

pour tout courant de Green de Z, η_Z

On pose

$$g_Y * \eta_Z \overset{def}{=} g_Y \cdot [Z] + \omega_Y \eta_Z$$

On note $\equiv$ l'égalité modulo $\operatorname{Im}\partial + \operatorname{Im}\bar\partial$

Puisque la différence de deux courants de Green est, modulo $\operatorname{Im}\partial + \operatorname{Im}\bar\partial$ une forme $\mathcal{C}^\infty$, pour tout cycle $Y = \sum n_i Y_i$ et tout courant de Green η_Y il existe des formes de Green g_{Y_i} pour Y_i a singularité log telle que

$$\eta_Y \equiv \sum n_i g_{Y_i}$$

On peut donc définir $\tilde\eta_Y * \tilde\eta_Z$ dans $\tilde{\mathcal{D}}'(X)$.

<u>Théorème</u>

Soit Y_i trois cycles de X qui s'intersectent proprement

$$\operatorname{codim}(|Y_i| \cap |Y_j|) = \operatorname{codim}|Y_i| + \operatorname{codim}|Y_j| \qquad i \neq j$$

$$\operatorname{codim}(|Y_1| \cap |Y_2| \cap |Y_3|) = \operatorname{codim}|Y_1| + \operatorname{codim}|Y_2| + \operatorname{codim}|Y_3|$$

alors

(i) $\tilde\eta_{Y_1} * \tilde\eta_{Y_2} = \tilde\eta_{Y_2} * \tilde\eta_{Y_1}$

(ii) $\tilde\eta_{Y_1} * (\tilde\eta_{Y_2} * \tilde\eta_{Y_3}) = (\tilde\eta_{Y_1} * \tilde\eta_{Y_2}) * \tilde\eta_{Y_3}$

La démonstration est technique et utilise les théo d'Hironaka.

Les classes de Bott - Chern

I) Les classes de Chern

1/ Construction en topologie différentielle

2/ Construction algébrique

3/ Construction en géométrie différentielle.

4/ Lien entre les constructions

(II) D'autres classes caractéristiques)

III) Les formes de Bott - Chern

1/ Définitions

2/ Construction

3/ Propriétés.

I) Les classes de Chern

Les classes caractéristiques de fibrés vectoriels $E \to X$ sont des classes de cohomologie (ou mieux des classes dans l'anneau de Chow) de la variété X.

Ce sont des objets que l'on peut construire de multiples façons et qui ont donc beaucoup de propriétés fonctorielles. Ils sont particulièrement intéressants quand on peut les relier avec des cycles de X.

1) Construction en topologie différentielle.

Il y a une construction purement topologique (Voir Milnor - Stasheff "Characteristic classes"). On présente la construction en topologie différentielle (Voir Bott - Tu "Differential forms in Algebraic Topology") plus proche des outils utilisés jusqu'à présent.

Théorème d'isomorphisme de Thom

Soit M une variété différentiable et $E \to M$ un fibré vectoriel réel de rang r orientable. Alors

$$\pi_* : H^*_{vc}(E) \to H^{*-r}(M)$$

est un isomorphisme.

On le vérifie localement dans la situation $M \times \mathbb{R}^r \to M$ et on utilise la suite exacte de Mayer-Vietoris

$$\begin{tikzcd}
H^*_{vc}(E_{|U\cup V}) \arrow[r] & H^*_{vc}(E_{|U}) \oplus H^*_{vc}(E_{|V}) \arrow[r] & H^*_{vc}(E_{|U\cap V}) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_*"] & H^{*+1}_{vc}(E_{|U\cup V}) \arrow[d, "\pi_*"] \\
H^{*-r}(U\cup V) \arrow[r] & H^{*-r}(U) \oplus H^{*-r}(V) \arrow[r] & H^{*-r}(U\cap V) \arrow[r] & H^{*+1}(U\cup V)
\end{tikzcd}$$

Soit alors $\phi_E \in H^r_{vc}(E)$ / $\pi_* \phi = 1 \in H^0(M)$ ϕ est appelée classe de Thom de E.

On peut supposer que ϕ est à support dans un voisinage arbitraire de la section nulle

La classe d'Euler de E est par définition $s_0^* \Phi_E$ l'image réciproque par la section nulle de la classe de Thom de E. $e(E) \in H^*(M)$

Proposition 1

Soit Z^k une sous-variété lisse de la variété C^∞ M^n.

Alors le dual de Poincaré de Z est la classe de cohomologie de la forme $(\phi)_{T \to M}$ obtenue en étendant par 0 une forme de Thom ϕ pour $N_{Z|M}$ à support dans T voisinage tubulaire de Z dans M.

$$\phi \in A^{n-k}_{vc}(N_{Z|M}) = A^{n-k}_{vc}(T)$$

Dem : Soit u une forme test

$$\int_M u \wedge (\phi)_{T \to M} = \int_T u \wedge (\phi)_T$$

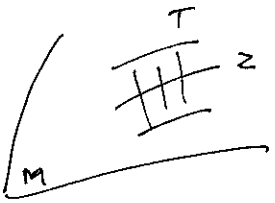
$$= \int_{N_{Z|M}} (u)_N \wedge \phi$$

$$= \int_{N_{Z|M}} \pi^* s_0^*(u)_N \wedge \phi$$

$$= \int_Z s_0^*(u)_N = \int_Z u \quad \text{car } \pi_* \phi = 1$$

$\pi : N_{Z|M} \to Z$ se rétracte sur la section nulle ~~est homotope à l'identité de Z~~

donc $u - \pi^* s_0^* u$ est exact



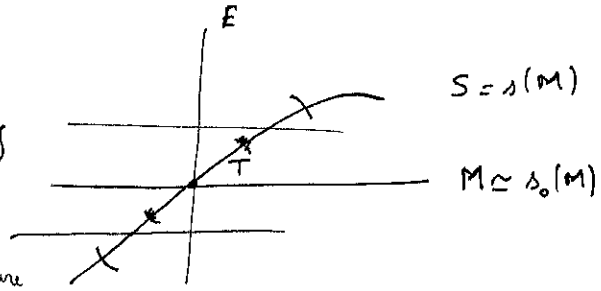
Proposition 2

Soit Z le lieu des zéros d'une section de $E \to M$ transverse à la section nulle. Alors le dual de Poincaré de Z est la classe d'Euler de E.

$$\begin{tikzcd} & N_{Z/M} \arrow[dr] & \\ d_0 : & TM_Z \arrow[u] \arrow[r] & TE \overset{loc}{\simeq} TM \oplus E \\ & TZ \arrow[u] & \\ & 0 \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

$$\int_M u \wedge s_0^* \phi = \int_S (\pi^* u \wedge \pi^* s_0^* \phi)_{|S}$$

$\pi_{|S} : S \to M$ difféo



$E_{|Z} \to Z$

$T \to Z$

Sur un petit voisinage de la section nulle M où ϕ a son support, S a différentiablement une structure de fibré sur S isomorphe à $E_{|Z} \to Z$

T voisinage tubulaire de Z dans S

sont homotopes. Sur S comme sur $E_{|Z}$, la différence $\pi^* s_0 \phi - \phi$ est exacte.

$$= \int_{E_{|Z}} \pi^* u \wedge \phi$$

$$= \int_Z u \wedge \pi_* \phi = \int_Z u$$

La n-ième classe de Chern d'un fibré vectoriel complexe est la $2n$-ième classe d'Euler du fibré réel orienté sous-jacent.

2/ Construction algébrique

Théorème (Leray-Hirsch)

Soit $\mathcal{F} \to B$ un fibré localement trivial de fibre F.

Soit $e_1 \dots e_d$ des classes de cohomologie dans $H^\bullet(\mathcal{F})$ telle que $\forall b \in B$ $(e_{i|\mathcal{F}_b})$ est une base de $H^\bullet(F_b)$. Alors

$$H^\bullet(B) \otimes (\mathbb{R} e_1 \oplus \mathbb{R} e_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{R} e_d) \longrightarrow H^\bullet(\mathcal{F})$$
$$u \otimes f \longmapsto (\pi^* u) f$$

est un isomorphisme.

On le démontre sur des petits ouverts de B par la formule de Kunneth, et on globalise à l'aide de la suite de Mayer-Vietoris.

(Voir Husemoller "Fiber bundles")

Conséquence : Si E est un fibré vectoriel ~~non~~ holomorphe sur une variété analytique complexe X. Soit $\mathbb{P}(E)$ la variété des ~~hyperplans~~ droites de E. $\mathbb{P}(E) \xrightarrow{\pi} X$

$$0 \to \mathcal{O}_E(-1) \longrightarrow \pi^* E \quad \left(\longrightarrow Q \to 0 \right)$$

Par le théorème de Leray-Hirsch, $H^\bullet(\mathbb{P}(E))$ est un $H^\bullet(X)$-module libre de base $1, \xi, \xi^2, \dots \xi^{n-1}$ où $\xi \in c_1(\mathcal{O}_E(1))$

car $H^\bullet(\mathbb{P}^{n-1}, \mathbb{C}) = \mathbb{C}[h]/h^n = \mathbb{C}1 \oplus \mathbb{C}h \oplus \mathbb{C}h^2 \oplus \dots \oplus \mathbb{C}h^{n-1}$

$h = c_1(\mathcal{O}(1)) = [H]$

On a donc une relation

$$\xi^n + \pi^* c_1(E)\, \xi^{n-1} + \pi^* c_2(E)\, \xi^{n-2} + \dots + \pi^* c_{n-1}(E)\, \xi + \pi^* c_n(E) = 0$$

Par définition, $c_i(E)$ est la $i^{ème}$ classe de Chern de E.
Si E a une section partout non nulle s, s donne une section de $\pi : \mathbb{P}(E) \xrightarrow{s} X$ et $s^* \mathcal{O}_E(-1) \to X$ est donc trivial. Donc $s^* \pi^* c_n(E) = c_n(E) = 0$.
Si ~~E a une section partout non nulle~~, par la formule de Whitney.

3/ <u>Construction ~~diff~~ en géométrie différentielle.</u>

3/ Construction différentielle

Soit ∇ une connexion sur un fibré vectoriel complexe E de rang r sur X.

$\frac{i}{2\pi}\nabla^2$ est un générateur local fonctiel de multiplication par une 2-forme $\Theta(E,\nabla)$ à valeurs dans les endomorphismes de E.

Pour $M \in M_r(\mathbb{C})$ on pose

$$\det(I + tM) = \sum_{d=0}^{r} t^d \det{}_d(M)$$

$$\text{et} \quad c_d(E,\nabla) = \det{}_d(\Theta(E,\nabla)) \in \mathcal{C}^\infty_{2d}(X,\mathbb{C})$$
$$= \operatorname{trace}(\Lambda^d \Theta(E,\nabla))$$

La forme $c_d(E,\nabla)$ est une forme bien définie globalement car $\det_d$ est invariante par conjugaison par $GL(r,\mathbb{C})$. (donc par changement de carte).

Théorème :

(1) Les formes $c_d(E,\nabla)$ sont fermées

(2) $[c_d(E,\nabla)] \in H^2(X,\mathbb{C})$ ne dépend pas du choix de ∇

sera notée $c_d(E)$ $d^{\text{ième}}$ classe de Chern de E.

Dem :

Lemme : L fibré ~~vectoriel~~ en droite ~~en droite~~ muni d'une connexion ∇

$\operatorname{tr} : A^d(X, \operatorname{End} L) \longrightarrow A^d(X)$

$\phi \in A^d(X, \operatorname{End} L)$

Alors, $\quad d \operatorname{trace}_L \phi = \operatorname{trace}_L \nabla\phi$

Dem : $\phi = \alpha \, Id_L \qquad \nabla Id_L = 0 \qquad \nabla\phi = d\alpha \, Id_L$

$$d\, c(E,\nabla) = d \det\left(I + \Theta(E,\nabla)\right)$$

$$= d \operatorname{trace} \Lambda^r\left(I + \Theta(E,\nabla)\right)$$

$$= \operatorname{trace} \nabla \Lambda^r\left(I + \Theta(E,\nabla)\right)$$

$$= \operatorname{trace}\left(r\, \Lambda^{r-1}\left(I + \Theta(E,\nabla)\right) \wedge \nabla \Theta(E,\nabla)\right)$$

Or, par l'identité de Bianchi, $\nabla \Theta(E,\nabla) = 0$.

