Algèbre et Arithmétique 1

Feuille n°1 : entiers naturels

1 Exercices à savoir faire

Exercice 1

Quels axiomes de Peano l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$, muni de la fonction successeur s définie par $s(0) = 1$, $s(1) = 2$, $s(2) = 3$ et $s(3) = 3$, ne vérifie-t-il pas ?

Exercice 2

Donner un exemple d'ensemble muni d'une fonction successeur qui vérifie tous les axiomes de Peano sauf l'axiome de récurrence.

Exercice 3

1 Montrer que pour tout entier $n \geq 4$, on a $2^n < n!$.
2 Déterminer un entier A tel que pour tout $n \geq A$, on ait $3^n < n!$.

Exercice 4

1 Montrer que pour tout entier n, $4^n + 5$ est un multiple de 3.
2 Montrer que, pour tout entier n, si $10^n + 7$ est multiple de 9, alors $10^{n+1} + 7$ l'est aussi. Que peut-on en déduire ?

Exercice 5

On considère une suite arithmétique (u_n) de premier terme u_0 et de raison a et on pose $U_n = u_0 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Montrer que $U_n = (n+1)(u_0 + \frac{1}{2}an)$.

Exercice 6

On considère une suite géométrique (u_n) de premier terme u_0 et de raison a et on pose encore $U_n = u_0 + \cdots + u_n$. On suppose que $a \neq 1$; montrer alors que $U_n = u_0 \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$. Que vaut U_n dans le cas où $a = 1$?

Exercice 7

Les taux d'intérêt (TEG annuel) des crédits à la consommation sont en 2005 de l'ordre de 8% pour des prêts d'une durée de 5 ans. Vous souhaitez acheter une Logan

(7 500 euros) ; votre revenu mensuel est de 1 200 euros et l'organisme de prêt exige un endettement inférieur à 30%.

1 Quel est le nombre minimal de mensualités dont vous devrez vous acquitter ?

2 Quel est le coût total de votre crédit si vous souscrivez un tel crédit ? et si vous décider de rembourser pendant 5 ans ?

Exercice 8

Soit (u_n) la suite définie par récurrence par la relation $u_{n+1} = 3u_n + 2$ et $u_0 = 1$.

1 Déterminer un nombre réel a tel que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + a$ soit une suite géométrique.

2 En déduire une formule simple pour v_n puis une formule simple pour u_n.

3 Déduire de l'exercice une *méthode générale* pour calculer le n-ième terme d'une suite (u_n) définie par une récurrence $u_{n+1} = au_n + b$, où a et b sont des nombres réels.

Exercice 9

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. On cherche une formule close pour le terme général de cette suite.

1 Calculer u_2, u_3, u_4.

2 Pour tout entier naturel n, on appelle P_n l'assertion

$$u_n = 2^{n+1} - 3^n \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = 2^{n+2} - 3^{n+1}$$

Démontrer par récurrence sur n, que pour tout entier naturel n, la proposition P_n est vraie.

3 Conclure.

2 Exercices à chercher

Exercice 10

Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\leq$.

Montrer que la propriété (dite « de bon ordre ») :

toute partie non vide de E possède un plus petit élément.

implique que l'ordre est total :

deux éléments quelconques sont comparables, ou en d'autres termes :

$$\forall (x, y) \in E^2 \qquad x \leq y \quad ou \quad y \leq x.$$

Exercice 11

Un ingénieur au revenu mensuel de 3 000 euros décide d'acheter une maison ; le taux d'endettement que lui autorise son organisme de crédit est 1/3, le taux d'intérêt du moment est 3,5%.

1 De quelle somme peut-il disposer s'il décide de souscrire un prêt d'une durée de 10 ans ? de 20 ans ?

2 Quel est le coût total du crédit (pour 100 000 euros empruntés) ?

3 En 1995, les taux d'intérêts étaient plutôt de l'ordre de 8,5%. Répondre aux questions ci-dessus.

Exercice 12

On dispose d'un stock illimité de pièces de 3 euros et de 5 euros. Quels sont les montants que l'on peut payer en donnant la somme exacte ?

Exercice 13

1 Montrer par récurrence sur n les formules

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2 Que vaut, si n est impair, la somme $1 + 3 + 5 + \cdots + n$?

3 Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 14

1 Déterminer deux nombres réels a et b tels que l'on ait, pour tout nombre réel $x > 0$,

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$

2 Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Exercice 15

Soit (u_n) la suite définie par récurrence par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ pour $n \geq 0$.

1 Démontrer que pour tout entier n, on a $u_n \geq n^2$.

2 On définit une suite (v_n) en posant, pour tout entier n, $v_n = u_{n+1} - u_n$. Calculer v_{n+1} en fonction de v_n, puis exprimer v_n en fonction de n.
3 Calculer u_n en fonction de n.

Exercice 16

Nous allons démontrer par récurrence sur n que si, dans une salle de n personnes, il y a au moins une fille, alors il n'y a que des filles. Notons $P(n)$ cette proposition.

