Exercices sur les espaces affines euclidiens

Exercice 1. *Cours*

(1) Dans un espace vectoriel euclidien, deux sous-espaces vectoriels non nuls orthogonaux sont-ils toujours en somme directe ?

(2) Montrer en utilisant la forme réduite que le déterminant d'une isométrie est $(-1)^{codim E_1}$ où E_1 est l'espace propre de valeur propre 1.

(3) Rappeler toutes les isométries du plan euclidien et de l'espace euclidien de dimension 3, en précisant leur partie linéaire, leur point fixe, leur axe, leur composante à point fixe et leur composante de glissement.

(4) Rappeler la construction de l'axe radical de deux cercles non sécants.

(5) Déterminer le groupe d'isométries d'un segment dans le plan euclidien.

Exercice 2.

Soit A et B deux points fixés dans un plan affine euclidien. Déterminer le lieu des points M du plan où $MA \perp MB$.

Exercice 3.

Le but de cet exercice est de démontrer que le symétrique de l'orthocentre H d'un triangle non plat ABC par rapport à un des cotés (par exemple (AC)) est sur le cercle circonscrit.

Soit ABC un triangle non plat. La hauteur issue de A coupe (BC) en A' et la hauteur issue de C coupe (AB) en C'. Démontrer que les points A', B, C' et H sont cocycliques. Démontrer que les angles de droites $((BC'), (BA'))$ et $((HC'), (HA'))$ sont égaux. Conclure.

Exercice 4.

Deux cercles sont dits orthogonaux si les tangentes aux points d'intersection sont orthogonales. Montrer que les cercles Cet C' sont orthogonaux si et seulement si la puissance du centre de C par rapport à C' est égale au carré du rayon de C.

Exercice 5.

Soit A et B deux points d'un plan affine euclidien. Déterminer suivant la valeur de la constante k,

(1) l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = k$

(2) l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = k$

(3) et l'ensemble des points M du plan tels que $MA/MB = k$

(4) l'ensemble des points M du plan tels que $MA/MB < k$

Exercice 6.

En décomposant les rotations en produits de réflexions, déterminer le centre d'une composée de deux rotations dont la somme des angles n'est pas nulle modulo 2π.

Exercice 7. *Décomposition des isométries planes*

- Que peut-on dire d'une isométrie plane qui a trois points fixes non alignés ?
- Soit ϕ une isométrie plane qui a deux points fixes distincts A et B. Soit C un point hors de la droite (AB) et C' son image par ϕ. Si C' est différent de C, déterminer la médiatrice du segment $[CC']$ et montrer que $s_{(AB)} \circ \phi$ est l'identité. En déduire la nature de ϕ.
- Soit ϕ une isométrie différente de l'identité qui a un point fixe A. Soit B un autre point du plan et B' son image. Si B' est différent de B, soit d la médiatrice du segment $[BB']$ Montrer que $s_d \circ \phi$ a deux points fixes. Montrer que ϕ est composée de réflexions.
- Montrer qu'une isométrie plane qu'une isométrie qui n'a pas de point fixe peut s'écrire composée de moins de trois réflexions.

Exercice 8.

On munit le plan affine euclidien d'un repére orthonormé (O, i, j) et on l'identifie au plan complexe. Ecrire à l'aide des affixes complexes, la symétrie glissée d'axe d'équation (x+y=2) et de vecteur $(3, 3)$.

Exercice 9 (Déterminer une rotation à partir d'images)**.**

Soit E un plan affine euclidien muni d'un repère cartésien orthonormé. Soient A, B, C et D les points de E dont les coordonnées sont

$$A : (0, 3), \quad B : (2, 1), \quad C : (2, 3) \quad \text{et} \quad D : (0, 1).$$

(1) Montrer que les droites (A, B) et (C, D) sont orthogonales et expliciter les coordonnées de leur point d'intersection.

(2) Prouver l'existence d'une *rotation* qui envoie A sur C, C sur B, B sur D et D sur A. Expliciter une représentation matricielle de cette rotation.