Pour (2), on considère deux connexions ∇_0 et ∇_1

$\nabla_1 - \nabla_0$ est un opérateur local donnée par une 1 forme ω à valeurs dans les endomorphismes de E. On considère la famille de connexions

$$\nabla_t = \nabla_0 + t\omega$$

$$\Theta_t = \frac{i}{2\pi} \nabla_t^2 = \Theta_0 + \frac{i}{2\pi} t\, \omega \wedge \nabla_0 + \frac{i}{2\pi} t \nabla_0\, \omega + \frac{i}{2\pi} t^2\, \omega \wedge \omega$$

$$\dot{\Theta}_t = [\nabla_0, \omega] + [t\omega, \omega] = \frac{i}{2\pi} \nabla_t^{\mathrm{End}E} \cdot \omega \qquad \nabla_t^{\mathrm{End}E} \text{ connexion sur } \mathrm{End}\, E$$

$$c(E,\nabla_1) - c(E,\nabla_0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} c(E,\nabla_t)$$

$$\frac{d}{dt} c(E,\nabla_t) = \frac{d}{dt} \det\left(I + \Theta_t\right) = \frac{d}{dt} \operatorname{trace} \Lambda^r\left(I + \Theta_t\right)$$

$$= \operatorname{trace} \overset{\frac{d}{dt}}{\nabla} \Lambda^r\left(I + \Theta_t\right)$$

$$= r \operatorname{trace} \dot{\Theta}_t \wedge \Lambda^{r-1}\left(I + \Theta_t\right)$$

$$= \frac{ri}{2\pi} \operatorname{trace} \left(\nabla_t^{\mathrm{End}E} \omega\right) \wedge \Lambda^{r-1}\left(I + \Theta_t\right)$$

$$= \frac{ri}{2\pi} \operatorname{trace} \nabla_t^{\mathrm{End}\Lambda^r E}\left(\omega \wedge \Lambda^{r-1}\left(I + \Theta_t\right)\right)$$

$$= \frac{ri}{2\pi} d \operatorname{trace}\left(\omega \wedge \Lambda^{r-1}\left(I + \Theta_t\right)\right)$$

Ainsi,

$$c(E,\nabla_1) - c(E,\nabla_0) = d\left(\frac{r\,i}{2\pi}\int_0^1 \operatorname{trace}\left(\omega \wedge \Lambda^{r-1}\left(I + \frac{i}{2\pi}\Theta_t\right)\right) dt.\right)$$

4/ Le lien entre les différentes constructions

Pour montrer que les différentes constructions donnent les mêmes classes, on donne une définition axiomatique des classes de Chern

<u>Théorème</u>: Il existe une et une seule façon d'associer à tout fibré vectoriel complexe E sur toute variété différentiable M des classes de cohomologie $c_i(E) \in H^{2i}(X,\mathbb{R})$ $\qquad c(E) = 1 + \sum_{i=1}^{r} c_i(E)$

avec

(i) Normalisation : Si E est en droites, $c_1(E)$ est défini par $\qquad H^1(X,\mathcal{O}^*) \xrightarrow{c_1} H^2(X,\mathbb{Z})$

(ii) Si $f : X \to Y$ est ~~continue~~ $\mathcal{C}^\infty$

$$c_i(f^*E) = f^* c_i(E)$$

(iii) $\qquad c(E \oplus F) = c(E) \cup c(F)$

Chacune des trois constructions donne un exemple.

Pour montrer l'unicité, on utilise le principe de scindage.

$\forall M,\ \forall\ E \to M \qquad \exists\ M',\ f : M' \to M\ /$

f^*E est une somme de fibré en droites

$f^* : H^\bullet(M) \to H^\bullet(M')$ est injective.

M' est construite en itérant la construction de $\mathbb{P}(E) \xrightarrow{\pi} M$.

$0 \to S \to \pi^* E \to Q \to 0 \qquad \pi^*E \overset{\mathcal{C}^\infty}{\simeq} S \oplus Q$

$H^\bullet(E)$ est un $H^\bullet(M)$-module libre par π^*

On peut alors vérifier les propriétés

- $c_r(E) = e(E_{\mathbb{R}})$
- $\cancel{(-1)^d} c_d(E \otimes L) = \sum \cancel{(-1)} c_i(E)\, c_1(L)^{d-i} \binom{r-i}{d-i}$

$c_1(\mathcal{O}_{E\otimes L}(1)) = c_1(\mathcal{O}_E(1)) +$
$c_1(\mathcal{O}_E(1)) = c_1(\mathcal{O}_{E\otimes L}(1)) - \pi^* c_1(L)$

- $c_1(E) = c_1(\det E)$
- $c_i(E^*) = (-1)^i c_i(E)$

~~II) Les classes de Bott-Chern~~

D'autres classes caractéristiques.

Pour toute ~~polynôme~~ forme m-$\mathbb{C}$-linéaire $\tilde{P} : \overbrace{M_r(A) \times M_r(A) \times \dots \times M_r(A)}^{m \text{ fois}} \longrightarrow A$

invariant par l'action diagonale de $GL_r(\mathbb{C})$

$$\tilde{P}(g^{-1} M_1 g, g^{-1} M_2 g, \dots g^{-1} M_m g) = \tilde{P}(M_1, M_2, \dots M_m)$$

on peut considérer $\underset{\substack{\text{notation} \\ P(\Theta(E,\nabla))}}{\tilde{P}(\Theta, \Theta, \dots, \Theta)} \in A$

<u>Théorème</u>

(i) Pour toute connexion ∇,

$P(\Theta(E,\nabla))$ est fermée

(ii) La classe de cohomologie de $P(\Theta(E,\nabla))$ dans $H_{DR}(X, \mathbb{C})$ ne dépend pas du choix de ∇.

Remarques :

- Se donner une forme m-linéaire invariante symétrique $\tilde{P}(M_1 \dots M_m) = \tilde{P}(M_{\sigma(1)}, M_{\sigma(2)} \dots)$, revient à se donner un polynôme invariant (à coeff complexe). ($P(A) = \tilde{P}(A, A \dots A)$ et la réciproque par polarisation)
- Se donner un polynôme P invariant sur $M_r(A)$ revient à se donner un polynôme $p \in \mathbb{C}[\lambda_1 \dots \lambda_r]$ symétrique

$$P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \end{pmatrix} = p(\lambda_1 \dots \lambda_r) \quad \text{sur un ouvert dense de } M_r(\mathbb{C})$$

III) Les formes de Bott - Chern

En termes cohomologiques, on ne distingue pas les classes de Chern (donc les classes caractéristiques) de $S \oplus Q$ et d'une extension

$$0 \to S \longrightarrow E \longrightarrow Q \to 0$$

de fibré vectoriels holomorphes,

car alors $E \overset{\mathcal{C}^\infty}{\simeq} S \oplus Q$.

Mais en terme de représentants formes différentielles, le choix des connexions sur S, Q et E permet de distinguer $S \oplus Q$ de E.

On travaille ici sur X analytique complexe lisse, et avec des connexions métriques.

On pose $\widetilde{A}^{p,p} = \dfrac{A^{p,p}}{\operatorname{Im} \partial + \operatorname{Im} \bar{\partial}}$ $\qquad \widetilde{A} = \bigoplus_p \widetilde{A}^{p,p}$

Pour tout polynôme invariant P et pour tout choix de metriques h_S, h_Q, h_E

$$\left[P\left(\Theta(S \overset{\perp}{\oplus} Q, h_S \overset{\perp}{\oplus} h_Q) \right) \right] = \left[P\left(\Theta(E, h_E) \right) \right] \in H^0_{DR}(X, \mathbb{C})$$

Par conséquent, la différence est exacte.

On a plus précisément

<u>Théorème</u> : Il existe une unique façon d'associer à chaque suite exacte courte de fibrés vectoriels hermitiens

$$0 \to (S, h_S) \to (E, h_E) \to (Q, h_Q) \to 0 \qquad (\Sigma, h)$$

des formes closes $\widetilde{P}(\Sigma, h) \in \widetilde{A}(X)$ telles que

(i) $P(\Theta(S \oplus Q, h_S \overset{\perp}{\oplus} h_Q)) - P(\Theta(E, h_E)) = dd^c \widetilde{P}(\Sigma, h)$

(ii) Pour toute application holomorphe $f : X \to Y$

$$\widetilde{P}(f^*\Sigma, f^*h) = f^* \widetilde{P}(\Sigma, h)$$

(iii) Si (Σ, h) est métriquement scindée $\quad E \overset{\text{hol}}{\simeq} S \oplus Q$, $\quad h_E = h_S \overset{\perp}{\oplus} h_Q$

$i : S \to E$ injection isométrique

$p : E \to Q$ projection orthogonale.

alors $\widetilde{P}(\Sigma, h) = 0$.

<u>Démonstration</u>

On montre d'abord l'unicité. On suppose l'existence d'une construction. Si $(\Sigma, h) \to X$

on considère sur $X \times \mathbb{P}^1$ le fibré $\widetilde{E} = \dfrac{S \boxtimes \mathcal{O}(1) \oplus E \boxtimes \mathcal{O}}{s \otimes \sigma - i(s) \otimes 1}$

où σ est la section de $\mathcal{O}(1)$ nulle en ∞.

$S \boxtimes \mathcal{O}(1) \longrightarrow \widetilde{E}$ est injective (comme morph de faisceaux) et le quotient est $Q \boxtimes \mathcal{O}$

$$0 \to S \boxtimes \mathcal{O}(1) \longrightarrow \widetilde{E} \longrightarrow Q \boxtimes \mathcal{O} \to 0 \qquad (\widetilde{\Sigma}, \widetilde{h})$$

Au point 0, $\quad i_0^* \widetilde{E} \simeq E \quad$ car $\sigma(0) \neq 0$ tout élément de $S \boxtimes \mathcal{O}(1)$ est dans la classe d'un $\tilde{e}$ de $E \boxtimes \mathcal{O}$

∞ $\quad i_\infty^* \widetilde{E} \simeq S(1) \oplus Q \simeq S \oplus Q \quad$ car $i_\infty(X) = X \times \{\infty\}$ sur lequel $\mathcal{O}(1)$ est trivial.

On prolonge les métriques h_E et $h_S \overset{\perp}{\oplus} h_Q$ en métrique $\widetilde{h}$ sur $\widetilde{E}$

On pose

$$I = \int_{\mathbb{P}^1} dd^c_{X \times \mathbb{P}^1} \widetilde{P}(\widetilde{\Sigma}, \widetilde{h}) \log |z|^2 \in A(X)$$

Par définition de $\widetilde{P}$

$$I = \int_{\mathbb{P}^1} P(S \boxtimes \mathcal{O}(1) \overset{\perp}{\oplus} Q \boxtimes \mathcal{O}) - P(\widetilde{E}, \widetilde{h}) \quad \log|z|^2$$

$$\int_{\mathbb{P}^1} P(S \boxtimes \mathcal{O}(1) \overset{\perp}{\oplus} Q \boxtimes \mathcal{O}) \log|z|^2 = \int_{\mathbb{P}^1} P(S \boxtimes \mathcal{O}(1) \overset{\perp}{\oplus} Q \boxtimes \mathcal{O}) \log\left|\tfrac{1}{z}\right|^2 = 0$$

où $\mathcal{S} : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1 \quad [x:y] \longrightarrow [y:x]$ $\qquad \mathcal{S}^* \mathcal{O}(1) \simeq \mathcal{O}(1)$

$$\searrow \quad \mathbb{P}^1 \quad \swarrow$$

Donc $\quad I = -\int_{\mathbb{P}^1} P(\widetilde{E}, \widetilde{h}) \quad \log|z|^2$

D'autre part, modulo $\operatorname{Im} d_X + \operatorname{Im} d_X^c$, puisque $d_{X \times \mathbb{P}^1} = d_X + d_{\mathbb{P}^1}$

$$I = \int_{\mathbb{P}^1} \widetilde{P}(\widetilde{\Sigma}, \widetilde{h}) \; dd^c_{\mathbb{P}^1} \log|z|^2$$

$$= \widetilde{P}(\widetilde{\Sigma}, \widetilde{h})_0 - \widetilde{P}(\widetilde{\Sigma}, \widetilde{h})_\infty$$

$$= \widetilde{P}(\Sigma, h) \qquad \overset{\shortparallel}{0} \text{ somme directe orthogonale mod } \operatorname{Im} d_X + \operatorname{Im} d_X^c$$

Pour toute suite exacte courte métrique,

$$\widetilde{P}(\Sigma, h) = -\int_{\mathbb{P}^1} P(\widetilde{E}, \widetilde{h}) \log|z|^2$$

Réciproquement, pour montrer l'existence de $\widetilde{P}$, on définit

$$\widetilde{P}(\Sigma, h) = -\int_{\mathbb{P}^1} P(\widetilde{E}, \widetilde{h}) \log|z|^2 \quad \text{où } \widetilde{h} \text{ est une métrique sur } \widetilde{E}$$

qui prolonge la métrique h_E sur $X \times \{0\}$ et $h_S \overset{\perp}{\oplus} h_Q$ sur $X \times \{\infty\}$

- Par la formule de Stokes et Lelong-Poincaré, $\widetilde{P}$ est une solution de (i)
- $\widetilde{P}(\Sigma, h)$ ne dépend pas du prolongement.

En effet, si $\tilde{h}'$ est un autre prolongement pour la suite

$$0 \to (\tilde{E}, \tilde{h}) \longrightarrow (\tilde{E}, \tilde{h}') \to 0 \qquad \phi$$

$$P(\tilde{E}, \tilde{h}) - P(\tilde{E}, \tilde{h}') = dd^c_{X\times\mathbb{P}^1} - \int_{w\in\mathbb{P}^1} P(\tilde{\tilde{E}}, \tilde{\tilde{h}}) \log|w|^2$$

$$= -\int_{w\in\mathbb{P}^1} dd^c_{X\times\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}\left(P(\tilde{\tilde{E}}, \tilde{\tilde{h}}) \log|w|^2\right)$$

$$\int_{z\in\mathbb{P}^1} P(\tilde{E},\tilde{h}) - P(\tilde{E},\tilde{h}') \log|z|^2 = -\int_{z\in\mathbb{P}^1}\int_{w\in\mathbb{P}^1} dd^c\left(P(\tilde{\tilde{E}}, \tilde{\tilde{h}}) \log|w|^2\right) \log|z|^2$$

$$= -\left(\int_{w\in\mathbb{P}^1} P(\tilde{\tilde{E}}, \tilde{\tilde{h}}) \log|w|^2\right)_{z=0} + \left(\int_{w\in\mathbb{P}^1} P(\tilde{\tilde{E}}, \tilde{\tilde{h}}) \log|w|^2\right)_{z=+\infty}$$

$$= -P(\tilde{E}, \tilde{h}) \int_{w\in\mathbb{P}^1} \log|w|^2 + P(\tilde{E}, \tilde{h}') \int_{w\in\mathbb{P}^1} \log|w|^2$$

$$= 0$$

(ii) et (iii) sont alors élémentaires.

