DM AR1 2008 — Correction

Exercice 1

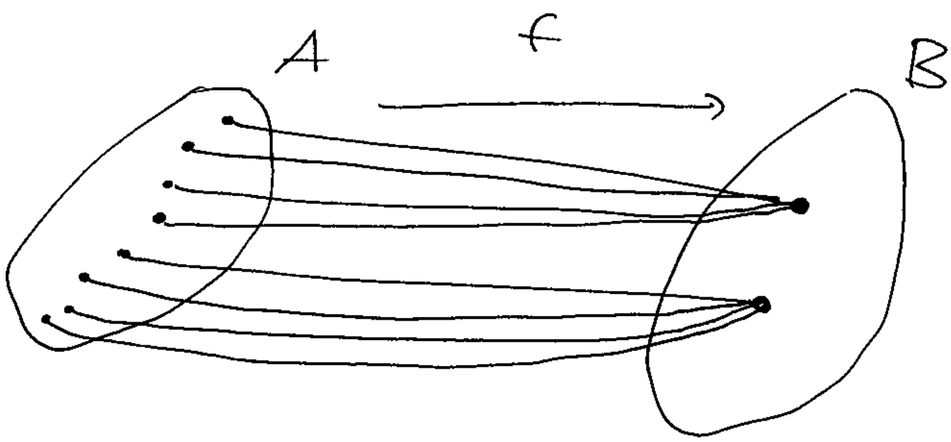
1. $\forall (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \exists ! (q,r) \in \mathbb{Z}^2 \mid (a = bq + r \text{ et } 0 \leq r < |b|)$

2. $\forall (a,b,c) \in \mathbb{Z}^3, \left(\begin{bmatrix} (a,b) \neq (0,0) \\ \text{et } a \wedge b = 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (a \mid bc \Rightarrow a \mid c) \right)$

$\forall (a,b,c) \in \mathbb{Z}^3, \left[\left((a,b) \neq (0,0) \text{ et } a \wedge b = 1 \right) \Rightarrow \left(a \mid c \text{ et } b \mid c \Rightarrow ab \mid c \right) \right]$

Exercice 2.

1.



2. f n'est pas injective : soit $b_0 \in B$. On a : $f^{\langle -1 \rangle}(\{b_0\})$ a 4 éléments. En particulier : soient $a, a' \in f^{\langle -1 \rangle}(\{b_0\})$ avec $a \neq a'$. On a $f(a) = f(a')$ $(= b_0)$. Ainsi f n'est pas injective

- Donc : f n'est pas bijective, en particulier.

- f est surjective :

$$\forall b \in B, \quad \# f^{\langle -1 \rangle}(\{b\}) \geqslant 1 .$$

3. Le principe des Bergers permet de calculer le cardinal de A :

$$\left(f^{\langle -1 \rangle}(\{b\}) \right)_{b \in B} \quad \text{est une partition}$$

de A. Donc :
$$\# A = \sum_{b \in B} \# f^{\langle -1 \rangle}(\{b\})$$
$$= \sum_{b \in B} 4$$
$$= 4 \cdot \# B .$$
$$= 4 \cdot 8 = 32 .$$

Exercice 3.

1. On applique la méthode de Hörner :

$$\overline{100110}^{(2)} = 0 + 2(1 + 2(1 + 2(0 + 2(0 + 2 \cdot 1]$$
$$= 2(1 + 2(1 + 8)) = 2(19)$$
$$= 38$$

2. On fait des DE (divisions euclidiennes) successives :

$$\begin{array}{r|l} 982 & 7 \\ \cline{2-2} 28 & 140 \\ 02 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 140 & 7 \\ \cline{2-2} 0 & 20 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 20 & 7 \\ \cline{2-2} 6 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 7 \\ \cline{2-2} 2 & 0 \end{array}$$

Ainsi : $982 = \overline{2602}^{(7)}$

3. $\overline{6541}^{(7)} = 1 + 7\cdot 4 + 7^2\cdot 5 + 7^3\cdot 6$

$= 1 + 7\left(4 + 7\cdot 5 + 7^2\cdot 6\right)$

Ainsi : $7 \nmid \overline{6541}^{(7)}$

Exercice 4

$u_0 = 1$, $u_1 = 1$

et $\forall n \geq 0$: $u_{n+2} = 5 \cdot u_{n+1} - 6u_n$.

