Exercice 74 1) Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_7 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_7 f_7 = 0.$$

Montrons que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_7 = 0$.
Les fonctions $f_1, f_2, f_3, f_5, f_6, f_7$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Ainsi, la fonction $\lambda_4 f_4$ est par hypothèse une combinaison linéaire de fonction dérivables, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Comme f_4 n'est pas dérivable en 0 on obtient $\lambda_4 = 0$.
Les fonctions f_1, f_2, f_6, f_7 sont bornées et f_5 tend vers 0 en $+\infty$. Donc si $\lambda_3 \neq 0$ on a $\lim_{x\to+\infty} \lambda_1 f_1(x) + \cdots + \lambda_7 f_7(x) \neq 0$. On obtient $\lambda_3 = 0$. De même, on obtient $\lambda_5 = 0$ en étudiant le comportement en $-\infty$. On a maintenant

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_6 f_6 + \lambda_7 f_7 = 0.$$

Les fonctions f_1 et f_2 sont impaires et les fonction f_6 et f_7 sont paires. Donc $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = -\lambda_6 f_6 - \lambda_7 f_7$ est en même temps paire et impaire, d'où$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = -\lambda_6 f_6 - \lambda_7 f_7 = 0$. En évaluant $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ en $\pi/2$ on obtient $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. De même, en évaluant $\lambda_6 f_6 + \lambda_7 f_7$ en $\pi/2$ on obtient $\lambda_6 = \lambda_7 = 0$.

2) Le système $(f_1, \cdots, f_7)$ est un système générateur de F (par définition de F), c'est un système libre par la question 1, c'est donc une base de F.

Exercice 75 1) Par récurrence, montrons que

$$\lambda_1 s_1 + \cdots + \lambda_n s_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Si $n = 1$ c'est clair. Supposons que ce soit vrai pour un certain n et montrons que c'est vrai pour $n + 1$. Si

$$\lambda_1 s_1 + \cdots + \lambda_{n+1} s_{n+1} = 0 \tag{1}$$

alors en dérivant deux fois,

$$-\lambda_1 s_1 + \cdots - (n+1)^2 \lambda_{n+1} s_{n+1} = \lambda_1 s_1'' + \cdots + \lambda_{n+1} s_{n+1}'' = 0. \tag{2}$$

On obtient donc, en calculant $(n + 1)^2 \cdot (1) + (2)$:

$$((n+1)^2 - 1)\lambda_1 s_1 + \cdots + ((n+1)^2 - n^2)\lambda_n s_n = 0.$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence on trouve $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. On en déduit immédiatement que $\lambda_{n+1} = 0$.

2) Prenons $\lambda_0, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_0 c_0 + \cdots + \lambda_n c_n = 0. \tag{3}$$

En dérivant on obtient,

$$\lambda_1 s_1 + \cdots + n\lambda_n s_n = 0. \tag{4}$$

On en déduit par la question précédente que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, et avec l'équation (3) on obtient aussi $\lambda_0 = 0$.

3) Prenons $\lambda_0, \cdots, \lambda_n, \mu_1 \cdots \mu_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_0 c_0 + \cdots + \lambda_n c_n + \mu_1 s_1 + \cdots + \mu_n s_n = 0. \tag{5}$$

De manière équivalente,

$$\lambda_0 c_0 + \cdots + \lambda_n c_n = -\mu_1 s_1 - \cdots - \mu_n s_n. \tag{6}$$

On voit donc que les deux membre de l'équation (6) sont à la fois pairs et impairs, donc sont nuls. On applique donc les résultats des deux questions précédentes pour en déduire que $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = \mu_1 = \cdots = \mu_n = 0$. Donc la famille en question est libre.

Exercice 76 Indication : on utilise le fait que f_a est dérivable en dehors de a mais n'est pas dérivable en a.

Exercice 86 1) On écrit $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$. On a ainsi

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n) \\ &= \lambda_1 f(e_1) + \cdots + \lambda_n f(e_n) \\ &= \lambda_1(e_1 + v) + \cdots + \lambda_n(e_n + v) \\ &= x + (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)v \end{aligned}$$

Maintenant, supposons $x \in \ker(f)$ et montrons que $x \in Vect(v)$. On a $f(x) = 0$, de manière équivalente, $x = -(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)v$ et donc $x \in Vect(v)$. Donc $\ker f \subseteq Vect(v)$. Or $f(v) \neq 0$, donc $\ker(f) \subsetneq Vect(v)$. Comme $\dim(Vect(v)) = 1$, on en déduit que $\dim(\ker f) = 0$ et donc $\ker f = 0$.