Remarque : On peut déduire de cette construction les règles d'opérations.

Par exemple, pour un fibré hermitien en droite $(L, h) \to X$

$$\tilde{c}_d(\Sigma \otimes L) = -\int_{\mathbb{P}^1} c_d(\tilde{\Sigma} \otimes L) \log|z|^2$$

$$= -\int_{z\in\mathbb{P}^1} \sum_{p+q=d} c_p(\tilde{\Sigma})\, p^*(c_1(L))^q \binom{r-p}{d-p} \log|z|^2 \qquad \begin{array}{c} X\times\mathbb{P}^1 \\ \downarrow p_1 \\ X \end{array}$$

$$= \sum_{p+q=d} \binom{r-p}{d-p} \tilde{c}_p(\Sigma)\, (c_1(L))^q$$

Fin du cours sur les classes de Bott-Chern

On a vu que la classes de Bott-Chern pour une suite exacte métrique (Σ, h) associée à un polynôme P est donnée par

$$\widetilde{P}(\Sigma, h) = -\int_{\mathbb{P}^1} P(\widetilde{E}, \widetilde{h}) \log |z|^2$$

où $(\widetilde{E}, \widetilde{h})$ est une extension de $\begin{array}{c}(E, h_E)\\ \downarrow \\ X \times \{0\}\end{array}$ $\begin{array}{c}(S \oplus Q, h_S \overset{\perp}{\oplus} h_Q)\\ \downarrow \\ X \times \{\infty\}\end{array}$

On en déduit les propriétés fonctorielles des classes de Bott-Chern

Par exemple, si

Σ_1, h_1 $\quad 0 \to S_1 \longrightarrow E_1 \longrightarrow Q_1 \to 0$

Σ_2, h_2 $\quad 0 \to S_2 \longrightarrow E_2 \longrightarrow Q_2 \to 0$

$$\widetilde{E_1 \overset{\perp}{\oplus} E_2} = \frac{(S_1 \oplus S_2) \boxtimes \mathcal{O}(1) \oplus E_1 \oplus E_2}{s \otimes \sigma - i(s) \otimes 1}$$

$$= \widetilde{E_1} \overset{\perp}{\oplus} \widetilde{E_2}$$

Par exemple, pour le caractère de Chern qui est additif

$$\widetilde{Ch}(\Sigma_1 \overset{\perp}{\oplus} \Sigma_2) = \widetilde{Ch}(\Sigma_1) + \widetilde{Ch}(\Sigma_2)$$

$$\widetilde{Td}(\Sigma_1 \overset{\perp}{\oplus} \Sigma_2) = \widetilde{Td}(\Sigma_1)\, Td(E_2) + Td(S_1 \oplus Q_1)\, \widetilde{Td}(\Sigma_2)$$

En effet, si on note

$$\widetilde{Td}(\Sigma_1, \Sigma_2) = \widetilde{Td}(\Sigma_1)\, Td(E_2) + Td(S_1 \oplus Q_1)\, \widetilde{Td}(\Sigma_2)$$

$$dd^c\, \widetilde{Td}(\Sigma_1, \Sigma_2) = \left(Td(S_1 \overset{\perp}{\oplus} Q_1) - Td(E_1)\right) Td(E_2) + Td(S_1 \oplus Q_1)\left(Td(S_2 \oplus Q_2) - Td(E_2)\right)$$

$$= Td(S_1 \oplus Q_1 \oplus S_2 \oplus Q_2) - Td(E_1)\, Td(E_2)$$

$$\widetilde{Td}(\Sigma_1 \oplus \Sigma_2)$$

$$= -\int_{\mathbb{P}^1} Td(\widetilde{E}_1 \oplus \widetilde{E}_2) \log |z|^2$$

$$= -\int_{\mathbb{P}^1} Td(\widetilde{E}_1)\, Td(\widetilde{E}_2)$$

$$= \int_{\mathbb{P}^1} dd^c_{X \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}\, \widetilde{Td}(\widetilde{\Sigma}_1, \widetilde{\Sigma}_2) \log |z|^2 \qquad \text{car} \int_{\mathbb{P}^1} Td(S_1(1) \oplus Q_1 \oplus S_2(1) \oplus Q_2) \log |z|^2 = 0$$

$$= \widetilde{Td}(\widetilde{\Sigma}_1, \widetilde{\Sigma}_2)_0 - \widetilde{Td}(\widetilde{\Sigma}_1, \widetilde{\Sigma}_2)_\infty$$

$$= \widehat{Td}(\Sigma_1, \Sigma_2)$$

Noter aussi que $\widetilde{c}_1\left(0 \to (L, h_1) \to (L, h_2) \to 0 \to 0\right)$

$$= -\log \frac{h_2}{h_1}$$

se vérifie par exemple en utilisant les racines ou comme précédemment par unicité.

Présentation de la partie analytique du théorème de Riemann-Roch arithmétique. ~~(partie d~~

On n'étudiera que le cas des submersions et que le terme de degré 2 dans la formule. Il s'agit donc de calculer la courbure du déterminant d'un faisceau image directe, muni d'une métrique hermitienne à définir (métrique de Quillen).

L'idée est d'adapter les deux théorèmes suivants qui ensemble donnent un théorème de calcul de l'indice d'un opérateur de Fredholm particulier à l'aide d'intégrale de formes caractéristiques.

<u>Théorème</u> (Formule de Mc Kean-Singer)

Soit D un opérateur de Dirac auto-adjoint sur une variété riemannienne compacte M. Soit $k_t = \langle x | e^{-tD^2} | x \rangle$ le noyau de la chaleur de l'opérateur D^2.

Alors, pour tout $t > 0$

$$\mathrm{Ind}(D) = \mathrm{Str}\left(e^{-tD^2}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Def de la supertrace d'un opérateur à noyau}}}{=} \int_M \mathrm{Str}\left(\langle x | e^{-tD^2} | x \rangle\right) dx$$

<u>Théorème de densité d'indice</u>

Soit D un opérateur de Dirac sur un module de Clifford $\mathcal{E}$ (module sur l'algèbre de Clifford $C(M)$ construite sur TM).

On suppose que D est associé à une connexion de Clifford $\nabla^{\mathcal{E}}$ de courbure réduite $F^{\mathcal{E}/M}$

- Le développement asymptotique du noyau de la chaleur $k_t(x,x)$

est $$k_t(x,x) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \sum_{i=0}^{+\infty} t^i k_i(x)$$ (C'est un théorème)

avec $k_i \in \Gamma(M, \mathrm{End}\, \tau)$ $\qquad \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\, \tau = C(M) \otimes \mathrm{End}_{C(M)}\, \tau$

- Avec l'application symbole $\sigma : C(M) \to \Lambda T M^*$

$$\sigma(k) = \det{}^{1/2}\left(\frac{R/2}{\sinh R/2} \right) \exp\left(-F^{\tau}/M\right)$$

où R est la courbure riemannienne de M.

Dans l'adaptation

L'indice	devient	un fibré d'indice (fibré image directe pour un choix de l'opérateur $D = \bar{\partial} + \bar{\partial}^*$)
La supertrace		le caractère de Chern du fibré d'indice.
Le module de clifford		de dimension infinie (espace de sections verticales)
L'operateur de Dirac		est ~~associé~~ remplacé par à une super-connexion $\mathbb{A}$ $\mathbb{A}_{[0]} = D$
McS devient $\left[\mathrm{Str}\left(e^{-\mathbb{A}_t^2} \right) = \mathrm{Str}\left(e^{-tD^2 + O(t^{1/2})} \right) \right.$		tend vers $\mathrm{ch}(\mathrm{Ind}\, D)$ quand $t \to +\infty$]
Dennite devient $\left[\mathrm{Str}\left(e^{-\mathbb{A}_t^2} \right)_{[2]} \right.$		tend vers une intégrale de ~~classes~~ formes caractéristiques. quand $t \to 0$ pour un bon choix de famille $\mathbb{A}_t$]

Dans l'adaptation

Le module de Clifford	devient	de dimension infinie (espace de sections verticales)
L'opérateur de Dirac	est remplacé	par une super-connexion $\mathbb{A}$ avec $\mathbb{A}_{[0]} = D$
L'indice	devient	un fibré d'indice (fibré image directe si par exemple $D = \bar{\partial}_{X/Y} + \bar{\partial}^*_{X/Y}$)
La super-trace de $e^{-\nabla_0^2}$ pour ∇_0 super-connexion sur le fibré d'indice	devient	le caractère de Chern du fibré d'indice
Mc Kean - Singer	est remplacé par	$\mathrm{Str}(e^{-\mathbb{A}_t^2}) \to \mathrm{ch}(\mathrm{Ind}(D))$, $\mathrm{Str}(e^{-\mathbb{A}_t^2}) \nearrow \mathrm{Str}(e^{-\nabla_0^2}) = \mathrm{ch}(\mathrm{Ind}(D))$ quand $t \to +\infty$ $\quad \mathbb{A}_t^2 = tD^2 + O(t^{1/2})$
La densité d'indice	est remplacé par	$\mathrm{Str}(e^{-\mathbb{A}_t^2})_{[2]} \to$ intégrale de formes caractéristiques quand $t \to 0$ pour un bon choix de la famille $\mathbb{A}_t$.
L'invariance en t cohomologique		par une formule de transgression explicite entre $\mathrm{Str}(e^{-\nabla_0^2})$ et $\mathrm{Str}(e^{-\mathbb{A}_t^2})$ qui fait apparaître la torsion analytique injectée dans la def de la métrique de Q.

Indice d'une famille d'opérateurs de Dirac.

I) Fibré d'indice

II) Caractère de Chern

III) La superconnexion de Bismut

IV) Le théorème de densité en famille.

I) Fibré d'indice.

Soit $M \longrightarrow B$ une submersion propre entre variétés différentiables lisses compactes

$\mathcal{E} \to M$ un fibré vectoriel $\mathbb{Z}_2$ gradué hermitien

$D : \Gamma(B, \pi_*^{C^\infty} \mathcal{E}^\pm) \longrightarrow \Gamma(B, \pi_*^{C^\infty} \mathcal{E}^\mp)$ une famille d'opérateurs de Dirac auto-adjoints sur $(\mathcal{E}_z)_{z \in B}$.

Cette donnée fournit une structure d'algèbre de Clifford engendrée par T^*M/B (donc une métrique riemannienne sur TM/B) et une structure de module de Clifford sur $\mathcal{E}$.

On suppose que $(\operatorname{Ker} D_z^\pm)$ a une dimension indépendante de $z \in B$. On a alors le fibré d'indice $[\operatorname{Ker} D^+] - [\operatorname{Ker} D^-] \in K(B)$ le groupe de Grothendieck des fibrés sur B.

Dans le cas de dimension variable, sur $U_\lambda := \{ z \in B \,/\, \lambda \notin sp(D_z)^2 \}$ on considère le fibré $\mathcal{H}_\lambda$ des espaces propres de D^2 de valeurs propres strictement inférieures à λ. Comme sur $U_\lambda \cap U_\mu$

$$D^+ : \mathcal{H}^+_{(\lambda,\mu)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^-_{(\lambda,\mu)}$$

$(D^+)^* D^+$ isomorphisme car son spectre $\subset (\lambda, \mu)$ Donc D^+ isomorphisme.

le fibré d'indice est bien défini par $[\mathcal{H}^+_{[0,\lambda)}] - [\mathcal{H}^-_{[0,\lambda)}] \in K(B)$ pour $0 < \lambda \ll 1$ tel que $U_\lambda = B$.

II) Caractère de Chern du fibré d'indice.

1) Formes caractéristiques d'un super-fibré vectoriel en dimension finie.

Soit $\mathcal{H}$ un $\mathbb{Z}_2$-fibré vectoriel et $\mathbb{A}$ une superconnexion.

La super-trace $\quad \mathrm{Str} : \mathrm{End}\, \mathcal{E}_2 \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\begin{array}{c|cc} & \mathcal{H}^+ & \mathcal{H}^- \\ \hline \mathcal{H}^+ & a & b \\ \mathcal{H}^- & c & d \end{array} \longrightarrow \mathrm{Trace}(a) - \mathrm{Trace}(d)$$

s'étend à $\Lambda T^*M \otimes \mathrm{End}\, \mathcal{E}$ par $\mathrm{Str}(\alpha \wedge u) = \alpha \wedge \mathrm{Str}(u)$.

Comme ΛT^*M est super-commutative, Str reste nulle sur les super-commutateurs.

Soit f un polynôme à une variable à coefficients complexes.

Comme $\mathbb{A}^2 \in A^+(X, \mathrm{End}\, \mathcal{E})$ on peut considérer $\mathrm{Str}(f(\mathbb{A}^2))$.

<u>Prop</u> : La forme $\mathrm{Str}(f(\mathbb{A}^2))$ est fermée et si $\mathbb{A}_t$ est une famille différentiable de superconnexions sur $\mathcal{E}$

$$\frac{d}{dt} \mathrm{Str}(f(\mathbb{A}_t^2)) = d\, \mathrm{Str}\left(\frac{d\mathbb{A}_t}{dt} f'(\mathbb{A}_t^2) \right)$$

$\frac{d\mathbb{A}_t}{dt} \in A(M, \mathrm{End}\, \mathcal{E})$.

