UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Vendredi 26 Octobre

Premier devoir sur table / Durée : 1h30

Justifier toutes les réponses. Les calculatrices et documents sont interdits
Chaque exercice vaut quatre points.

EXERCICE 1

1 Enoncer le théorème de la division euclidienne.
2 Enoncer les deux propositions du théorème de Gauss.

EXERCICE 2

Soit A et B deux ensembles non vides et $f : A \to B$ une application telle que chaque élément de l'ensemble d'arrivée a exactement quatre antécédents.

1 Représenter (avec des patates) une telle application.
2 L'application f est-elle injective, surjective, bijective ? (Ne pas oublier de justifier)
3 On suppose que l'ensemble B a exactement huit éléments. Donner le nom du principe par lequel on peut calculer le nombre d'éléments de A ? Calculer le nombre d'éléments de A.

EXERCICE 3

1 Ecrire $\overline{100110}^{(2)}$ en base 10.
2 Ecrire $\overline{982}^{(10)}$ en base 7.
3 Le nombre $\overline{6541}^{(7)}$ est-il divisible par 7 ?

EXERCICE 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1, u_1 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. On cherche une formule close pour le terme général de cette suite.

1 Calculer u_2, u_3, u_4.
2 Pour tout entier naturel n, on appelle $\mathcal{P}_n$ la proposition

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_n & = & 2^{n+1} - 3^n \\ \text{et } u_{n+1} & = & 2^{n+2} - 3^{n+1} \end{array}\right.$$

Démontrer par récurrence sur n, que pour tout entier naturel n, la propostion $\mathcal{P}_n$ est vraie.
3 Conclure

EXERCICE 5

1 Le nombre 78908 est-il divisible par 4 ?

2 Montrer que pour tout entier $k \geqslant 2$, l'entier 10^k est divisible par 4.

3 Enoncer puis démontrer un critère de divisibilité par 4. L'appliquer pour savoir si 5878978 est divisible par 4.

Bonus (2 points)

Soit k un entier naturel non nul. Pour quels entiers relatifs n la somme

$$1 - C_k^1 n + C_k^2 n^2 - C_k^3 n^3 + C_k^4 n^4 + ... + (-1)^k C_k^k n^k$$

est elle nulle ?