Algèbre et Arithmétique 1

Feuille n° 2 : logique, théorie des ensembles, combinatoire

Exercices à savoir faire

Exercice 1

1 La proposition « arriver à la gare avant 10h » est-elle une condition nécessaire (suffisante, nécessaire et suffisante) pour « attraper le train de 9h30 » ?
2 Donner une condition suffisante mais pas nécessaire pour qu'un nombre entier soit strictement plus grand que 10.
3 Donner une condition nécessaire mais pas suffisante pour qu'un nombre entier soit divisible par 6.

Exercice 2

1 Que pensez-vous du raisonnement suivant : « Démontrons la proposition suivante : pour tout entier naturel n, $n^3 - n$ est multiple de 3. Soit n un entier naturel. Par exemple $n = 4$. On a alors $n^3 - n = 4^3 - 4 = 4\,(4^2 - 1) = 4.15 = 4.3.5$ qui est bien multiple de 3. La proposition est donc démontrée ».
2 Que pensez-vous du raisonnement suivant : « Démontrons la proposition suivante : il existe un entier naturel n tel que $n^2 - n$ n'est pas multiple de 3. Si $n = 2$, on a $n^2 - n = 4 - 2 = 2$ qui n'est pas multiple de 3. La proposition est donc démontrée ».

Exercice 3

Traduire en une phrase ne comportant pas de symboles mathématiques l'assertion suivante :

$$\forall n \in \mathbf{N}\, \forall n' \in \mathbf{N}\; n \neq 0 \text{ et } n' \neq 0 \Rightarrow \exists y \in \mathbf{N} \exists q \in \mathbf{N} \exists q' \in \mathbf{N}\; y = q\,n \text{ et } y = q'\,n' \text{ et } y \neq 0$$

Exercice 4

Nier la proposition : « tous les habitants de la rue du Havre qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans ».

Exercice 5

On considère les assertions suivantes :

$$\exists n \in \mathbf{N}\; \forall p \in \mathbf{N} \quad p \leq n\,;$$

$$\forall n \in \mathbf{N}\ \exists p \in \mathbf{N} \quad p \leq n\,;$$
$$\exists x \in \mathbf{R}\ \forall y \in \mathbf{R} \quad x + y > 0\,;$$
$$\forall x \in \mathbf{R}\ \exists y \in \mathbf{R} \quad x + y > 0\,;$$
$$\forall x \in \mathbf{R}\ \forall y \in \mathbf{R} \quad x + y > 0\,;$$
$$\exists x \in \mathbf{R}\ \forall y \in \mathbf{R} \quad y^2 > x.$$

1 Écrire la négation de chacune de ces assertions.
2 Pour chacune de ces assertions, dire (en justifiant) si elle est vraie ou fausse.

Exercice 6

Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On considère les énoncés suivants :

1. Pour tout réel x, $f(x)$ est supérieur à 1.
2. L'application f est croissante.
3. L'application f est croissante et positive.
4. Il existe un réel positif x tel que $f(x)$ est positif.
5. L'application f est paire.
6. Il existe un réel x tel que pour tout réel y strictement supérieur à x, $f(x)$ est strictement supérieur à $f(y)$.

1 Traduire ces énoncés en utilisant des quantificateurs.
2 Pour chacune des assertion obtenues, écrire sa négation.
3 Pour chacun de ces énoncés, donner au moins deux exemples d'applications f qui le vérifient, et au moins deux exemples d'applications f qui ne le vérifient pas.

Exercice 7

Démontrer par contraposition la proposition suivante : soit n un entier naturel dont le carré est pair ; alors n est pair.

Exercice 8

Démontrer par l'absurde la proposition suivante : soit x un réel positif tel que pour tout réel $y > 0$ on a $x \leq y$. Alors $x = 0$.

Exercice 9

1 Soit A un sous ensemble de $\mathbf{N}$ dont tous les éléments sont plus grands que 100. Que peut-on dire du plus grand élément du complémentaire de A ?
2 Donner (si possible) l'exemple de deux sous-ensembles A et B de $\mathbf{N}$ tels que le plus petit élément de $A \cap B$ ne soit ni le plus petit élément de A, ni le plus petit élément de B.
3 Donner (si possible) l'exemple de deux sous-ensembles A et B de $\mathbf{N}$ tels que le plus petit élément de $A \cup B$ ne soit ni le plus petit élément de A, ni le plus petit élément de B.