En particulier, la classe de cohomologie de $\mathrm{Str}(f(\mathbb{A}^2))$ ne dépend pas de la connexion choisie.

<u>Conséquence</u> $\quad \{ ch(\mathbb{A}) \} = \{ \mathrm{Str}\, e^{-\mathbb{A}^2} \} = \{ ch(\mathbb{A}_{[1]}) \}$

Or $\mathbb{A}_{[1]} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{[1]} & 0 \\ 0 & \mathbb{A}_{[1]} \end{pmatrix}$ $\quad \mathbb{A}_{[1]}$ connexion de degré total impair.

Donc $\{ Ch(\mathcal{H}) \} = \{ Ch\, \mathcal{H}^+ \} - \{ Ch\, \mathcal{H}^- \}$

Si maintenant D est un endomorphisme impair auto-adjoint de $\mathcal{H}$. Si $\operatorname{Ker} D$ est de dim constante

$$\operatorname{Im} D = (\operatorname{Ker} D)^{\perp} \qquad \mathcal{H}^{+} = \operatorname{Im} D^{-} \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Ker} D^{+}$$

$D^{+} : \operatorname{Im} D^{-} \longrightarrow \operatorname{Im} D^{+}$ est un isomorphisme.

Donc
$$\{ Ch(\mathcal{H}) \} = \{ Ch(\operatorname{Im} D^{-}) \} + \{ Ch(\operatorname{Ker} D^{+}) \} - \{ Ch(\operatorname{Im} D^{+}) \} - \{ Ch(\operatorname{Ker} D^{-}) \}$$
$$= \{ Ch(\operatorname{Ker} D^{+}) \} - \{ Ch(\operatorname{Ker} D^{-}) \}.$$

2/ En dimension infinie

Soit $\mathcal{E}$ un $\mathbb{Z}_2$ fibré vectoriel hermitien de dim finie sur une variété différentiable M. On note $\mathcal{H} = \pi_*^{C^\infty} \mathcal{E}$ le fibré (de dim infinie) des sections C^∞ de $\mathcal{E}$ le long des fibres de $\pi : M \to B$.

Soit $\mathbb{A}$ une superconnexion sur $\mathcal{H}$ telle que $\mathbb{A}_{[0]}$ soit ~~est~~ un endomorphisme D ~~auto-adjoint impair~~ de Dirac ~~de~~ sur $\mathcal{H}$ dont le noyau est de rang constant.

Soit $\mathbb{A}_t$ la famille de superconnexions

$$\mathbb{A}_t = t^{1/2} D + \mathbb{A}_{[1]} + t^{-1/2} \mathbb{A}_{[2]} + t^{-1} \mathbb{A}_{[3]} + \cdots \qquad \{ Ch(\mathbb{A}_t) \} = \{ ch\, \mathbb{A}_{[1]} \}$$

Soit $\nabla^{\operatorname{Ker} D} = P_{\operatorname{Ker} D}\, \mathbb{A}_{[1]}\, P_{\operatorname{Ker} D}$ connexion sur $\operatorname{Ker} D$.

<u>Théorème</u> : • Pour t grand

$$\| e^{-\mathbb{A}_t^2} - e^{-(\nabla^{\operatorname{Ker} D})^2} \|_{\ell} = O(t^{-1/2})$$

• $ch(\mathbb{A}_t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} ch(\nabla^{\operatorname{Ker} D})$

• $ch(\mathbb{A}_t) - ch(\nabla^{\operatorname{Ker} D}) = d \displaystyle\int_t^{+\infty} \operatorname{Str}\left(\frac{d\mathbb{A}_s}{ds} e^{-\mathbb{A}_s^2} \right)$

L'argument clef est le fait que dans une décomposition $\mathcal{H} = \operatorname{Ker} D \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im} D$

$$\mathbb{A}_t^2 = \begin{vmatrix} (\nabla^{\operatorname{Ker} D})^2 + O(t^{-1/2}) & O(t^{-1/2}) \\ O(t^{-1/2}) & t\, D^2_{|\operatorname{Im} D} \end{vmatrix}$$

Notons que $D_{|\operatorname{Ker} D} = 0$ et $D^2_{|\operatorname{Im} D}$ est défini positif.

III) La superconnexion de Bismut

Dans la situation où $\mathcal{H} = \pi_* \tau$, on cherche à construire une superconnexion $\mathbb{A}$ sur $\mathcal{H}$ dont la partie de degré 0 est la famille d'opérateur de Dirac donnée et dont le caractère de Chern de la famille $\mathbb{A}_t$ admet une limite en 0.

Données supplémentaires

- $g_{M/B}$ métrique sur TM/B ($M \to B$ devient une familles de variétés riemanniennes)
- scindage de TM par un sous-fibré $T^H M$

On a alors

* $\pi_* \tau \to B$ est le $\mathbb{Z}_2$-fibré des sections $\mathcal{C}^\infty$ de τ sur les fibres de π, muni de la métrique L^2 calculée avec h et $dV_{g_{M/B}}$.

$$\langle\langle s, s' \rangle\rangle_2 = \int_{M_z} \langle s, s' \rangle_h \, dV_{g_{M/B}}$$

~~$c : C(T^*M/B) \to \operatorname{End}(\tau)$ structure de module de Clifford.~~

* une connexion euclidienne sur TM/B construite ainsi :

on choisit une métrique g^B sur TB. Elle fournit une métrique g^H sur $T^H M$. La somme directe orthogonale $g_{M/B} \overset{\perp}{\oplus} g^H$ fournit une métrique g sur TM. Soit ∇^g la connexion de Levi-Civita et $\nabla^{TM/B} \overset{\text{def}}{=} P_{TM/B} \nabla^g$ la connexion sur TM/B. Elle ne dépend pas du choix de g^B et préserve la métrique $g_{M/B}$.

La donnée d'une (famille de) structure de module de Clifford

$c : C(T^*M/B) \to \mathrm{End}(\tau)$ et d'une connexion de Clifford $\nabla^{\mathcal{E}}$ sur $\mathcal{E}$

i.e. $$[\nabla^{\mathcal{E}}_X, c(\alpha)] = c(\nabla^{TM/B}_X \alpha) \qquad \alpha \in \Gamma(TM/B^*), \quad X \in \Gamma(TM).$$

permet de construire une famille d'opérateurs de Dirac D_z.

$$D : \Gamma(B, \pi_* \tau^{\pm}) \longrightarrow \Gamma(B, \pi_* \tau^{\mp})$$

On cherche une bonne superconnexion $\mathbb{A}$ sur $\pi_* \tau$ telle que $\mathbb{A}_{[0]} = D$

$$\mathbb{A} : A^{\pm}(B, \pi_* \tau) \longrightarrow A^{\mp}(B, \pi_* \tau)$$

où bien $\tilde{\mathbb{A}} : \Gamma(M, \mathbb{E}) \longrightarrow \Gamma(M, \mathbb{E})$ impair où $\mathbb{E} = \pi^* \Lambda T^*B \otimes \tau$.
graduation somme.

La relation de Leibniz

$$\mathbb{A}(\partial s) = d_B \partial \wedge s + (-1)^{\deg \partial} s \wedge \mathbb{A} s \qquad \partial \in A(B) \quad s \in \Gamma(\pi_* \tau)$$

équivaut à

$$\tilde{\mathbb{A}}(\pi^* \partial \wedge \tilde{s}) = \pi^*(d_B \partial) \wedge \tilde{s} + (-1)^{\deg \partial} \pi^* s \wedge \tilde{\mathbb{A}} \tilde{s} \qquad \partial \in A(B) \quad \tilde{s} \in \Gamma(\mathbb{E})$$

On va choisir pour $\tilde{\mathbb{A}}$ un opérateur de Dirac sur $\mathbb{E}$. Il faut donc construire

1/ une multiplication de Clifford sur $\mathbb{E}$.

2/ une connexion de Clifford sur $\mathbb{E}$.

1/ On considère TM avec la métrique dégénérée $g_{M/B}$ nulle sur $T^H M$.
L'algèbre de Clifford associée est $\pi^* \Lambda^\cdot T^*B \otimes C(T^*M/B, g_{M/B})$.
La multiplication de Clifford sur $\mathbb{E} = \pi^* \Lambda^\cdot T^*B \otimes \mathcal{E}$

$$m_0 : \pi^* \Lambda T^*B \otimes C(T^*M/B) \longrightarrow \mathrm{End}(\mathbb{E})$$
$$u \otimes \alpha \longmapsto (v \otimes e \mapsto u \wedge v \otimes c(\alpha) e)$$

2/ On choisit une métrique sur TB et la connexion de LC associée ∇^B. On en déduit une connexion sur $\mathbb{E}$

$$\nabla^{\mathbb{E}\oplus} = \pi^* \nabla^B \otimes 1 + 1 \otimes \nabla^{\mathcal{E}}$$

Mais avec $g = g_{M/B} \overset{\perp}{\oplus} g_B$, la connexion $\nabla^{\mathbb{E}}$ n'est pas de Clifford pour la connexion de Levi-Civita sur (M,g) i.e.

$$[\nabla^{\mathbb{E}\oplus}, m_0(\alpha)] \neq m_0(\nabla^g_\alpha)$$

On a seulement

$$[\nabla^{\mathbb{E}\oplus}, m_0(\alpha)] = m_0(\nabla^{M\oplus}_\alpha)$$

où $\nabla^{M,\oplus} = \pi^* \nabla^B \otimes 1 + 1 \otimes \pi^* \nabla^{TM/B}$ $\qquad \nabla^{TM/B} = P_{TM/B} \nabla^g$

La différence $\nabla^g - \nabla^{M\oplus}$ est donnée par une 1-forme sur M à valeurs dans les endomorphismes de ΛT^*M en fait ici par

$$\omega \in A^1(M, \mathrm{End}\, T^*M)$$

On pose $\nabla^{\mathbb{E}} = \nabla^{\mathbb{E}\oplus} + \frac{1}{2} m_0(\omega)$

Alors $[\nabla^{\mathbb{E}}, m_0(\alpha)] = m_0(\nabla^g_\alpha)$

On peut donc poser $\tilde{\mathbb{A}} = m_0 \nabla^{\mathbb{E}}$ opérateur de Dirac sur $\mathbb{E}$.

- L'opérateur $\mathbb{A}$ associé vérifie la relations de Leibniz :

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{A}}(\partial \tilde{s}) &= m_0 \nabla^{E}(\partial \tilde{s}) \\
&= m_0 \nabla^{E\oplus}(\partial \tilde{s}) + \frac{1}{2} m_0 \; m_0(\omega)(\partial \tilde{s}) \\
&= m_0 \; \pi^*(\nabla^B \partial) \wedge \tilde{s} + (-1)^{\deg \partial} \partial \tilde{\mathbb{A}} \tilde{s} \\
&= \pi^* d_B \partial \wedge s + (-1)^{\deg \partial} \partial \tilde{\mathbb{A}} \tilde{s}
\end{aligned}$$

car ∇^B est la connexion de LC sur (B, g_B) sans torsion et m_0 est donnée par la multiplication extérieure.

- La partie de degré 0 de $\mathbb{A}$ est D car

$$\tilde{\mathbb{A}} = m_0 \nabla^{\mathbb{E}} = m_0 \Big(\underbrace{\nabla^B \otimes 1}_{} + 1 \otimes \nabla^E + \frac{1}{2} \underbrace{m_0(\omega)}_{} \Big)$$

augment le degré en les variables de TB^*

- La relation de Clifford $[\nabla^{\mathbb{E}}, m_0(\alpha)] = m_0(\nabla^g \alpha)$ permet d'obtenir une formule de type Lichnerowicz pour $\tilde{\mathbb{A}}$ et donc pour $\mathbb{A}$.

C'est l'outil principal du calcul de la densité d'indice.
On peut alors calculer la densité d'indice du noyau de la chaleur du laplacien généralisé $\tilde{\mathbb{A}}^2$ ou de la courbure $\mathbb{A}^2$ de la superconnexion $\mathbb{A}$.

