Algèbre et Arithmétique 1

Examen 16 décembre 2008

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Justifiez toutes vos réponses. Il est bon de relire sa copie...

Durée : 2 heures

Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (2,5 points)

1 Soit $f : A \to B$ une application. Définir « f est injective ».

2 Soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux applications. Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f l'est aussi.

Exercice 2 (4 points)

Le symbole | signifie « divise ». On considère les assertions suivantes :

a) $\exists a \in \mathbf{Z}, \forall n \in \mathbf{Z}, n^2 \geq a$.

b) $\forall (a,b,c) \in \mathbf{Z}^3, (a \mid bc \Rightarrow a \mid b \text{ ou } a \mid c)$.

1 Pour chacune d'elles, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant.

2 Pour chacune d'elles, écrire sa négation.

Exercice 3 (3 points)

1 Rappeler la formule (dite *d'inclusion-exclusion*) qui relie le le cardinal de la réunion de deux ensembles finis et le cardinal de leur intersection.

2 Quand on dit « il y a un », on sous-entend « il y a au moins un ».

Sur un échantillon de 100 foyers français,

- dans 95 foyers, il y a une plante
- dans 85 foyers, il y a un téléviseur
- dans 75 foyers, il y a un ordinateur.

Quel est au minimum le nombre de foyers de l'échantillon où il y a un téléviseur et un ordinateur ? *(indication : on pourra utiliser la formule d'inclusion-exclusion)*

3 Avec les données précédentes, quel est au minimum le nombre de foyers de l'échantillon où il y a un téléviseur, un ordinateur et une plante ? *(indication : on pourra utiliser la question précédente)*

Tourner S.V.P.

Exercice 4 (3 points)

1 Écrire en base 5 le nombre 138.
2 Exprimer en base 10 le nombre $\overline{2342}^{(5)}$.
3 Calculer $\overline{431}^{(6)} \times \overline{35}^{(6)}$. *(Faire les calculs et donner le résultat en base* 6*).*
4 Calculer les restes de la division euclidienne de $\overline{23510325}^{(6)}$ par 6, 3 et 54.

Exercice 5 (3 points)

1 Déterminer le pgcd de 5715 et 3915 et une relation de Bezout.
2 Les entiers 4878564 et 4878565 sont-ils premiers entre eux ?
3 Soient n et m deux entiers non-nuls. Soient $(u, v) \in \mathbf{Z}^2$ tels que $nu+mv = pgcd(n, m)$. Montrer que u et v sont premiers entre eux.

Exercice 6 (4 points)

1 Déterminer un entier naturel k non nul tel que $(-5)^k \equiv 1 \pmod{31}$.
2 Déterminer le plus petit entier naturel k_0 non nul tel que $(-5)^{k_0} \equiv 1 \pmod{31}$. Comment s'appelle cet entier k_0 ?
3 Montrer que $57^{1529} \equiv (-5)^5 \pmod{31}$
4 Calculer le reste de 57^{1529} modulo 31 ?

Exercice 7 (4 points)

1 Résoudre dans $\mathbf{Z}$ l'équation $3x \equiv 7 \pmod{16}$.
2 Résoudre dans $\mathbf{Z}$ le système d'équations

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{5} \\ x \equiv 4 \pmod{11} \end{cases}.$$

3 Résoudre dans $\mathbf{Z}$ le système d'équations

$$\begin{cases} 7x \equiv 2 \pmod{25} \\ 18x \equiv 6 \pmod{24} \end{cases}.$$

Un corrigé sera disponible sur internet.