Algébre et Arithmétique 1

Feuille n°3 : division euclidienne

1 Exercices à savoir faire

Exercice 1

1 On définit sur $\mathbf{N}$ une relation $\mathcal{R}$ en posant $n\mathcal{R}m$ si, et seulement si, $n-m$ est pair. La relation $\mathcal{R}$ est-elle :
- réflexive ?
- symétrique ?
- anti-symétrique ?
- transitive ?
- une relation d'ordre ?
- une relation d'équivalence ?

Justifiez vos réponses.

2 Mêmes questions pour la relation sur $\mathbf{R}$ définie par $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x+y > -2$.

Exercice 2

Sachant que $12079233 = 75968 \times 159 + 321$ déterminer le reste de la division euclidienne de 12079233 par 75968, puis par 159.

Exercice 3

La somme de deux nombres multiples de 7 est-elle un multiple de 14 ?

Exercice 4

Connaissant le reste de la division euclidienne d'un entier par 10, pouvez-vous en déduire celui de la division euclidienne de cet entier par 5 ? par 6 ?

Exercice 5

Soit n un entier. Calculer le reste de la division euclidienne de n^2 par 4, suivant que cet entier est pair ou impair. Existe-t-il des entiers a et b tels que $a^2 + b^2 = 8123$?

Exercice 6

Connaissant la division euclidienne de deux entiers n et n' par un entier $b \geq 1$ (c'est-à-dire quotients et restes), donner un moyen simple de déterminer la division euclidienne de $n + n'$ par b ?

Exercice 7

Si n est un entier, on note $\mathcal{D}_n = \{p \in \mathbf{N} \mid p \text{ divise } n \text{ et } p \text{ premier}\}$.
Soient $n, m \in \mathbf{N}$ tels que $\mathcal{D}_n = \mathcal{D}_m$: a-t-on $n = m$?

Exercice 8

Montrer que pour tout entier naturel n le nombre $n(n+1)(n+2)(n+3)$ est divisible par 24.

Exercice 9

Dans une certaine base, un entier s'écrit $\overline{1254}$ et son double $\overline{2541}$. Quel est cet entier et quelle est la base ?

Exercice 10

1 Écrire en base 7, puis en base 2, enfin dans la base hexadécimale le nombre mille sept-cent quatre-vingt-neuf.
2 Que vaut le nombre écrit $\overline{101001001}$ en base 2 ?
3 Que vaut le nombre écrit $\overline{BAC}$ en hexadécimal ?

Exercice 11

Soit n un entier dont l'écriture décimale est $\overline{abc}$. Montrer que $n \equiv 2a+3b+c \pmod 7$.

Exercice 12

1 Trouver des entiers relatifs u et v tels que $29u + 24v = 1$.
2 Déterminer l'ensemble des couples $(u, v) \in \mathbf{Z}^2$ tels que $29u + 24v = 3$.

Exercice 13

1 Montrer que 777 est divisible par 37.
2 Montrer que les nombres qui s'écrivent $\overline{aaabbb}$ en base 10 sont divisibles par 37.

Exercice 14

1 Donner si possible un exemple de deux entiers n et m dont le produit nm est divisible par 5 sans que ni n ni m ne le soit.
2 Donner si possible un exemple de deux entiers n et m dont le produit est divisible par 15 sans que ni n ni m ne le soit.

Exercice 15

1 Soit m et n des entiers relatifs tels que m divise à la fois $8n + 7$ et $6n + 5$. Montrer que $m = \pm 1$.
2 Soit a un entier relatif. Déterminer le pgcd d des entiers $m = 14a + 3$ et $n = 21a + 4$ et trouver des entiers u et v tels que $um + vn = d$.

Exercice 16

1 Déterminer de deux façons différentes $\mathrm{pgcd}(245, 162)$.
2 Déterminer $\mathrm{ppcm}(245, 162)$.

Exercice 17

Si $(a, b) = (30, 21)$, calculer $d = \mathrm{pgcd}(a, b)$, $\mathrm{ppcm}(a, b)$ et déterminer un couple d'entiers (u, v) tels que $au + bv = d$.

2 Exercices à chercher

Exercice 18

On considère la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur le produit $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ donnée par

$$(a, b)\mathcal{R}(a', b') \iff a + b' = a' + b$$

dont l'ensemble quotient (c'est à dire l'ensemble des classes d'équivalence) est $\mathbf{Z}$. On notera $[(a, b)]$ la classe d'équivalence de l'élément (a, b), (c'est à dire l'ensemble des éléments de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ en relation avec (a, b))

On considère l'application

$$S : \begin{array}{ccc} \mathbf{N} \times \mathbf{N} & \to & \mathbf{N} \\ (a, b) & \mapsto & a + b \end{array}$$

1 Montrer que $(3, 9)$ et $(5, 11)$ repésente la même classe d'équivalence.
2 Calculer $S((3, 9))$ et $S((5, 11))$.
3 L'application

$$S : \begin{array}{ccc} \mathbf{Z} & \to & \mathbf{N} \\ [(a, b)] & \mapsto & a + b \end{array}$$

est-elle bien définie ?

Exercice 19

Combien y a-t-il de nombres entiers naturels de trois chiffres qui s'écrivent avec 2, 5 et 8 et dont les trois chiffres sont distincts ? Montrer sans la calculer que leur somme vaut $(2 + 5 + 8) \times 111 \times 2$.

Exercice 20

1 Écrire 1234 en base 5.
2 Écrire $\overline{1234}^{(5)}$ en base 10.
3 Écrire 1234 en base mixte $5, 3, 6$.