Exercice 10 (Trouver l'isométrie)**.**

Soit E un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère cartésien orthonormé. On note v la transformation de E dans E qui envoie le point de coordonnées (x, y, z) sur le point de coordonnées (x', y', z') définies par :

$$x' = \frac{2x - 2y + z + 1}{3}; y' = \frac{2x + y - 2z + 2}{3}; z' = \frac{x + 2y + 2z + 5}{3}.$$

Montrer que v est une isométrie de E. Préciser de quel type d'isométrie il s'agit. Expliciter son axe et son vecteur de glissement.

Exercice 11 (Composée d'isométries)**.**

Soit E un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère cartésien orthonormé (O, i, j, k). On désigne par D la droite d'équation $(x = 0, z = 1)$ et par D' la droite d'équation $(y = 0, z = 0)$. On note S_D la symétrie par rapport à la droite D et R_θ la rotation d'axe D' et d'angle θ (en considérant la base (j, k) comme directe). On pose $\varphi = S_D \circ R_\theta$.

(1) Écrire dans la base (i, j, k) la matrice de $\overrightarrow{S_D}$, celle de $\overrightarrow{R_\theta}$ et celle de $\overrightarrow{\varphi}$. Écrire les expressions analytiques de S_D et de R_θ dans le repère (O, i, j, k).

(2) Montrer que φ est une symétrie éventuellement glissée d'axe une droite Δ.

(3) Pour tout point M de E, prouver que les milieux de $\big(M, s_\Delta(M)\big)$ et de $\big(M, \varphi(M)\big)$ sont sur Δ.

(4) En utilisant le point O, montrer que Δ passe par le point de coordonnées $(0, 0, 1)$. et est contenue dans le plan affine d'équation $x = 0$.

(5) Donner les composantes du vecteur de glissement de φ en fonction de θ.

Exercice 12.

Soit C un cercle et $\overrightarrow{u}$ un vecteur. Construire une corde $[AB]$ du cercle C telle que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$.

Construire un segment $[AB]$ connaissant son milieu I et sachant que A appartient é une droite donnée d et B é un cercle donné C.

Construire un carré $ABCD$ sachant que A et C sont sur une droite donnée d_1 que B est sur une droite donnée d_2 et que D est sur une droite donnée d_3.

Exercice 13.

Soit d une droite. Soit $\mathcal{C}$ un cercle et A un point de $\mathcal{C}$. Construire un cercle tangent à la droite d et tangent en A au cercle $\mathcal{C}$.

Exercice 14.

On considére le plan muni d'un un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ et la courbe (C) d'équation

$$x^2 + xy + y^2 + x - y = 0$$

1) Montrer que cette courbe posséde un centre de symétrie Ω et donner son équation dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$

2) Montrer que dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ la première bissectrice Δ est axe de symétrie.

3) On considère le repère orthonormé direct $(\Omega, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ où $\overrightarrow{I}$ est un vecteur unitaire de Δ. Donner l'équation de (C) dans ce repère.

4) Montrer que dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ la seconde bissectrice Δ' est axe de symétrie.

Donner les équations de Δ et Δ' dans le repère $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

Sachant que (C) est une ellipse tracer (C) dans le repère $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

Exercice 15.

Reprendre l'exercice précédent mais en utilisant la théorie des formes quadratiques et leur application aux coniques. Notamment retrouver les axes de (C).

Exercice 16.

On considére le plan muni d'un un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ et la courbe (C) d'équation

$$x^2 - 3xy + 2y^2 + 2x - 3y + 1 = 0$$

1) Montrer que cette courbe possède un centre de symétrie Ω et donner son équation dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$

2) En déduire que (C) est la réunion de deux droites dont on donnera les équations dans le rèpere $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$

Exercice 17.

On considère le plan muni d'un un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ et la courbe (C) d'équation

$$2x^2 + 3xy - 2y^2 - 10 = 0$$

1) Vérifier que O est un centre de symétrie. Trouver une base orthonormale tel que l'équation de (C) soit de la forme $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (a, b réels).

2) Donner l'équation des asymptotes de (C) et tracer (C) dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

Exercice 18.

On considère le plan euclidien muni d'un un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ et la courbe (C) d'équation

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 3x - y - 1 = 0$$

1) Montrer que (C) est une parabole.

2) Trouver un repère orthonormé $(S, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ tel que (C) ait une équation de la forme $x^2 = 2py$ dans ce repère.