Exercice 10

1 Dessiner si possible (avec des patates) le graphe d'une application surjective f et d'une application g dont la composée $f \circ g$ ne soit pas surjective.
2 Dessiner si possible (avec des patates) le graphe d'une application surjective f et d'une application g dont la composée $g \circ f$ ne soit pas surjective.
3 Dessiner si possible (avec des patates) le graphe d'une application surjective f et d'une application g surjective dont la composée $g \circ f$ ne soit pas surjective.
4 Reprendre les questions précédentes avec « injective » au lieu de « surjective ».

Exercice 11

Soit E un ensemble et A, B deux parties de E. Montrer les égalités $\mathcal{C}_E(A \cup B) = \mathcal{C}_E A \cap \mathcal{C}_E B$ et $\mathcal{C}_E(A \cap B) = \mathcal{C}_E A \cup \mathcal{C}_E B$. Illustrer le résultat avec des patates et des couleurs.

Exercice 12

1 Au mois de janvier, Anatole a pris ses repas de midi au Restau U. Il y a mangé 17 fois de la pizza et 25 fois de la glace. Montrer qu'il a mangé de la pizza et de la glace au cours d'un des repas.
2 Dans une classe de 35 élèves, chaque étudiant doit apprendre au moins une des deux langues, anglais ou allemand. 25 étudient l'anglais et 20 apprennent les deux langues. Combien d'élèves étudient l'allemand ?
3 Hier soir, sur 100 français, 95 ont regardé le journal télévisé, 85 ont regardé le film qui suivait et 70 se sont couché de bonne heure. Combien de français (au moins) se sont couchés tôt après avoir regardé le journal et le film ?

Exercice 13

1 Montrer que dans un ensemble de cardinal 10, deux sous ensembles de cardinal 7 ont une intersection non vide.
2 Montrer que dans un ensemble de cardinal 10, trois sous ensembles de cardinal 7 ont une intersection non vide.
3 Dessiner (si possible) deux ensembles A et B avec cinq éléments chacun et dont la réunion a neuf éléments.
4 Dessiner (si possible) trois ensembles A, B et C avec cinq éléments chacun et dont la réunion a neuf éléments et l'intersection $A \cap B \cap C$ aucun.

Exercice 14

Écrire le triangle de Pascal jusqu'à sa dixième ligne.

Exercices à chercher

Exercice 15

Soit n un entier naturel non nul.

1 On considère deux ensembles A et B et une application $f : A \to B$. On suppose que A est un ensemble fini et que chaque élément de B a exactement n antécédents. Déterminer le cardinal de A.

2 On considère deux ensembles A et B et une application $f : A \to B$. On suppose que A est un ensemble fini et que chaque élément de B a exactement n antécédents sauf l'élément β qui n'a que deux antécédents. Déterminer le cardinal de A.

3 Donner l'exemple d'une application $f : A \to B$ où B est un ensemble fini sans que A le soit.

Exercice 16

Soit E un ensemble. Démontrer les assertions suivantes :

1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cup B \subset A \cap B) \Rightarrow A = B$,
2. $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B \subset A \cap C$ et $A \cup B \subset A \cup C) \Rightarrow B \subset C$.
3. $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C$.

Exercice 17

Soient E et F deux ensembles et f une application $E \to F$.

1 Démontrer les assertions suivantes :

1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$,
2. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$,
3. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
4. $\forall A, B \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
5. $\forall A, B \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$,
6. $\forall A \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$.

2 L'assertion $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad A \subset B \Leftrightarrow f(A) \subset f(B)$ est-elle toujours vraie ? On pourra si besoin donner un contre-exemple avec des patates.

3 L'assertion $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ est-elle toujours vraie ? On pourra si besoin donner un contre-exemple avec des patates.

Exercice 18

Soit E un ensemble et A, B des parties de E.

1 Déterminer toutes les parties X de E vérifiant $A \cup X = B$ (on pourra commencer par remarquer que si A n'est pas inclus dans B, de telles parties n'existent pas ; il reste à examiner le cas où A est inclus dans B ; on pourra s'aider de patates).