1. $u_2 = 5 \cdot u_1 - 6 \cdot u_0 = 5 - 6 = -1$

$u_3 = 5 \cdot u_2 - 6 \cdot u_1 = -5 - 6 = -11$

$u_4 = 5 \cdot u_3 - 6 \cdot u_2 = -55 + 6 = -49$.

2. On note P_n = "$u_n = 2^{n+1} - 3^n$ et $u_{n+1} = 2^{n+2} - 3^{n+1}$"

<u>P_0 est vraie</u> : $u_0 = 1$ et $2^{0+1} - 3^0 = 2 - 1 = 1$

$u_1 = 1$ et $2^{0+2} - 3^{0+1} = 4 - 3 = 1$

<u>$P_n \Rightarrow P_{n+1}$</u> : Soit $n \geq 0$. On suppose P_n vraie.

Alors : $u_{n+2} = 5 \cdot u_{n+1} - 6 \cdot u_n$

$= 5 \cdot (2^{n+2} - 3^{n+1}) - 6 \cdot (2^{n+1} - 3^n)$

$= 2^{n+2}(5-3) - 3^{n+1}(5-2)$

$= 2^{n+3} - 3^{n+2}$

Donc P_{n+1} = "$u_{n+1} = 2^{n+2} - 3^{n+1}$ et $u_{n+2} = 2^{n+3} - 3^{n+2}$" est vraie.

3. Ainsi, on a démontré par récurrence :

$$\forall n \geq 0, \quad u_n = 2^{n+1} - 3^n.$$

Exercice 5

1.

$$\begin{array}{l|l} 78908 & 4 \\ \cline{2-2} 38 & 19727 \\ \ \ 29 & \\ \ \ \ 10 & \\ \ \ \ \ 28 & \\ \ \ \ \ \ 0 & \end{array}$$

$78908 = 4 \cdot 19727$.

oui : 78908 est divisible par 4.

2. Soit $k \geq 2$.

Alors : $$10^k = 10^2 \cdot 10^{k-2}$$
$$= 100 \cdot 10^{k-2}$$
$$= 4 \cdot \left(25 \cdot 10^{k-2}\right).$$

Ainsi :
$$\forall k \geq 2, \quad 4 \mid 10^k.$$

3. Proposition :

Soit $n \geq 1$ qu'on écrit en base 10 :

$$n = \overline{a_k a_{k-1} \cdots a_0}^{(10)}$$

Alors $$4 \mid n \iff 4 \mid \overline{a_1 a_0}^{(10)}$$

Preuve : On écrit $n = 10^k \cdot a_k + 10^{k-1} \cdot a_{k-1} + \dots + 10a_1 + a_0$

$$= 10^2 \left(10^{k-2} \cdot a_k + \dots + a_2\right) + 10a_1 + a_0.$$

On vient de voir que $10^2 \left(10^{k-2} a_k + \dots + a_2\right) \equiv 0 \ (4)$.

Donc $n \equiv \overline{a_1 a_0}^{(10)} \ (4)$.

En particulier : $4 \mid n \iff 4 \mid \overline{a_1 a_0}^{(10)}$. ∎

Application : $4 \nmid 5878978$ car $4 \nmid 78$.

Bonus :

La formule du Binôme de Newton s'écrit :

$$(a+b)^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \, a^j b^{k-j}$$

Pour $a = n$ et $b = -1$, cela donne :

$$(n-1)^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \, n^j (-1)^{k-j}$$

$$= (-1)^k \cdot \sum_{j=0}^{k} C_k^j \, n^j (-1)^j$$

Au signe près, c'est la somme qui nous intéresse.
Elle n'est donc nulle que pour $n = 1$.