2) Par un argument de dimension il suffit de montrer que f est injective, mais ceci est clair puisque $\ker f = 0$.

Exercice 90 1) On a

$$A = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

2) Soient u_1, u_2, u_3 les vecteurs colonnes de la matrice A; on a $u_3 = u_1 + \frac{3}{2}u_2$ et on voit facilement que u_1 et u_2 sont linéairement indépendants; il en résulte que (u_1, u_2) est une base de Imf. Imf est donc un plan vectoriel caractérisé

par l'équation $x + z = 0$.

3) L'application $f - tId$ est un isomorphisme ssi la matrice $A - tI_3$ est inversible. C'est le cas pour $t \neq 0, 3$. On pourra par exemple réduire la matrice. On remarque ce faisant que le rang de $f - 3Id$ vaut 2, comme celui de f.

4) Les deux noyaux considérés sont des droites (thm du rang), il suffit donc d'exhiber un vecteur non nul de chacun d'eux. On peut ainsi prendre $v_1 = (1, 0, -1)$ et $v_2 = (2, 3, -2)$. Il est clair que ces deux vecteurs sont indépendants. En prenant $v_3 = (1, 0, 0)$, la famille (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice de f dans cette base s'écrit alors:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 96

1. Montrons tout d'abord que u est bien une application de $\mathbb{R}_{\leq 4}[X]$ dans $\mathbb{R}_{\leq 4}[X]$. Soit $P \in \mathbb{R}_{\leq 4}[X]$, alors $u(P)(X) = X^2P''(X) - 3XP'(X)$ et $degu(P) = max(degX^2P''(X), deg - 3XP'(X))$. Or $degX^2P''(X) = degX^2 + degP''(X) = 2 + (degP - 2) = degp \leq 4$ et $deg - 3XP'(X) = degXP'(X) = degX + degP'(X) = 1 + degP - 1 = degP \leq 4$. Ainsi, au final $degu(P) = max(degX^2P''(X), deg - 3XP'(X)) \leq 4$.

   Montrons ensuite que $u : \mathbb{R}_{\leq 4}[X] \to \mathbb{R}_{\leq 4}[X]$ est une application linéaire. Soient donc $P, Q \in \mathbb{R}_{\leq 4}[X]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned} u(\lambda P + \mu Q)(X) &= X^2(\lambda P + \mu Q)''(X) - 3X(\lambda P + \mu Q)'(X) \\ &= X^2(\lambda P''(X) + \mu Q''(X)) - 3X(\lambda P'(X) + \mu Q'(X)) \\ &= \lambda(X^2P''(X) - 3XP'(X)) + \mu(X^2Q''(X) - 3XQ'(X)) \\ &= \lambda u(P)(X) + \mu u(Q)(X) \end{aligned}$$

   (la dérivation est linéaire).

   On note $\mathcal{B}$ la base canonique $(1, X, X^2, X^3, X^4)$ de $\mathbb{R}_{\leq 4}[X]$.
   $u(1)(X) = X^2.0 - 3X.0 = 0$
   $u(X)(X) = X^2.0 - 3X.1 = -3X$
   $u(X^2)(X) = X^2.2 - 3X.(2X) = -4X^2$
   $u(X^3)(X) = X^2.(6X) - 3X.(3X^2) = -3X^3$
   $u(X^4)(X) = X^2.(12X^2) - 3X.(4X^3) = 0$.
   Ainsi, la matrice de u dans la base $\mathcal{C}$ est

$$[u]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Pour déterminer le noyau et l'image de u, on peut utiliser la matrice précédente : les coordonnées d'un polynôme $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_{\leq 4}[X]$ sont

$$[P]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

Ainsi, les éléments du noyau de u sont les polynômes P dont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ vérifient

$$[u]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}[P]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = 0$$

i.e. $a_2 = a_3 = a_4 = 0$, et donc

$$ker\ u = \{\alpha_0 + \alpha_4X^4,\ \alpha_0, \alpha_4 \in \mathbb{R}\}.$$

En utilisant ces représentations matricielles, on obtient également que l'image de u est l'ensemble des polynômes du type $-3a_1X - 4a_2X^2 - 3X^3$ avec $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, i.e.

$$im\ u = \{\alpha_1X + \alpha_2X^2 + \alpha_3X^3,\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\}.$$

On obtient de cette façon que $(1, X^4)$ est une base de $ker\ u$ et et que (X, X^2, X^3) une base de $im\ u$. $ker\ u$ est donc de dimension 2 et $im\ u$ de dimension 3.