Pour tout $t > 0$ l'opérateur $e^{-t\tilde{\mathbb{A}}^2}$ agissant sur $\Gamma(M, \mathbb{E})$ a un noyau $\mathcal{C}^\infty$

$$e^{-t\mathbb{A}^2} \tilde{\Phi}(x) = \int_{M_2} \langle x | e^{-t\tilde{\mathbb{A}}^2} | y \rangle \tilde{\Phi}(y) \, dy \qquad x \in M_2$$

$$k_t \in \Gamma(M \times_\pi M, \ \pi^* \Lambda T^*B \otimes \mathcal{E}^* \boxtimes_\pi \mathcal{E})$$

$$k_t(x,x) \in \Gamma(M, \ \pi^* \Lambda T^*B \otimes \operatorname{End} \mathcal{E})$$

$$\sigma(k_t(x,x)) \in \Gamma(M, \ \Lambda T^*M \otimes \operatorname{End}_{C(M)} \mathcal{E})$$

<u>Théorème</u> : (i) $k_t(x,x)$ a une décomposition asymptotique

de la forme $\quad k_t(x,x) = \dfrac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} t^i k_i(x) \qquad n = \dim M/B$

(ii) $\quad \sigma(k_i) \in A^{\leq 2i}(M, \operatorname{End}_{C(M/B)} \mathcal{E})$

(iii) $\quad \sigma(k) := \displaystyle\sum_{i=0}^{\dim M/2} \sigma(k_i)_{[2i]} = \hat{A}\left((\nabla^{TM/B})^2\right) \operatorname{Ch}(F^{\mathcal{E}/S})$

<u>Conséquence</u>

Dans la décomposition $\quad \mathcal{E} = S \otimes W \qquad \operatorname{End} S = C(T^*M/B) \simeq \Lambda T^*M/B$

$$\operatorname{Str}(a) = (-2i)^{n/2} \operatorname{Int}_\pi \underbrace{\operatorname{Str}_{\mathcal{E}/S}}_{\text{super-trace comme endomorphisme de } W} \sigma(a)$$

$$\operatorname{Ch}(A_t) = \operatorname{Str} e^{-A_t^2} = \delta_t^B \operatorname{Str}(e^{-tA^2})$$

$$\overset{\text{McKean-Singer}}{=} \delta_t^B \int_{M/B} \operatorname{Str} k_t(x,x) \qquad k_t \text{ noyau de } e^{-t\hat{A}^2}$$

où δ_t^B multiplie les formes de degré i par $t^{-i/2}$

$$\delta_t^B \operatorname{Str} k_t(x,x) = \delta_t^B \sum \frac{(-2i)^{n/2}}{(4\pi)^{n/2}} t^{i-\frac{n}{2}} \operatorname{Str}_{\mathcal{E}/S} \sigma(k_i)_{[p,m]}$$

m : deg sur T^*M/B

p : deg sur T^*B

$$= \frac{1}{(2i\pi)^{n/2}} \sum t^{i-\frac{n}{2}} t^{-\frac{p}{2}} \qquad p+m \leq 2i$$

$$\{Ch(\operatorname{Ind} D)\} = \frac{1}{(2i\pi)^{n/2}} \int_{M/B} \hat{A}(M/B)\, ch(E/S) \in H^{2*}(B)$$

Théo Atiyah - Singer

$$Ch(P_{\ker D} A_{[1]} P_{\ker D}) = \frac{1}{(2i\pi)^{n/2}} \int_{M/B} \hat{A}(M/B)\, ch(E/S) - d \int_0^{+\infty} \alpha(s)\, ds$$

où $\alpha(t) = \operatorname{Str}\left(\frac{d A_t}{dt} e^{-A_t^2} \right)$

(Pour cette formule de transgression, il faut étudier l'asymptotique de α en 0).

$$\alpha(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} t^{j/2-1} \alpha_j \qquad \alpha_j \in A(B).$$

Courbure du fibré déterminant

Rappel du cours précédent.

Pour une famille D d'opérateurs de Dirac auto-adjoints sur un $\mathbb{Z}_2$ fibré vectoriel hermitien $\mathcal{E} \to M \left(\xrightarrow{\pi} B\right)$ avec la donnée supplémentaire d'une métrique riemannienne relative $g_{M/B}$ et d'un scindage $T^H M$, on a construit la super-connexion de Bismut $\mathbb{A}$ sur $\pi_* \mathcal{E}$ avec $\mathbb{A}_{[0]} = D$ et dont le caractère de Chern de la famille $\mathbb{A}_t$, obtenue par changement d'échelle, a une limite en 0. Plus précisément

$$ch(\mathbb{A}_t) = \frac{1}{(2i\pi)^{n/2}} \int_{M/B} \hat{A}(M/B)\, ch(\mathcal{E}/S) - d \int_0^t Str\left(\frac{d\mathbb{A}_s}{ds} e^{-\mathbb{A}_s^2}\right) ds$$

(Cette formule de transgression est obtenue en étendant à $B \times \mathbb{R}^{+*}$ la construction de la super-connexion de Bismut)

On va montrer que la partie de degré 2 de cette formule permet le calcul de la courbure du fibré déterminant muni de la métrique de Quillen.

I) Fibré déterminant

On a définis le fibré d'indice d'une famille d'opérateurs de Dirac comme une classe dans le groupe de Grothendieck $K(B)$ des fibrés vectoriels sur B.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ $\quad U_\lambda = \{ z \in B \ / \ \lambda$ n'est pas valeur propre de $(D^z)^2 \}$

Sur $U_\lambda \cap U_\mu$ $\quad D^+_{(\lambda\mu)} : \mathcal{H}^+_{(\lambda\mu)} \longrightarrow \mathcal{H}^-_{(\lambda\mu)}$ isomorphisme

$$\det D^+_{(\lambda\mu)} : (\det \mathcal{H}^+_{\lambda\mu})^* \otimes \det \mathcal{H}^-_{(\lambda\mu)} \longrightarrow \underline{\mathbb{C}} \quad \text{iso}$$

$$\det \mathcal{H}^-_{(\lambda\mu)} = (\det \mathcal{H}_{(\lambda\mu)})^*$$

$\lambda < \mu$ $\quad \det \mathcal{H}_{[0,\lambda)} \equiv \det \mathcal{H}_{[0,\mu)} \otimes (\det \mathcal{H}_{(\lambda\mu)})^* \xrightarrow{\sim} \det \mathcal{H}_{[0,\mu)}$

$$s = \sigma \otimes \ell \longmapsto \sigma \otimes \det D^+_{(\lambda\mu)} \ell$$

donne un recollement des $\det \mathcal{H}_{[0,\lambda)}$ sur les intersections $U_\lambda \cap U_\mu$.

On a donc construit un fibré en droites sur B noté $\det(\pi_* \tau, D)$

II) Métrique de Quillen.

Rappel sur les déterminants généralisés.

Si H est un Laplacien généralisé sur une variété riemannienne compacte V, on pose $\Theta_{H\lambda}(t) = \sum_{\lambda_i \geq \lambda} e^{-t\lambda_i}$ (λ_i vp de H) et

$$\zeta_{H\lambda}(s) = M[\Theta_{H\lambda}](s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \Theta_{H\lambda}(t)\, t^{s-1}\, dt$$

se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ sans pôle en 0.

$$\det_{(\lambda+\infty)} H := e^{-\zeta'_{H\lambda}(0)}$$

$$\zeta'_{H\mu}(0) = \zeta'_{H\lambda}(0) + \sum_{\lambda < \lambda_i < \mu} \log \lambda_i$$

Les fibrés $\mathcal{H}_{[0,\lambda)} \subset \pi_* \tau$ ont une métrique naturelle L^2 construite à l'aide de la métrique hermitienne sur τ et de la métrique riemannienne $g_{M/B}$.

Mais les changements de trivialisation du fibré déterminant ne sont pas isométriques

$$\| \sigma \otimes \det D^+_{(\lambda\mu)} \ell \|^2_{\det [0,\mu)} = |\det D^+_{(\lambda\mu)}|^2 \, \| s \|^2_{\det \mathcal{H}_{[0,\lambda)}}$$

$$= \prod_{\lambda < \lambda_i < \mu} \lambda_i \quad \| s \|^2_{\det \mathcal{H}_{[0,\lambda)}}$$

$$= \| s \|^2_{\det \mathcal{H}_{[0,\lambda)}} \; e^{\zeta'_{\mu\mu}(0) - \zeta'_{\lambda\lambda}(0)}$$

Donc $\| \; \|^2_{\det \mathcal{H}_{[0,\lambda)}} \, e^{-\zeta'_{\lambda\lambda}(0)}$ est une métrique globale sur $\det(\pi_* \tau, D)$.

III) Connexion métrique sur le fibré déterminant

Soit $\nabla^{\pi_* \mathcal{E}}$ une connexion sur $\pi_* \mathcal{E}$ compatible avec la métrique L^2.

On en déduit une connexion $\nabla^{\det \mathcal{H}_{[0,\lambda)}}$ sur $\det \mathcal{H}_{[0,\lambda)}$

Or $\mathcal{H}_{[0,\mu)} = \mathcal{H}_{[0,\lambda)} \oplus \mathcal{H}_{(\lambda,\mu)}$ sur $U_\lambda \cap U_\mu$

$$\nabla^{\det \mathcal{H}_{(\lambda\mu)}} \det D^+_{(\lambda\mu)} = - \operatorname{Trace}_{\mathcal{H}^+_{\lambda\mu}} \left((D^+_{(\lambda\mu)})^{-1} \nabla^{\operatorname{End} \mathcal{H}_{(\lambda\mu)}} D^+_{(\lambda\mu)} \right) \det D^+_{(\lambda\mu)}$$

$$= - \det D^+_{(\lambda\mu)} \operatorname{Trace}_{\mathcal{H}^+_{\lambda\mu}} \left((D^-_{\lambda\mu} D^+_{\lambda\mu})^{-1} D^-_{\lambda\mu} \left[\nabla^{\mathcal{H}_{\lambda\mu}}, D^+_{(\lambda\mu)} \right] \right)$$

$$= - \lim_{t \to 0} \operatorname{Trace}_{\mathcal{H}^+_{\lambda\mu}} \left(D^-_{\lambda\mu} \left[\nabla^{\mathcal{H}_{\lambda\mu}}, D^+_{\lambda\mu} \right] (D^-_{\lambda\mu} D^+_{\lambda\mu})^{-1} e^{-t D^- D^+} \right)$$

$$= - \lim_{t \to 0} \int_t^{+\infty} \operatorname{Trace}_{\mathcal{H}^+_{\lambda\mu}} \left(D^-_{\lambda\mu} \left[\nabla^{\mathcal{H}_{\lambda\mu}}, D^+_{\lambda\mu} \right] e^{-s D^- D^+} \right)$$

$$= - (\det D^+_{\lambda\mu}) \, (\beta^+_\mu - \beta^+_\lambda)$$

$$= \left(\nabla^{\det \mathcal{H}_{[0,\mu)}} - \nabla^{\det \mathcal{H}_{[0,\lambda)}} \right) \det D^+_{(\lambda\mu)}$$

où $\beta^+_\lambda = - \lim_{t\to 0} \int_t^{+\infty} \mathrm{Trace}_{\mathcal{H}^+_{(\lambda+\infty)}} \left(D^-_{(\lambda+\infty)} \left[\nabla^{\pi_* \mathcal{E}}, D^+ \right] e^{-sD^2} \right)$

On en déduit que $\nabla^{\det \mathcal{H}_{[0,\lambda]}} + \beta^+_\lambda$ est une connexion globale sur $\det(\pi_* \mathcal{E}, D)$.

En posant $\beta^-_\lambda = - \lim_{t\to 0} \int_t^{+\infty} \mathrm{Trace}_{\mathcal{H}^-} \left(D^+_{\lambda+\infty} \left[\nabla^{\pi_* \mathcal{E}}, D^- \right] e^{-sD^2} \right)$

on obtient

$$\beta^+_\lambda + \beta^-_\lambda = - \lim_{t\to 0} \int_t^{+\infty} \mathrm{Trace}_{\mathcal{H}^+} \left(P_{\lambda\infty} \left[\nabla^{\pi_* \mathcal{E}}, D^- D^+ \right] e^{-sD^2} \right)$$

<u>Prop</u> : • $\underbrace{d\zeta'_{D^-D^+,\lambda}(0)}_{\text{torsion analytique}} = - \underbrace{(\beta^+_\lambda + \beta^-_\lambda)}_{\text{transgression (Bott-Chern)}}$

• conséquence : La connexion $\nabla^{\det \mathcal{H}_{[0,\lambda]}} + \beta^+_\lambda$ est compatible avec la métrique de Quillen.

<u>Dem</u> : $$\frac{\partial \zeta_{D^-D^+,\lambda}}{\partial z} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial z} \mathrm{Trace} \left(P_{(\lambda\infty)} e^{-tD^-D^+} \right) t^{s-1} dt$$

$$= M \left[\mathrm{Tr}\left(\frac{\partial P}{\partial z} e^{-tD^2} \right) \right] + M \left[-t \mathrm{Tr} \left(P \frac{\partial (D^-D^+)}{\partial z} e^{-tD^-D^+} \right) \right]$$

Comme $P^2 = P$ $\qquad P\left(\frac{\partial}{\partial z} P\right) P = 0$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = P\left(\frac{\partial}{\partial z} P\right)(1-P) + (1-P) \frac{\partial P}{\partial z} P \quad \text{de trace nulle.}$$

Pour l'autre terme, on utilise

$$M[-tf'] = s\, M[f]$$

On trouve

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -s\, M\left[\mathrm{Tr}\left(\int_t^{+\infty} P_{\lambda\infty} \frac{\partial D^- D^+}{\partial z} e^{-s D^- D^+} \right] \right.$$

<u>Lemme</u> : Si $f(t)$ a un développement asymptotique $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \sum_{k \geq -d} a_k t^{k/2}$ et un bon comportement à l'infini alors

$$\frac{d}{ds}\left(s\, M[f](s) \right)_{|s=0} = a_0 = \lim_{t\to 0} f(t)$$

Donc $$\frac{\partial \varphi'_\lambda}{\partial z} = -\lim_{t\to 0} \int_t^{+\infty} \mathrm{Tr}\left(P_{\lambda\infty} \frac{\partial D^- D^+}{\partial z} e^{-s D^2} \right) ds$$

$$\left[\nabla^{\pi_* \mathcal{E}}, D^- D^+ \right] \simeq d\left(D^- D^+\right) + \underbrace{\left[A, D^- D^+ \right]}_{\text{de trace nulle.}}$$