2 Déterminer toutes les parties X de E vérifiant $A \cap X = B$.

Exercice 19

Pour n entier naturel, on note $p(n)$ le nombre de parties d'un ensemble à n éléments. Le nombre de parties du produit cartésien $A \times B$ d'un ensemble A à 5 éléments avec un ensemble B à 4 éléments est-il le produit $p(5) \times p(6)$? (Sinon que représente le nombre $p(5) \times p(6)$?)

Exercice 20

On considère n objets de différentes couleurs. Si a est un entier tel que $a \leq \sqrt{n-1}$, montrer que l'on peut trouver ou bien $a+1$ objets de la même couleur, ou bien $a+1$ objets de couleurs toutes différentes.

Exercice 21

Dans un groupe de 6 personnes, deux personnes quelconques ou bien s'aiment, ou bien se détestent. Montrer que l'on peut en trouver 3 qui sont amis, ou 3 qui sont mutuellement ennemis. (*Fixer une personne Anatole ; parmi ses 5 relations, Anatole a (au moins) 3 amis, ou 3 ennemis. Si Anatole a trois amis et que deux d'entre eux sont amis, le résultat est obtenu. Sinon...*)

Exercice 22

1 Soit X et Y deux ensembles finis. Combien y a-t-il d'applications injectives de X dans Y ? (La même question avec « surjectives » est naturelle, mais plus difficile.)
2 Estimer le nombre d'applications injectives de $\{1, \ldots, 30\}$ dans $\{1, \ldots, 365\}$. Sur une classe de 30 élèves, quelle est la probabilité que deux élèves soient nés le même jour ? (*Paradoxe des anniversaires*)

Exercice 23

1 Démontrer la relation $\mathrm{C}_n^p = \mathrm{C}_{n-1}^{p-1} + \mathrm{C}_{n-1}^p$ pour $n > p \geq 1$ en utilisant la formule qui calcule C_n^p à l'aide de factorielles.
2 Inversement, à l'aide de cette identité, démontrer par récurrence la formule qui calcule C_n^p.

Exercice 24

1 Démontrer de deux façons la formule $\mathrm{C}_n^p = \dfrac{n}{p}\mathrm{C}_{n-1}^{p-1}$ pour $n \geq p \geq 1$.
2 Démontrer de deux façons que $\mathrm{C}_n^p = \mathrm{C}_n^{n-p}$.

Exercice 25

1 À l'aide de la formule du binôme, démontrer que

$$\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1} + \mathrm{C}_n^n = 2^n.$$

Donner une interprétation combinatoire de cette formule.

2 Calculer de même $\sum_{p=0}^{n}(-1)^p \mathrm{C}_n^p$ (pour une interprétation combinatoire du résultat, cf. l'exercice 26).

3 Calculer $\sum_{p=1}^{n} p\mathrm{C}_n^p$ et $\sum_{p=2}^{n} p(p-1)\mathrm{C}_n^p$. En déduire la valeur de $\sum_{p=1}^{n} p^2\mathrm{C}_n^p$.

4 Retrouver la question précédente en dérivant (une puis deux fois) la formule du binôme pour $(1+x)^n$.

Exercice 26

Soit E un ensemble fini non vide. On se propose de montrer que E possède autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

1 On suppose dans cette question que E est de cardinal impair. Montrer que l'application $A \mapsto \mathcal{C}_E A$ est une bijection de l'ensemble des parties de E de cardinal pair sur l'ensemble des parties de E cardinal impair et conclure.

2 Dans cette question, E est un ensemble fini non vide quelconque. Soit x un élément de E. Démontrer le résultat cherché en utilisant l'application qui à une partie A de E associe $A \setminus \{x\}$ si $x \in A$ et $A \cup \{x\}$ si $x \notin A$.

3 Pout tout entier naturel n non nul, déduire de la question précédente la formule $\sum_{p=0}^{n}(-1)^p \mathrm{C}_n^p = 0$ (trouvée par une autre méthode à l'exercice 25).