3. L'équation $u(P) = 1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}_{\leq 4}[X]$ car 1 n'est pas dans l'image de u.

   En s'appuyant sur les représentations matricielles, on obtient que $-\frac{1}{3}X^3$ est une solution de l'équation $u(P) = X^3$ ($u(-\frac{1}{3}X^3) = X^3$).

   Si P_1 et P_2 sont deux solutions de cette équation $P_1 - P_2$ est dans le noyau de $u$car u est linéaire :

$$u(P_1 - P_2) = u(P_1) - u(P_2) = X^3 - X^3 = 0.$$

   Ainsi, si P est une solution dans $\mathbb{R}_{\leq 4}[X]$ de l'équation $u(P) = X^3$, $P - (-\frac{1}{3}X^3)$ est dans le noyau de u donc $P = -\frac{1}{3}X^3 + Q$ où $Q \in ker\ u$.

Réciproquement, si P est de la forme $P = -\frac{1}{3}X^3 + Q$ avec $Q \in ker\ u$, $u(P) = X^3$, donc l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}_{\leq 4}[X]$ de l'équation $u(P) = X^3$ est l'ensemble

$$\left\{-\frac{1}{3}X^3 + Q,\ Q \in ker\ u\right\}.$$

Exercice 97 1) Il suffit de montrer que le système (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre (puisque par définition il est générateur!). Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0. \tag{7}$$

Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. En évaluant (7) en $x = 0$ on obtient $\lambda_4 = 0$. De même en évaluant (7) en $x = \pi/2$ on obtient $\lambda_1 = 0$. On peut donc réécrire (7) sous la forme

$$\sin(x)\cos(x)(\lambda_2 \sin(x) + \lambda_3 \cos(x)) = 0. \tag{8}$$

En évaluant (8) en $x = \pi/6$ on obtient $\frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{1}{2}\lambda_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_3) = 0$. Et en évaluant (8) en $x = \pi/3$ on obtient $\frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_3) = 0$. On en déduit immédiatement que $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

2) On calcule les dérivées:

$$\begin{aligned} f_1' &= 3f_2 \\ f_2' &= 2f_3 - f_1 \\ f_3' &= f_4 - 2f_2 \\ f_4' &= -3f_3 \end{aligned}$$

On voit donc que $f_1', f_2', f_3', f_4' \in E$, et donc puisque la dérivation est linéaire on en déduit que D est un endomorphisme. Notons $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$. Avec les calculs plus haut on a

$$M = [D]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) Il s'agit de montrer que D est un isomorphisme, ce qui ici se résume à montrer que $rang(M) = \dim(E) = 4$. Il suffit d'échelonner M et c'est immédiat.

4) En utilisant les formules d'additions on trouve:

$$\cos(3x) = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x$$
$$\sin(3x) = 3\sin x \cos^2 x - \sin^3 x.$$

Et on a aussi

$$\cos x = (\cos^2 x + \sin^2 x)\cos x = \cos^3 x + \sin^2 x \cos x$$
$$\sin x = (\cos^2 x + \sin^2 x)\sin x = \sin^3 x + \cos^2 x \sin x.$$

On en déduit donc,

$$\begin{array}{rcl} g_1 & = & f_1 + f_3 \\ g_2 & = & f_2 + f_4 \\ g_3 & = & -f_1 + 3f_3 \\ g_4 & = & -3f_2 + f_4. \end{array}$$

Un petit calcul nous donne alors

$$\begin{array}{rcl} f_1 & = & \frac{1}{4}(3g_1 - g_3) \\ f_2 & = & \frac{1}{4}(g_2 - g_4) \\ f_3 & = & \frac{1}{4}(g_1 + g_3) \\ f_4 & = & \frac{1}{4}(3g_2 + g_4). \end{array}$$

On en déduit que $Vect(g_1, g_2, g_3, g_4) = Vect(f_1, f_2, f_3, f_4)$ donc (g_1, g_2, g_3, g_4) engendre E. Comme c'est un système de 4 éléments qui engendre un espace de dimension 4 on peut en déduire que $\mathcal{C} := (g_1, g_2, g_3, g_4)$ est en fait une base de E.