IV) <u>Courbure de la connexion métrique</u>

<u>Théo</u> : La courbure de la connexion $\nabla^{\det(\pi_* \mathcal{E}, D)}$ est

$$\frac{1}{(2\pi i)^{n/2}} \int_{M/B} \hat{A}(M/B)\, ch(\mathcal{E}/S)_{[2]}$$

<u>Dem</u> : On vérifie que l'on peut choisir la connexion métrique sur $\pi_* \mathcal{E}$ telle que la super-connexion de Bismut donne

$$\mathbb{A} \equiv D + \nabla^{\pi_* \mathcal{E}} \quad \mathrm{mod}\ A^{\bullet+2}(B)$$

$$\left(\nabla^{\det \mathcal{H}_{[0,\lambda]}} + \beta_\lambda^+\right)^2 = \left(\nabla^{\det \mathcal{H}_{[0,\lambda]}}\right)^2 + d\beta_\lambda^+$$

$$= \mathrm{Ch}\left(\nabla^{\mathcal{H}_{[0,\lambda]}}\right)_{[2]} + \frac{1}{2} d(\beta_\lambda^+ - \beta_\lambda^-) + \frac{1}{2} d(\underbrace{\beta_\lambda^+ + \beta_\lambda^-}_{\text{exact } d\varsigma'})$$

Pour calculer $d(\beta_\lambda^+ - \beta_\lambda^-)$ on va utiliser la formule de transgression du cours précédent appliqué à $\mathbb{A}_{\lambda s} = s^{+1/2} P_{\lambda\infty} D + \nabla^{\pi_* \mathcal{E}} + \dots$

$$\mathrm{Str}\left(\frac{d\mathbb{A}_{\lambda s}}{ds} e^{-\mathbb{A}_{\lambda s}^2}\right)_{[1]} = \frac{1}{2s^{1/2}} \mathrm{Str}\left(D_{\lambda\infty} e^{-(s^{1/2} D + \nabla^{\pi_* \mathcal{E}})^2}\right)_{[1]}$$

$$= -\frac{1}{2} \mathrm{Str}\left(D_{\lambda\infty}[D, \nabla^{\pi_* \mathcal{E}}]\, e^{-sD^2}\right)_{[1]}$$

$$\frac{1}{2}(\beta_\lambda^+ - \beta_\lambda^-) = -\lim_{t\to 0} \int_t^{+\infty} \mathrm{Str}\left(P_{\lambda\infty} D\, [D, \nabla^{\pi_* \mathcal{E}}]\, e^{-sD^2}\right)_{[1]} ds$$

$$= -\lim_{t\to 0} \int_t^{+\infty} \mathrm{Str}\left(\frac{d\mathbb{A}_{\lambda s}}{ds} e^{-\mathbb{A}_{\lambda s}^2}\right)_{[1]} ds$$

$$= \int_0^{+\infty} \mathrm{Str}\left(\frac{d\mathbb{A}_{\lambda s}}{ds} e^{-\mathbb{A}_{\lambda s}^2}\right)_{[1]} ds \quad \text{par le choix de la connexion de Bismut.}$$

$$\frac{1}{2} d(\beta_\lambda^+ - \beta_\lambda^-) = \frac{1}{(2i\pi)^{m/2}} \int_{M/B} \hat{A}(M/B)\, \mathrm{Ch}(\mathcal{E}/S)_{[2]} - \underbrace{\lim_{t\to+\infty} \mathrm{Ch}(\mathbb{A}_{\lambda t})_{[2]}}_{\mathrm{Ker}\, P_{\lambda\infty} D = \mathcal{H}_{[0,\lambda]}}$$

$$\mathrm{Ch}(P_{\lambda\infty} \nabla^{\pi_* \mathcal{E}} P_{\lambda\infty})_{[2]}$$

$$\parallel$$

$$\mathrm{Ch}(\nabla^{\mathcal{H}_{[0,\lambda]}})_{[2]}$$

Chap I — Noyau de la chaleur pour les Laplaciens généralisés

On étudie dans cette partie le théorème de l'indice d'Atiyah Singer pour les opérateurs de Dirac. On verra ensuite comment adapter ce calcul au calcul de courbure nécessaire pour établir la partie analytique du théorème de Riemann-Roch arithmétique.

I) Définitions

Soit (M,g) une variété riemannienne (compacte) et $\mathcal{E} \to M$ un fibré vectoriel euclidien.

Un <u>opérateur Laplacien généralisé</u> sur $\mathcal{E}$ est un opérateur différentiel d'ordre 2 sur les sections de $\mathcal{E}$ qui s'écrit localement

$$H\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_r \end{pmatrix} = -\sum g^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_r \end{pmatrix} + \text{partie d'ordre } 1.$$

$$g^{ij} = g(dx_i, dx_j)$$

En particulier, c'est un opérateur dont le symbole principal en $\xi \in T^*M$ est l'homothétie de rapport $-|\xi|^2$.

Il est donc <u>elliptique</u>.

Un <u>noyau</u> p est une distribution de $\mathcal{D}(M \times M, \mathcal{E}^* \boxtimes \mathcal{E}^*)$

Elle permet de définir des <u>opérateurs à noyau</u> P par

$$P : A_c(M,\mathcal{E}) \longrightarrow A(M,\mathcal{E})$$
$$s \longmapsto (Ps)(x) = \int_M p(x,y)\, s(y)\, dV_g$$

Si le noyau p est $\mathcal{C}^\infty$, l'opérateur P s'étend en

$$P : \mathcal{D}_c(M, \tau) \longrightarrow A(M, \tau)$$

et on dit que P est régularisant.

Le but principal de ce chapitre est de montrer que si H est un Laplacien généralisé sur une variété riemannienne compacte, l'opérateur e^{-tH} $(t>0)$ admet un noyau $\mathcal{C}^\infty$ (appelé noyau de la chaleur de H).

Plus précisément, un noyau de la chaleur pour H est une section continue $p_t(x,y)$ de $\tau^* \boxtimes \tau^*$ sur $]0,+\infty[\times M \times M$ vérifiant

1 - $\dfrac{\partial p_t(x,y)}{\partial t}$ continue en (t,x,y)

2 - $\dfrac{\partial^2 p_t(x,y)}{\partial x_i \, \partial x_j}$ continue en (t,x,y)

3 - $(\partial_t + H_x)\, p_t(x,y) = 0$

4 - $\lim\limits_{t \to 0} \sup\limits_M \| P_t s - s \| = 0 \qquad \forall s \in A(M,\tau)$

Le noyau de la chaleur interpole entre l'identité et un projecteur sur $\operatorname{Ker} H$.

Le noyau de la chaleur pour $\mathbb{R}^n$ plat est $\tau = \mathbb{R}$ est

$$E_t(x,y) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$$

<u>Théorème</u> : Sur une variété compacte M, tout opérateur Laplacien généralisé sur un fibré vectoriel τ admet un unique noyau de la chaleur $\mathcal{C}^\infty$ avec une asymptotique près de la diagonale de M de la forme

$$p_t(x,y) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{d(x,y)^2}{4t}} \sum_{i=0}^{\infty} t^i f_i(x,y)$$

i.e.

$$\left\| \partial_t^a \left[p_t(x,y) - \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{d(x,y)^2}{4t}} \sum_{i=0}^{N} t^i f_i(x,y) \right] \right\|_\ell = O\left(t^{N-a-\frac{\ell}{2}-\frac{n}{2}}\right)$$

<u>Idées de démonstration</u>

Unicité pour un opérateur Laplacien généralisé qui admet une extension auto-adjointe.

Il existe alors une b.on de fonctions propres $\mathcal{C}^\infty$ $\varphi_i(x)$

S'il existe un noyau de la chaleur $p_t(x,y)$ alors

$\sum e^{-\lambda_i t} \varphi_i(x) \varphi_i(y)$ converge sur $\mathbb{R}^{+*} \times M \times M$ vers $p_t(x,y)$

II) Conséquences

a) Trace de l'opérateur de la chaleur

On dit qu'un endomorphisme A d'un espace de Hilbert est un opérateur de Hilbert-Schmidt si

$$\|A\|_{HS}^2 = \sum \|Ae_i\|^2 = \sum_{ij} |\langle Ae_i, e_j\rangle|^2 < +\infty$$

$$\langle A, B\rangle_{HS} = \sum \langle Ae_i, e_j\rangle \overline{\langle Be_i, e_j\rangle}$$

En particulier A est compact, borné

Si P est un opérateur à noyau L^2 alors P est de Hilbert-Schmidt

et $\|P\|_{HS}^2 = \int_M \mathrm{Tr}(p(x,y)^* p(x,y))$ à l'aide de la formule de Parseval

Un opérateur P est dit à trace (il est alors de HS) s'il est le produit de deux opérateurs de HS. Si $K = AB$ $\mathrm{tr}\, K = \langle A^*, B^*\rangle_{HS}$

$$\mathrm{Tr}(K) = \sum \langle Ke_i, e_i\rangle$$

L'existence d'un noyau C^∞ pour l'opérateur de la chaleur montre que e^{-tH} est à trace

$\mathrm{Tr}(e^{-tH})$ existe et vaut $\int_M \mathrm{Tr}(p_t(x,x))\, dV_g$

$$\mathrm{Tr}(e^{-tH}) = \langle e^{-\frac{t}{2}H}, (e^{-\frac{t}{2}H})^*\rangle_{HS}$$

$$= \int_{x,y} \mathrm{Tr}(p_{t/2}(x,y)\, p_{t/2}(y,x))\, dV_g$$

$$= \int_x \mathrm{Tr}(p_t(x,x))\, dV_g$$

Des informations sur le noyau de la chaleur donnent des informations sur le spectre de H.

b/ <u>Déterminant régularisé</u>

De plus, l'asymptotique donne par intégration

$$\left| \mathrm{Tr}(e^{-tH}) - \frac{1}{(4\pi t)^{m/2}} \sum_{i=0}^{N} t^i \int_M f_i(x,x) \right| = O(t^{N-\frac{m}{2}})$$

On pose alors $\zeta_H(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \mathrm{Tr}(e^{-tH})\, t^s \frac{dt}{t}$

Lemme : Si H est défini positif et auto-adjoint alors ζ_H converge pour $\mathrm{Re}(s) \gg 1$

a un prolongement meromorphe à $\mathbb{C}$

est holomorphe en 0

Dem : La théorie spectrale de H montre que alors

$\theta(t) = \mathrm{Tr}(e^{-tH}) = \sum e^{-t\lambda_i}$ où les $\lambda_i > 0$ sont les vp de H

- En particulier $0 \leq \theta(t) \leq e^{-\lambda_1(t-1)}\theta(1)$ pas de pb en $+\infty$

- Si $\mathrm{Re}(s) > \frac{m}{2}$ $\zeta_H(s)$ est donc convergente.

- $\theta(t) = \sum_{i=-\frac{m}{2}}^{N} t^i a_i + O(t^{N+1})$

On en déduit un prolongement méro pour $\mathrm{Re}(s) > -N-1$

$$\zeta_1(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_1^{+\infty} \theta(t)\, t^s \frac{dt}{t} + \sum_{i=-\frac{m}{2}}^{N} \frac{a_i}{\Gamma(s)(i+s)} + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 O(t^{N+1})\, t^{s-1}\, dt$$

avec $N=0$ et $s=0$

comme $\frac{1}{s\,\Gamma(s)} \xrightarrow{s\to 0} 1$ $\qquad \zeta_A(0) \to a_0$

On appelle déterminant régularisé de H $\quad e^{-\zeta_H'(0)} = \det H$

car $\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} e^{-t\lambda}\, t^s \frac{dt}{t} = \frac{1}{\lambda^s}$

et $\frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{\lambda^s}(0) = -\ln \lambda.$

Par des méthodes Tauberiennes, on peut montrer que le nb de vp $\leq \lambda$ est alors équivalent à

$$\frac{\mathrm{Vol}(M)}{(4\pi)^{m/2}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}\,\lambda^{m/2}$$

Si $t^\alpha \sum e^{-t\lambda_i} \to A$

$$N(\lambda) \sim \frac{A\,\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \qquad \lambda \to +\infty$$

Il y a deux façons de montrer ce théorème

- Roe : Montrer l'existence du noyau par le calcul fonctionnel sur les opérateurs auto-adjoints compact.

  $f(K)$ $\quad$ f bornée sur $\mathrm{spec}(K)$

  Comparer le noyau et une approximation qui admet un développement asymptotique

  Construire des approximation à partir de E_t

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + D^2\right)\left(\int_0^t e^{-(t-t')H} s_{t'}\, dt\right) = s_t$$

- BGV Construire explicitement le noyau en montrant la cv des approximations.

Suite du chap II

Opérateurs de Dirac

Rectificatif

Si H est un Laplacien généralisé $\quad Hs = -\sum g^{ij} \frac{\partial^2 s}{\partial x_i \partial x_j} + 1^{\text{st}}$ ordre

alors $[[H, f], f] = -2|df|^2$

1) Représentation des algèbres de Clifford

2) On a vu que si D est un opérateur de Dirac agissant sur les sections d'un fibré vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathcal{E}$ (impaire, différentiel d'ordre 1, de carré Laplacien généralisé) alors

$$(*) \qquad c(df) \cdot s = [D, f]\, s \qquad s \in \Gamma(\mathcal{E})$$

s'étend en une action de l'algèbre de Clifford $\overset{\overset{C(M)}{\parallel}}{C(T^*M)}$ sur $\mathcal{E}$.