Exercice 21

1 Calculer $\overline{4023}^{(5)} \times \overline{12}^{(5)}$.
2 Calculer $\overline{2345}^{(6)} \times \overline{52}^{(6)}$.

Exercice 22

Soit N, p, a et b des entiers naturels.

On doit livrer N ampoules dans des petits cartons contenant p ampoules, des cartons moyens contenant $m = ap$ ampoules et des gros cartons contenant $g = abp$ ampoules. On privilégie les gros cartons devant les moyens et les moyens devant les petits.

1 Montrer qu'on ne peut livrer que des nombres multiples de p ampoules.

2 Quelles sont les opérations qui permettent de calculer le nombre de cartons de chaque type ?

3 Si $m = p^2$ et $g = p^3$ quelle est l'écriture de N la mieux adaptée au calcul du nombre de cartons de chaque type ?

Exercice 23

Si n est un entier, on note $D_n = \{k \in \mathbf{N} \mid k \text{ divise } n\}$.

Soient $n, m \in \mathbf{N}$ tels que $D_n = D_m$: a-t-on $n = m$?

Exercice 24

Quel est le plus petit entier (strictement positif) qui est multiple de 1, 2, 3,. . ., 10 ?

Exercice 25

Montrer que si $n + m$ est pair, il en est de même pour $n - m$.

Résoudre dans $\mathbf{Z}^2$ l'équation $n^2 - m^2 = 30$.

Exercice 26

Enoncer et démontrer le critère de divisibilité par 9.

Donner une condition nécessaire est suffisante pour qu'un entier soit divisible par 45.

En déduire un critère de divisibilité par 45.

Les nombres suivants sont-ils divisibles par 9 : 3546733, 25413985, 2472480 ?

Exercice 27

Remarquer que $10 \equiv -1 \pmod{11}$. En déduire un procédé simple du calcul du reste de la division euclidienne par 11 d'un entier écrit sous forme décimale.

Exercice 28

Soit $N = \overline{mcdu}$ un nombre de quatre chiffres écrit en base 10. On pose $P = \overline{udcm}$. Montrer que $N + P$ est divisible par 11 et donner le quotient de la division de $N + P$ par 11.

Exercice 29

Quels sont les trois derniers chiffres de $7^{100} - 3^{100}$? (*Écrire* $7 = 10 - 3$ *et utiliser la formule du binôme.*)

Exercice 30

Montrer que $k(k+1)\cdots(k+n-1)$ est divisible par $n!$.

Exercice 31

1 Déterminer la parité des solutions entières de l'équation $x^3 + 6x^2 + 4x - 9 = 0$
2 Ces solutions sont-elles divisibles par 3 ?
3 On note $P(x) = x^3 + 6x^2 + 4x - 9$. Montrer que
- si $x \geq 1$, alors $P(x) \geq 1$.
- si $x \leq 0$, alors $P(x) \leq x^2(x + 6x)$

4 En déduire l'ensemble des solutions *entières* de l'équation $x^3 + 6x^2 + 4x - 9 = 0$.

Exercice 32

On range 461 pots de yaourts dans des caisses (toutes identiques), en remplissant entièrement une caisse avant de passer à la suivante. On utilise 14 caisses ; combien chaque caisse contient-elle de pots ? (D'après D. Perrin ; plusieurs solutions sont possibles.)

Exercice 33

1 Rappeler le critère de divisibilité par 3.
2 Déterminer un critère de divisibilité par 11.
3 Déterminer le $pgcd(41, 11111)$.
4 Les nombres $111, 1111, 11111, 111111$ sont-ils premiers ?

3 Exercices pour aller plus loin

Exercice 34

Que dire d'une relation $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble E qui est à la fois symétrique et anti-symétrique ?

Exercice 35

Soit A l'entier 4444^{4444} ; soit B la somme de ses chiffres, C la somme des chiffres de B et D la somme des chiffres de C. Que vaut D ?

Exercice 36

Que pourrait être la « preuve par $b-1$ » en base b ?

Exercice 37

Vous disposez d'un stock illimité de billets de banque de valeur « p euros » et de valeur « q euros », où p et q sont deux entiers naturels premiers entre eux. Montrer qu'à partir d'une certaine somme, vous pouvez payer tous les montants.

Exercice 38

Soit a, b, c des entiers. On suppose que a divise bc et que $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$.

1 Montrer que a divise c. (*Multiplier par c une relation de Bézout* $1 = au + bv$.)

2 Soit a, b, c, d des entiers naturels non nuls. On suppose que $\mathrm{pgcd}(a, b) = \mathrm{pgcd}(c, d) = 1$ et que $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}$ est entier. Montrer que $b = d$.

Exercice 39

On définit la suite de Fibonacci par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

1 Montrer (par récurrence) que $F_{n+1}F_{n-1} - (F_n)^2 = (-1)^n$ pour tout n.

2 Montrer que $F_{n+m} = F_{n+1}F_m + F_nF_{m-1}$. (Faire une récurrence sur m, puis sur n.)

3 Montrer que l'on a, pour $m < n$, $\mathrm{pgcd}(F_n, F_m) = \mathrm{pgcd}(F_{n-m}, F_m)$ et $\mathrm{pgcd}(n, m) = \mathrm{pgcd}(n-m, m)$. En déduire par récurrence sur $\max(m, n)$ que la relation $\mathrm{pgcd}(F_n, F_m) = F_{\mathrm{pgcd}(n,m)}$.

4 Calculer F_n pour tout entier n. Quelle est la limite de F_{n+1}/F_n quand n tend vers l'infini ? Montrer que F_n est l'entier le plus proche de $((1 + \sqrt{5})/2)^n/\sqrt{5}$.