5) On dérive les g_i pour trouver:

$$N = [D]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 98 1) La linéarité de ψ se vérifie aisément. De même il est aisé de vérifier que

$$\psi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+b & d-a \\ d-a & -b-c \end{pmatrix}.$$

Ainsi la matrice

$$\begin{pmatrix} c+b & d-a \\ d-a & -b-c \end{pmatrix}$$

est dans le noyau de ψ ssi $c = -b$ et $a = d$. Une base de $Ker\ \psi$ est donc

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

De même une base de $Im\ \psi$ est donnée par

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

2) Soient

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

les vecteurs de la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$. Grâce à la question précédente, la matrice de ψ dans cette base s'écrit

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) Il est clair que les deux premiers vecteurs de la base recherchée doivent appartenir au noyau de ψ, on peut donc prendre

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Appliquant ψ aux vecteurs de base de l'image de ψ obtenus plus haut on obtient

$$\psi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Il est facile de vérifier que la famille

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$$

est une base de $M_2(\mathbb{R})$. La matrice de ψ dans cette base est L.

Exercice 105

1. Montrons tout d'abord que $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0\}$. Soit donc $f \in \mathcal{P} \cap \mathcal{I}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$ (f est paire) et $f(-x) = -f(x)$ (f est impaire). Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{f(-x)-f(-x)}{2} = 0$, et la fonction f est donc la fonction identiquement nulle sur $\mathbb{R}$. Donc $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0\}$.

Montrons ensuite que $\mathcal{E} = \mathcal{P} + \mathcal{I}$. Soit donc $f \in \mathcal{E}$. Alors pour tout x de $\mathcal{R}$, on a $f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$. Ainsi, si pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $f_1(x) := \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $f_2(x) := \frac{f(x)-f(-x)}{2}$, on a $f = f_1 + f_2$, avec $f_1 \in \mathcal{P}$ et $f_2 \in \mathcal{I}$. Donc $\mathcal{E} = \mathcal{P} + \mathcal{I}$.

Au total, on a $\mathcal{E} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

2. Toute fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ peut s'écrire de façon unique comme une somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire (également deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$). Ainsi, résoudre l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) - f(-x) = x + x^2 + ch(x)$$

revient à chercher tous les couples (f_1, f_2) avec $f_1 \in \mathcal{P}$ et $f_2 \in \mathcal{I}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1''(x) + f_2''(x) - f_1(-x) - f_2(-x) = x + x^2 + ch(x)$$

i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1''(x) - f_1(x) - x^2 - ch(x) = -f_2''(x) - f_2(x) + x.$$

Mais le membre de gauche de cette équation est l'évaluation en x d'une somme de fonction paire (la dérivé seconde d'une fonction paire est paire) donc d'une fonction paire (la somme de fonction paire est paire), et le membre de droite de cette équation est l'évaluation en x d'une somme de fonction impaire (la dérivé seconde d'une fonction impaire est impaire) donc d'une fonction impaire (la somme de fonction impaire est impaire). Or $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0\}$, donc résoudre cette dernière équation revient à résoudre les deux équations différentielles suivantes

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1''(x) - f_1(x) = x^2 + ch(x) \quad \text{et } f_1 \text{ est paire}$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_2''(x) + f_2(x) = x \quad \text{et } f_2 \text{ est impaire.}$$

La première a pour ensemble de solutions

$$E_1 = \left\{ A\ cos(x) + x^2 - 2 + \frac{ch(x)}{2}, A \in \mathbb{R} \right\}$$

La seconde a pour ensemble de solutions

$$E_2 = \left\{ C_1 e^x - C_1 e^{-x} - x,\ C_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Au total, l'ensemble des solutions de l'équation

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) - f(-x) = x + x^2 + ch(x)$$

est

$$E = \left\{ A\ cos(x) + C_1 e^x - C_1 e^{-x} - 2 - x + x^2 + \frac{ch(x)}{2},\ A, C_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

(toute solution de l'équation est la somme d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2).

Exercice 106 Montrons que $SM_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$. Soient donc $M, N \in SM_n(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $\lambda M + \mu N \in SM_n(\mathbb{R})$:

$$^t(\lambda M + \mu N) = \lambda^t M + \mu^t N = \lambda M + \mu N.$$

Donc $SM_n(\mathbb{R})$ est bien un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.

Montrons que $AM_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$. Soient donc $M, N \in AM_n(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $\lambda M + \mu N \in AM_n(\mathbb{R})$:

$$^t(\lambda M + \mu N) = \lambda^t M + \mu^t N = \lambda(-M) + \mu(-N) = -(\lambda M + \mu N).$$

Donc $AM_n(\mathbb{R})$ est bien un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.

Montrons à présent que $M_n(\mathbb{R}) = SM_n(\mathbb{R}) \oplus AM_n(\mathbb{R})$.

On a $SM_n(\mathbb{R}) \cap AM_n(\mathbb{R}) = \{0\}$: soit $M \in SM_n(\mathbb{R}) \cap AM_n(\mathbb{R})$ alors ${}^tM = M$ (M est symétrique) et ${}^tM = -M$ (M est anti-symétrique) donc $M = \frac{1}{2}({}^tM -^t M) = 0$.