Elle est vraie pour $n = 1$.

Supposons qu'elle soit vraie pour n, c'est-à-dire supposons que lorsqu'une salle contient n personnes dont au moins une fille, alors il n'y a que des filles ; montrons qu'elle est vraie pour $n + 1$. Considérons donc une salle contenant $n + 1$ personnes dont au moins une fille ; appelons-la Chantal. Faisons sortir une personne autre que Chantal, disons, Vincent. La salle contient n personnes, dont une fille, Chantal. Par l'hypothèse de récurrence, il y a donc n filles dans la salle. On fait alors entrer Vincent, et on demande à Chantal de sortir. Dans la salle il y a n personnes dont $n - 1$ filles. En appliquant à nouveau l'hypothèse de récurrence, on en déduit que la salle ne contient que des filles. On fait alors rentrer Chantal ; la salle ne contient que des filles.

Chercher l'erreur !

Exercice 17

Un récipient contient 1 dm^3 de riz, chaque grain faisant 1 mm^3. On dispose un grain de riz sur la première case d'un échiquier, deux sur la deuxième, quatre sur la suivante, et ainsi de suite, en doublant à chaque fois le nombre de grains. Combien de cases de l'échiquier seront remplies lorsque le pot de riz ne contiendra plus assez de grains ? Combien en reste-t-il dans le pot ?

Exercice 18

La suite (u_n) est définie par $u_1 = 1/2$ et $u_n = u_{n-1}/(2nu_{n-1} + 1)$, si $n \geq 2$. Calculer $u_1 + \cdots + u_n$ pour tout entier n. (Commencez par calculer explicitement cette somme pour de petites valeurs de n, conjecturez alors une formule générale que vous démontrerez ensuite par récurrence.)

Exercice 19

On définit une suite (u_n) en posant $u_0 = 1$ et, si $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n/(1 + u_n)$.
1 Montrer que l'on a $u_n > 0$ pour tout entier n.
2 Montrer que la suite $(1/u_n)$ est arithmétique.
3 Calculer u_n pour tout entier n.

Exercice 20

1 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et, pour tout entier naturel n, la formule

de récurrence $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Déterminer les cinq premiers termes de cette suite.
2 On note $\mathcal{P}_n$ la propriété « $u_n = 1 + 2^n$ » Montrer en adaptant le raisonnement par récurrence que pour tout n entier, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Exercice 21

1 Soit $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}}$ une famille de $n \times m$ nombres réels. Montrer par récurrence sur n :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

2 En déduire, si $(b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq i}}$ est une autre famille de nombres réels :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} b_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} b_{ij}.$$

Indication : pour appliquer le résultat précédent, on pourra compléter la famille par des zéros.
3 Calculer

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} \frac{1}{n-j+1}.$$

3 Exercices pour aller plus loin

Exercice 22

Soit (x_n) une suite de réels dans $]0,1[$. On pose $S_n = x_1 + \cdots + x_n$. Montrer l'inégalité

$$1 - S_n \leq (1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n) \leq \frac{1}{1+S_n}.$$

Exercice 23

Si n est un entier ≥ 1 et x un réel dans $[0,1]$, montrer l'inégalité

$$1 - nx \leq (1-x)^n \leq 1 - \frac{nx}{1+(n-1)x}.$$

Exercice 24

Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $\prod_{k=1}^{n}(4k-2) = \prod_{k=1}^{n}(n+k)$.

Exercice 25

1 Si x et y sont deux nombres réels positifs, montrer que $\sqrt{xy} \leq (x+y)/2$.
2 Montrer par récurrence sur n que si $x_1, \ldots, x_{2^n}$ sont des nombres réels positifs,

$$(x_1 \cdots x_{2^n})^{1/2^n} \leq (x_1 + \cdots + x_{2^n})/2^n.$$

3 Soit $N \geq 2$ et soit $x_1, \ldots, x_N$ des nombres réels positifs. Démontrer que

$$(x_1 \cdots x_N)^{1/N} \leq (x_1 + \cdots + x_N)/N$$

(*inégalité entre moyenne arithmétique et moyenne géométrique*). Pour cela, choisir un entier n tel que $N \leq 2^n$; poser, pour $N \leq k \leq 2^n$, $x_k = (x_1 + \cdots + x_N)/N$; appliquer la question précédente.

Exercice 26

1 Peut-on paver un échiquier privé de deux cases diagonalement opposées par des dominos (chacun recouvrant exactement deux cases).
2 Démontrer que l'on peut paver un échiquier 8×8 par des triominos en forme de L (recouvrant trois cases) de sorte à laisser vide une case quelconque prescrite à l'avance. (Remplacer 8 par 2^n, et faire une récurrence…)
3 Quels rectangles sont pavables par des triominos en forme de L ? (La réponse générale n'est semble-t-il pas connue…)

Exercice 27

Démontrer la commutativité de la multiplication dans l'ensemble des nombres entiers naturels, à l'aide des formules de définition de cette multiplication.