Réciproquement, soit $\mathcal{E}$ un <u>module</u> de Clifford (fibré $\mathbb{Z}_2$-gradué muni d'une action de l'algèbre de Clifford $C(M)$ impaire)

La différence de deux opérateurs de Dirac compatibles avec <u>cette</u> action de Clifford est C^∞ linéaire et impaire.

Donc l'ensemble des opérateurs de Dirac compatibles est un espace affine sous $\quad A(M, \mathcal{E}nd^-(\mathcal{E})) = A(M, C(M) \otimes \mathrm{End}^-_{C(M)} \mathcal{E})$

$$= A^\bullet(M, \mathrm{End}^{\bullet}_{C(M)} \mathcal{E})^-$$

où la parité correspond à la parité somme

$$A^{\bullet}(M, \mathrm{End}_{C(M)} \mathcal{E})^- = A^{\text{pair}}(M, \mathrm{End}^-_{C(M)} \mathcal{E}) \oplus A^{\text{impair}}(M, \mathrm{End}^+)$$

1/ Représentations des algèbres de Clifford.

$(V, \langle\ ,\ \rangle)$ $\qquad \dim_{\mathbb{R}} V = 2n$

$C(V) = T(V) / v^2 + \|v\|^2 1$ $\qquad$ de dim 2^{2n} est isomorphe comme espace vectoriel à $\Lambda^\circ V$

$[a, b] = ab - ba$

$[a, b]_s = ab - (-1)^{\deg a \deg b} ba$

<u>Lemme</u> : $C(V) \otimes \mathbb{C}$ a une seule représentation irréductible Δ.

Δ est appelée représentation de Spin et est de dim 2^n.

En particulier $C(V) \otimes \mathbb{C} \simeq \mathrm{End}(\Delta)$

Si E est une représentation complexe de $C(V)_{\mathbb{C}}$ $\qquad E \simeq \Delta \otimes V$

$$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E) \simeq \mathrm{End}\,\Delta \otimes \mathrm{End}\,V \simeq C(V)_{\mathbb{C}} \otimes \mathrm{End}_{C(V)_{\mathbb{C}}}(E)$$

Un $\mathbb{C}$-endomorphisme de V se prolonge en $C(V)_{\mathbb{C}}$-end de E.

Si $\mathcal{E}$ est un module de Clifford sur M, la décomposition

$$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\vec{\mathcal{E}}) = C(V) \otimes \mathrm{End}_{C(V)} \vec{\mathcal{E}}$$

reste vraie (c'est ponctuel) qu'il existe ou pas de fibré S qui donne la représentation de Spin en chaque point.

Soit ∇^{τ} une connexion sur τ, $\mathbb{Z}_2$-faire.

$$D : A(M, \tau) \xrightarrow{\nabla^{\tau}} A(M, T^*M \otimes \tau) \xrightarrow{c} A(M, \tau)$$

opérateur différentiel d'ordre 1, qui calculé dans un repère orthonormé local e_i de TM est de la forme

$$\nabla^{\tau} s = \sum dx_i^* \frac{\partial}{\partial x_i} s + \sum A_i s$$

$$D s = \sum c(dx^i) \frac{\partial s}{\partial x_i} + \sum c(dx^i) A_i s$$

Donc D^2 est un Laplacien généralisé.

$$[D, f] = \left[\sum c(dx^i) \frac{\partial}{\partial x_i}, f\right] = \sum c(dx^i) \frac{\partial f}{\partial x_i} = c(df).$$

Pour obtenir tout l'espace $A^1(M, \mathrm{End}_{C(M)} \tau)^-$ on normalise la valeur des commutateurs $[\nabla_X^{\tau}, c(a)] = c(\nabla_X^{LC} a)$

On dit que ∇^{τ} est une connexion de Clifford.

Pour obtenir tout l'espace $A(M, \mathrm{End}_{C(M)} \tau)^-$ on introduit

- Une super connexion $\mathbb{A}$ sur un $\mathbb{Z}_2$-fibré est un opérateur différentiel impair, d'ordre 1 qui vérifie la relation de Leibniz

$$\mathbb{A}(\alpha \wedge s) = d\alpha \wedge s + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge \mathbb{A} s \qquad \alpha \in A^{\bullet}(M) \quad s \in A^{\bullet}(M, \tau)$$

$\mathbb{A}$ est $A^{\bullet}(M)$-super linéaire.

$$\mathbb{A} : A^{\bullet}(M, \tau) \longrightarrow A^{\bullet}(M, \tau)$$

- Une super-connexion $\mathbb{A}$ sur un module de Clifford est une <u>super connexion de Clifford</u> si

$$\forall a \in C(M) \qquad [\mathbb{A}, c(a)] = c(\nabla^{LC}_a)$$

On a alors

$$D_{\mathbb{A}} : \quad A(M, \mathcal{E}) \xrightarrow{\mathbb{A}} A^\bullet(M, \mathcal{E}) \xrightarrow{\sigma^{-1}} A(M, C(M) \otimes \mathcal{E}) \xrightarrow{c} A(M, \mathcal{E})$$

<u>Prop</u>: Il y a une correspondance entre opérateurs de Dirac compatibles avec la structure de module de Clifford sur $\mathcal{E}$ et superconnexions de Clifford sur $\mathcal{E}$.

3/ <u>Le groupe Spin (V)</u>

Le groupe Pin (V) est le sous groupe multiplicatif de $Cl(V)$ engendré par les vecteurs de norme 1.

Le groupe Spin (V) est le sous groupe des éléments pair de Pin (V).

Pour $v \in V$ de norme 1, $v^{-1} = -v$

$$-v \cdot x v^{-1} = v x v = x - 2\langle x, v\rangle v \quad \text{symétrie par rapport à } v\perp$$

On en déduit $0 \to \underset{\{1,-1\}}{\mathbb{Z}_2} \to \mathrm{Spin}(V) \longrightarrow SO(V) \to 0$

<u>Lemme</u> : L'algèbre de Lie de $Spin(V)$ ~~s'identifie~~

~~...~~ sous-espace vectoriel de $Cl(V)$ engendré par $e_i e_j$ $i \neq j$ s'identifie à l'algèbre de Lie de $SO(V)$

Par cette identification, une matrice antisymétrique de l'algèbre de Lie de $SO(V)$ (a_{ij}) donne

$$\frac{1}{4} \sum a_{ij} \, e_i e_j = \frac{1}{4} \sum \langle A e_i, e_j \rangle \, e_i e_j = \cancel{c(A)}$$

On notera $\underline{c}(A) = \frac{1}{4} \sum a_{ij} \, c(e_i) c(e_j)$

4/ La formule de Lichnerowicz.

On décompose la courbure d'une super connexion de Clifford en partie $C(M)$-linéaire et partie à valeurs dans $C(M)$.

<u>Prop</u> : Soit $\mathbb{A}$ une super connexion de Clifford sur un module de Clifford τ.

Alors $\mathbb{A}^2 = \underline{c}(R^{\mathcal{E}}) + F^{\tau/s}$

où • $R^{\mathcal{E}}$ est l'action de la courbure de Levi-Civita sur T^*M vue dans $C(M)$ par

$$\underline{c}\left(R^{\mathcal{E}}(u,v)\right) = \frac{1}{4} \sum \langle R(u,v) e_i, e_j \rangle \, c(e_i) \, c(e_j)$$

• $F^{\tau/s}$ est dans $A^0(M, \mathrm{End}_{C(M)} \tau)$ (courbure réduite).

<u>Dem</u> : Il suffit de montrer que $\mathbb{A}^2 - R^E$ est $C(M)$-linéaire où même T^*M linéaire.

$$[\mathbb{A}^2, c(a)] = \mathbb{A}^2 \cdot c(a) = [\mathbb{A}, [\mathbb{A}, c(a)]] = [\mathbb{A}, c(\nabla^{LC}_a)] = c((\nabla^{LC})^2_a)$$

$$[R^E, c(a)] = \frac{1}{4} \sum \langle R e^i, e^j \rangle \left(c(e^i) c(e^j) c(a) - c(a) c(e^i) c(e^j) \right)$$

$$= \sum \langle R e^i, e^j \rangle \langle a, e^i \rangle c(e^j)$$

$$= c(Ra)$$

Dans le cas d'une <u>connexion</u> de Clifford, on peut ~~préciser cette formule~~ retrouver préciser le fait que D^2 est un Laplacien généralisé.

<u>Formule de Lichnerowicz</u>

Si $\mathbb{A}$ est une connexion de Clifford sur τ

$$D^2_{\mathbb{A}} = \Delta^{\mathbb{A}} + \sigma^{-1}(F^{E/S}) + \underbrace{\frac{r_M}{4}}_{\text{courbure scalaire de } M}$$

$$r_M = \sum_{ij} \langle R(e_i, e_j) e_i, e_j \rangle$$

<u>Dem</u> : $$D_{\mathbb{A}} = \sum c(dx^i)\, \mathbb{A}_{\frac{\partial}{\partial x_i}}$$

$$D_{\mathbb{A}}^2 = \frac{1}{2}\left[D_{\mathbb{A}}, D_{\mathbb{A}}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum c(dx^i)\, c(dx^j) \left[\mathbb{A}_i, \mathbb{A}_j\right]$$

$$+ \frac{1}{2} \sum \left[c(dx^i), c(dx^j)\right] \mathbb{A}_i \mathbb{A}_j$$

$$+ \sum c(dx^i) \left[\mathbb{A}_i, c(dx^j)\right] \mathbb{A}_j$$

$$\left[c(dx^i), c(dx^j)\right]\mathbb{A}_i\mathbb{A}_j = -2\, g^{ij}\, \mathbb{A}_i \mathbb{A}_j$$

$$c(dx^i)\left[\mathbb{A}_i, c(dx^j)\right]\mathbb{A}_j = c(dx^i)\; c(\nabla_i dx^j)\, \mathbb{A}_j$$

$$= -c(dx^i)\; \Gamma_{ik}^{j}\, c(dx^k)\, \mathbb{A}_j$$

$$\sum_{ij} \quad = -\frac{1}{2}\, \Gamma_{ik}^{j} \left(c(dx^i)\, c(dx^k) + c(dx^k)\, c(dx^i)\right) \mathbb{A}_i$$

$$= -\, g^{ik}\, \Gamma_{ik}^{j}\, \mathbb{A}_j$$

$$\sum_{i<j} c_i c_j \left[\mathbb{A}_i, \mathbb{A}_j\right] = \sum_{i<j} c(dx^i)\, c(dx^j)\; \mathbb{A}^2\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

$$= \sum_{i<j} c(dx^i)\, c(dx^j)\, \underline{c}\left(R^{\mathcal{E}}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right) + \sum_{i<j} c(dx^i)\, c(dx^j)\; \underbrace{F^{\mathcal{E}/S}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)}_{\text{anti-sym sur } TM \text{ à valeur } \mathrm{End}\,\mathcal{E}}$$

$$= \frac{1}{8} \sum \langle R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) dx^k, dx^l \rangle \; c(dx^i)\, c(dx^j)\, c(dx^k)\, c(dx^l) \quad + \sigma^{-1}(F^{\mathcal{E}/S})$$

$$= \frac{r_M}{4} + \sigma^{-1}(F^{\mathcal{E}/S})$$

Construction d'opérateurs de Dirac.

1/ La représentation régulière de $C(M)$ sur elle-même donne une structure de module de Clifford sur ΛT^*M par

$$\begin{array}{lll} \Lambda T^*M & dx_k \cdot dx_1 \wedge dx_2 & = dx_k \wedge dx_1 \wedge dx_2 - i\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) dx_1 \wedge dx_2 \\ & \downarrow \sigma^{-1} & \uparrow \sigma \\ C(M) & dx_k \cdot dx_1 \cdot dx_2 = & -dx_2 \quad \text{si } k=1 \\ & & dx_1 \quad \text{si } k=2 \\ & & dx_k \wedge dx_1 \wedge dx_2 \quad \text{sinon} \end{array}$$

- $\left[\nabla^{LC}_X, c(a)\right] = c\left(\nabla^{LC}_X a\right)$ La connexion de LC est compatible.

- $D = c\,\nabla^{LC} = c \sum dx_i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}$

$= c \sum dx_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ dans un repère normal

$= d + d^*$

2/ Représentation de Spin

(TM, J) structure presque complexe

$T^*M \otimes \mathbb{C} = \underbrace{T^{*1,0}}_{\text{isotrope}} \oplus \underbrace{T^{*0,1}}$ pour une forme hermitienne $\sum dz_i \otimes d\bar{z}_i$

$dz_i \cdot u = \sqrt{2}\, dz_i \wedge u$

$d\bar{z}_i \cdot u = \sqrt{2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \lrcorner\, u$

Si la variété est kählérienne, alors la connexion de Chern sur le fibré vectoriel holomorphe hermitien $(T^{1,0}, h)$ s'identifie à la connexion de Levi-Civita sur $(T_{\mathbb{R}}M, re(h))$.
(Ces deux connexions sont ~~définies~~ calculées à l'aide des dérivées premières de la métrique.)