On a ensuite $M_n(\mathbb{R}) = SM_n(\mathbb{R}) + AM_n(\mathbb{R})$: soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ alors $M = \frac{1}{2}(M +^t M) + \frac{1}{2}(M -^t M)$ et $\frac{1}{2}(M +^t M) \in SM_n(\mathbb{R})$, $\frac{1}{2}(M -^t M) \in AM_n(\mathbb{R})$.

Ainsi, au total, $M_n(\mathbb{R}) = SM_n(\mathbb{R}) \oplus AM_n(\mathbb{R})$.

Exercice 111 Soit n impair. Supposons par l'absurde qu'il existe $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I = 0$. Alors $A^2 = -I$ donc

$$(det(A))^2 = det(A^2) = det(-I) = (-1)^n = -1 < 0$$

(n est impair), ce qui est impossible dans $\mathbb{R}$. Donc il n'existe pas de $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I = 0$. Alors $A^2 = -I$.

Soit n impair. Supposons par l'absurde qu'il existe $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - \sqrt{2} + I = 0$. $A^2 - \sqrt{2} + I = (A - \frac{\sqrt{2}}{2}I)^2 + \frac{1}{2}I$ donc $(A - \frac{\sqrt{2}}{2}I)^2 = -\frac{1}{2}I$ et ainsi

$$(det(A - \frac{\sqrt{2}}{2}I))^2 = det((A - \frac{\sqrt{2}}{2}I)^2) = det(-\frac{1}{2}I) = -\frac{1}{2^n} < 0,$$

ce qui est impossible dans $\mathbb{R}$.

Exercice 112 Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ alors

$$det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} ... a_{n\sigma(n)}.$$

Ainsi,

$$det(\overline{A}) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \overline{a_{1\sigma(1)}} ... \overline{a_{n\sigma(n)}} = \overline{\sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} ... a_{n\sigma(n)}} = \overline{det(A)}$$

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ tels que $AB = BA$. On a $A^2 + B^2 = (A + iB)(A - iB)$ (car $AB = BA$), et $A - iB = \overline{A + iB}$ (car $A, B \in \mathbb{R}$). Ainsi :

$$\begin{aligned} det(A^2 + B^2) &= det((A + iB)(\overline{A + iB})) = det(A + iB)\ det(\overline{A + iB}) \\ &= det(A + iB)\ \overline{det(A + iB)} = |det(A + iB)|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Exercice 113 Soit n impair et soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ antisymétrique, i.e. ${}^tA = -A$ donc

$$det(A) = det({}^tA) = det(-A) = (-1)^n det(A) = -det(A).$$

Ainsi, $2\ det(A) = 0$ et donc $det(A) = 0$.

Exercice 115 1) En utilisant la formule de Laplace: développement par rapport à la première ligne, on obtient: $\triangle_n = (-1)^{n+1} a_n x^{n-1}$.
2) Noté Γ_{n-1} est la matrice obtenue de Γ_n en élevant la première colonne et la première ligne. $(\Gamma_{n-2}, \Gamma_{n-3} \ldots)$.
Développer Γ_n par rapport à la première colonne, on obtient:

$$\Gamma_n = x\Gamma_{n-1} + (-1)^{n+2} a_n \triangle_n = x\Gamma_{n-1} - a_n^2 x^{n-1}$$

En suite, par récurrence, montrer que

$$\Gamma_n = x^{n+1} - x^{n-1} \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

Exercice 118 1)On transforme le déterminant par: toutes les lignes (sauf la première ligne) moins la première ligne. On arrivera un nouvel déterminant dans lequel les éléments avec X apparaissent que sur la première ligne.
Si on imagine de développer ce déterminant par rapport à la première ligne, le résultat est un polynôme de degré au plus 1 de X. C'est à dire $\triangle$ est de la forme $\triangle(X) = \alpha X + \beta$.
2) Facilement de calculer $\Delta(-a)$ et $\Delta(-b)$ sont le produit des éléments sur la diagonale principale.
Donc: $\Delta(-a) = (\lambda_1 - a) \ldots (\lambda_n - a)$ et $\Delta(-b) = (\lambda_1 - b) \ldots (\lambda_n - b)$.
3) Pour calculer $\triangle(X)$, il suffit de calculer α, β qu'ils sont la solution du système de deux équations: $\Delta(-a) = -a\alpha + \beta$ et $\Delta(-b) = -b\alpha + \beta$.
D'ou on peut calculer $\triangle(X)$.