Dans ce cas, l'opérateur de Dirac associé est $\bar{\partial} + \bar{\partial}^*$.

$$g \frac{\partial}{\partial x_i} (fs) = g \frac{\partial f}{\partial x_i} s + g f \frac{\partial s}{\partial x_i}$$

$$g f \frac{\partial}{\partial x_i} s$$

$$\left[g \frac{\partial}{\partial x_i}, f \right] s = g \frac{\partial f}{\partial x_i} s$$ e^{∞} linéaire en s

$$\left[\left[g \frac{\partial}{\partial x_i}, f \right], f \right] s = 0 .$$

$$g \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (fs) = g f \frac{\partial^2 s}{\partial x_i \partial x_j} = g \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial s}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial s}{\partial x_i} \right) + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}}_{e^{\infty}} s$$

$$\left[\left[g \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, f \right] f \right] = g \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

Formule de l'indice pour les opérateurs de Dirac asymétriques

I) Analyse de l'opérateur de la chaleur, définition de l'indice

II) La formule de Mc Kean - Singer

III) Propriétés de continuité

IV) Densité d'indice.

I) Analyse de l'opérateur de la chaleur

Soit H un opérateur Laplacien généralisé agissant sur l'espace des sections C^∞ $A(M,\tau)$ d'un fibré vectoriel τ sur une variété riemannienne (M,g) compacte

- H est vu comme un opérateur linéaire non borné sur $\Gamma_{L^2}(M,\tau)$ à domaine dense $A(M,\tau)$.
- On définit l'adjoint H^* de H par

$$\mathrm{Dom}\, H^* = \{ s \in \Gamma_{L^2}(M,\tau) \ / \ \exists C \ / \ |\langle s, H\sigma\rangle| \leq C\|\sigma\| \quad \forall \sigma \in \mathrm{Dom}\, H \}$$

Pour $s \in \mathrm{Dom}\, H^*$ $\quad H^* s$ l'unique élément de $\Gamma_{L^2}(M,\tau)$ / $\forall \sigma \in \mathrm{Dom}\, H \quad \langle s, H\sigma\rangle = \langle H^* s, \sigma\rangle$

En particulier $A(M,\tau) \subset \mathrm{Dom}\, H^*$.

- On en déduit que avec $G_H = \{ (s, Hs) \quad s \in \mathrm{Dom}\, H \}$

$\overline{G_H}$ est le graphe d'un opérateur $\overline{H}$. On peut vérifier $\overline{H} = (H^*)^*$

- On définit l'adjoint formel H^{*f} de H par

$\mathrm{Dom}\, H^{*f} = A(M,\tau)$

$$\langle s, H\sigma\rangle = \langle H^* s, \sigma\rangle \qquad \forall s, \sigma \in A(M,\tau)$$

- On vérifie que $\mathrm{Dom}\ \overline{H^{*f}} \subset \mathrm{Dom}\ H^*$
- Soit maintenant P_t^* l'opérateur $e^{-tH^{*f}}$ associé au noyau $p_t(x,y,H^{*f})$

Grâce au développement asymptotique de p_t on montre

que $\forall s \in \Gamma_{L^2}(M,\tau)$ $\quad P_t^* s \xrightarrow{L^2} s$ $\quad$ quand $t \to 0$

- Soit $s \in \mathrm{Dom}\ H^*$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ A(M,\tau)}}{s_n} := P^*_{1/n}\, s \longrightarrow s$$

$$H_f^* s_n = H^* s_n = P^*_{1/n}\, H^* s_n \longrightarrow H^* s$$

Donc $\mathrm{Dom}\ H^* \subset \mathrm{Dom}\ \overline{H^{*f}}$

- On conclut que $\overline{H^{*f}} = H^*$

Si maintenant H est symétrique (i.e. $\forall s, \sigma \in A(M,\tau)$ $\langle Hs, \sigma\rangle = \langle s, H\sigma\rangle$)

$H^{*f} = H$

$$\overline{H} = H^* = (H^*)^*$$

Donc H^* est auto-adjoint.

On notera désormais H pour H^*.

On peut alors utiliser la théorie spectrale pour H elliptique, auto-adjoint

$$\Gamma_{L^2}(M,\tau) = \overline{\bigoplus E_{\lambda_i}(H)}$$

Comme e^{-tH} est régularisant donc à trace, $\sum e^{-t\lambda_i}$ est convergente.

On retrouve que les λ_i sont de multiplicité finie et $\lambda_i \to +\infty$.

Comme les fonctions propres de H sont aussi propres pour e^{-tH}, elles sont $\mathcal{C}^\infty$.

II) Définition de l'indice

Soit D un opérateur de Dirac symétrique.

$$\operatorname{Ker} D^2 = \operatorname{Ker} D^2 \cap A(M,\tau) = \operatorname{Ker} D \qquad \langle D^2 s, s\rangle = \langle Ds, Ds\rangle .$$

On appelle espace d'indice, le $\mathbb{Z}_2$ espace $\operatorname{Ker} D = \operatorname{Ker} D^+ \oplus \operatorname{Ker} D^-$

On appelle indice de D $\dim \operatorname{Ker} D^+ - \dim \operatorname{Ker} D^-$.

$H = D^2$ est un Laplacien généralisé

On définit un opérateur G borné sur $\Gamma_{L^2}(M,\tau)$ par

$$G = \int_0^{+\infty} t\, e^{-tH} \frac{dt}{t} \qquad \frac{1}{\lambda} = \int_0^{+\infty} t\, e^{-t\lambda} \frac{dt}{t}$$

On vérifie que G inverse H sur $(\operatorname{Ker} H)^\perp$.

$$s = HGs + P_0 s$$

Donc $\Gamma_{L^2}(M,\tau^*) = \operatorname{Im} D^+ \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Ker} D^-$ $\qquad \dim \operatorname{Ker} D^- = \dim \operatorname{coker} D^+$.

$$\operatorname{Ind}(D) = \operatorname{Ind}(D^+).$$

III) La formule de Mc Kean - Singer

<u>Théorème</u> : $\operatorname{Ind}(D) = \operatorname{Str} e^{-tD^2} = \int_M \operatorname{Str} k_t(x,x)\, dV_g$

trace des opérateurs à noyaux

<u>Dem</u> : Par théorie spectrale

$$\operatorname{Str} e^{-tD^2} = \sum_i e^{-\lambda_i}\left(n^+_{\lambda_i} - n^-_{\lambda_i}\right) \qquad n^+_{\lambda_i} = E_{\lambda_i}(H^+)$$

Or pour $\lambda_i \neq 0$ $\quad D^+ : E_{\lambda_i}(H^+) \longrightarrow E_{\lambda_i}(H^-)$ isomorphisme.

IV) Propriété de continuité de l'indice.

- Si D_u est une famille différentiable d'opérateur de Dirac, la construction du noyau de la chaleur, et son asymptotique montrent que $u \longmapsto \mathrm{Ind}(D_u)$ est continue, donc constante puisque qu'à valeurs entières.

On peut aussi vérifier

$$\frac{\partial}{\partial u} e^{-tH_u} = -\int_{s=0}^{t} e^{-(t-s)H_u} \frac{\partial H_u}{\partial u} e^{-sH_u} \, ds$$

$$\frac{\partial}{\partial u} p_t(x,y,u) = -\int_0^t \int_{y_1 \in M} p_{t-s}(x,y_1,u) \left(\frac{\partial H_u}{\partial u}\right)_{y_1} p_s(y_1,y,u) \, dV(y_1) \, ds$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \mathrm{Str}\left(p_t(x,x,u)\right) = -\int_0^t \mathrm{Str}\left(\frac{\partial H_u}{\partial u} p_t(x,x,u)\right)$$

$$= -t \, \mathrm{Str}\left(\left[\frac{\partial D_u}{\partial u}, D_u p_t(x,x,u)\right]\right) = 0.$$

- Puisque l'ensemble des ~~supercommutations~~ opérateurs de Dirac compatibles avec une structure fixée de module de Clifford sur $\mathbb{Z}$ est un espace affine l'indice d'un opérateur de Dirac est un invariant de la structure de module de Clifford.

IV) Densité de l'indice

<u>Le résultat</u> : Si D est un opérateur de Dirac associé à une connexion ∇^{τ} de Clifford, alors $H = D^2$ a un noyau de la chaleur avec une asymptotique de la forme

$$k_t(x,x) \sim \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \sum_{i=0}^{+\infty} t^i \, k_i(x)$$

$$k_i(x) \in A(M, \mathrm{End}\,\tau) = A(M, C(M) \otimes \mathrm{End}_{C(M)} \tau)$$

(i) k_i est une section de $C_{2i}(M) \otimes \mathrm{End}_{C(M)} \tau$

écriture avec moins de $2i$ vecteurs de base

(ii) $$\sigma(k) := \sum_{i=0}^{n/2} \sigma_{2i}(k_i) \in A^{\bullet}(M, \mathrm{End}_{C(M)} \tau)$$

$$= \det{}^{1/2}\left(\frac{R^{LC}/2}{\sinh R^{LC}/2} \right) \exp\left(-F^{\tau/s}\right)$$

partie $C(M)$-linéaire de la courbure de ∇^{τ}

<u>Remarque</u> : Comme on utilise la formule de Lichnerowicz, il faut supposer que D est associé à une connexion.

Via la formule de Mc Kean - Singer, on va en déduire une formule pour l'indice de D.

Précisément,

<u>Lemme</u> : Dans la filtration précédente de l'algèbre de Clifford

$C_{m-1}(V) = [C(V), C(V)]$

Donc, toute supertrace est proportionnelle à $I \circ \sigma$

$$I : \Lambda^* V \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$e_1 \wedge \dots \wedge e_m \longmapsto 1 .$$

$$\mathrm{Str}\ k_t(x,x) \sim \frac{1}{(4\pi t)^{m/2}} \sum_{\substack{i=0 \\ 2i \geq m}}^{+\infty} t^i\ \mathrm{Str}\left(k_i(x,x)\right)$$

a pour limite quand t tend vers 0

$$\longrightarrow \frac{1}{(4\pi)^{m/2}}\ \mathrm{Str}\ k_{m/2}(x,x)$$

On peut vérifier que pour $a \otimes b \in C(M) \otimes \mathrm{End}_{C(M)}\, b$

$$\mathrm{Str}\,(a \otimes b) = I(\sigma(a))\ \mathrm{Str}_{C(M)}\, b \qquad \text{trace comme } C(M)\text{-linéarité}$$
$$= I(\sigma(a))\ \mathrm{Str}_{\mathcal{E}/S}\, b$$

Par la formule de Mc Kean - Singer

$$\mathrm{Ind}(D) = \int_M \mathrm{Str}\left(k_t(x,x)\right) dV_g$$

$$= \int_M \mathrm{Str}_{\mathcal{E}/S}\left(\sigma\left(k_{m/2}(x;x)\right)\right) \qquad \mathrm{Str}_{\mathcal{E}/S} \text{ rendu } A(M) \text{ linéaire}$$

$$= \int_M \mathrm{Str}_{\mathcal{E}/S}\ \sigma(k) \qquad \text{les termes ajoutés sont d'intégrale nulle.}$$

$$= \int_M \det{}^{1/2}\left(\frac{R/2}{\sinh R/2}\right) \mathrm{Str}_{\mathcal{E}/S} \exp\left(-F^{\mathcal{E}/S}\right) \frac{1}{(2\pi)^{m/2}}$$

Cas particulier

Avec $D = d + d^*$ sur $\mathcal{E} = \Lambda T^*M$

on trouve $\mathrm{Ind}(D) = \sum (-1)^i h_i(M) = \chi(M)$

$$= \int_M \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \mathrm{Pf}(-R)$$

$R \in A^2(M, so(TM))$ $\qquad \mathrm{Pf}\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} = \theta$

$A \in so(V)$ $\qquad \mathrm{Pf}(A) = I\left(\exp_{\Lambda^\cdot V}\left(\sum_{i<j} \langle Ae_i, e_j\rangle e_i \wedge e_j\right)\right)$

partie de degré maximal.

Avec $D = (\bar{D}'' + \bar{D}''^*)\sqrt{2}$ sur $\Lambda(T^{0,1}X^*) \otimes \mathcal{F}$ sur X kählérienne

est l'opérateur de Dirac associé à la connexion de LC $\qquad \mathcal{F}$ fibré vect. hol sur X

On trouve

$$\chi(\mathcal{F}) = \frac{1}{(2i\pi)^{m/2}} \int_X \mathrm{Td}(TX)\, \mathrm{Ch}(\mathcal{F})$$

représente le caractère de Chern de $\mathcal{F}$.

Si X n'est pas kählérienne, $(D'' + D''^*)\sqrt{2}$ est un opérateur de Dirac ainsi que l'opérateur de Dirac associé à la connexion de LC. Comme ils sont tous les deux compatibles avec la structure de module de Clifford alors, il on le même indice $\chi(\mathcal{F}) = \frac{1}{(2i\pi)^{m/2}} \int_X \mathrm{Td}(TX)\, \mathrm{Ch}(\mathcal{F})$.

Indications pour la démonstration :

L'existence de l'asymptotique pour le noyau de la chaleur permet de montrer que pour un bon choix de repère sur M et τ, après changement d'échelle

$$\delta_u \; a(t, x) = \sum u^{-i/2} \, a(ut, u^{1/2} x)_{[i]}$$

le ~~noyo~~ les parties $(p_i)_j$ $j > 2i$ vérifie l'équation de l'oscillateur harmonique avec conditions initales nulles

$$-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{r^2}{16} x^2 + f$$

En utilisant la formule de Lichnerowicz pour D^2.

Les parties $(p_i)_{2i}$ vérifie l'équation de l'oscillateur harmonique avec condition initiale Id.

$$p_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} \left(\frac{t r/2}{\sinh t r/2} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{tr}{2} \coth\left(\frac{tr}{2}\right) \frac{x^2}{4t} - tf \right)$$

vérifie

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{r^2 x^2}{16} + f \right) p_t(x) = 0 .$$