Exercice 27

1 En développant $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$, montrer que $\mathrm{C}_{2n}^n = \sum_{p=0}^{n} \left(\mathrm{C}_n^p\right)^2$. (Remarquer que $\mathrm{C}_n^p = \mathrm{C}_n^{n-p}$.)

2 Donner une interprétation combinatoire de la formule précédente.

Exercice 28

Le but de cet exercice est de montrer que « l'ensemble de tous les ensembles n'existe pas ».

Énoncé de l'exercice : Il s'agit de montrer que l'existence d'un ensemble dont les éléments sont tous les ensembles aboutit à une contradiction. Supposons qu'il existe un tel ensemble X. En considérant l'ensemble $y = \{x \in X,\ x \notin x\}$, aboutir à la contradiction cherchée (indication : y appartient-il à y ? cf. également le paradoxe du barbier ci-dessous). Ainsi l'ensemble X ne peut pas exister.

Commentaires : La découverte de ce « paradoxe » par le logicien Bertrand Russel en 1901 a permis par la suite de dégager de « bons » axiomes pour la formalisation de la théorie des ensembles. Une version « grand public » de ce paradoxe est connue sous le nom de *paradoxe du barbier* : le barbier du village est celui qui rase tous les hommes du village qui ne se rasent pas eux-mêmes, et eux seulement ; le barbier se rase-t-il lui même ?

Exercices pour aller plus loin

Exercice 29

Le principe d'inclusion-exclusion donne lieu à des inégalités : si $A_1, \ldots, A_n$ sont des parties d'un ensemble X, montrer par exemple que

$$\sum_i |A_i| - \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| \leq \left| \bigcup_i A_i \right| \leq \sum_i |A_i| \, .$$

Généraliser.

Exercice 30

Soit $D_{n,k}$ le nombre de permutations de $\{1, \ldots, n\}$ qui ont exactement k points fixes (*dérangements*).

1 Montrer que $D_{n,0} + \cdots + D_{n,n} = n!$.

2 Montrer que $D_{n,k} = \mathrm{C}_n^k D_{n-k,0}$

3 En déduire que

$$\frac{1}{n!} D_{n,0} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}.$$

Exercice 31

On définit la relation suivante sur l'ensemble des nombres entiers naturels : $n \sim m$ si la somme des chiffres de n dans l'écriture décimale est égale à celle de m.

Est-ce une relation réflexive ? symétrique ? anti-symétrique ? transitive ?

Exercice 32

On définit la relation suivante sur l'ensemble des nombres entiers naturels : $n \{ m$ si la somme des chiffres de n dans l'écriture décimale est inférieure à celle de m.

1 Comparer 56, 89, 1211 et 4322.

2 Est-ce une relation réflexive ? symétrique ? anti-symétrique ? transitive ?

Exercice 33

Montrer que la relation $<$ (définie sur l'ensemble des entiers naturels) est anti-symétrique. Est-ce une relation d'ordre sur $\mathbf{N}$?

Exercice 34

Soient E et F des ensembles. On suppose qu'il existe une application injective $f : E \to F$ et une application injective $g : E \to F$. On se propose de montrer qu'il existe alors une bijection de E sur F. Ce résultat est connu sous le nom de *théorème de Cantor-Bernstein* ou parfois *théorème de Cantor-Bernstein-Schröder*.

1 Montrer le résultat si l'on suppose en outre que E ou F est un ensemble fini.

2 Désormais on suppose E et F quelconques. Soit $h = g \circ f$ et $G = E \setminus g(F)$. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties X de E vérifiant $G \cup h(X) \subset X$. Montrer que $\mathcal{F}$ est non vide et que si $X \in \mathcal{F}$ alors $G \cup h(X) \in \mathcal{F}$.

3 Soit A l'ensemble des éléments x de E tels que pour tout $X \in \mathcal{F}$ on a $x \in X$. En d'autres termes $A = \cap_{X \in \mathcal{F}} X$. Montrer qu'on a $G \subset A$, puis que A appartient à $\mathcal{F}$, puis que $G \cup h(A) = A$ (pour cette dernière propriété, utiliser le dernier point de la question précédente).

4 Soit $B = E \setminus A$, $A' = f(A)$ et $B' = g^{-1}(B)$. Montrer qu'on a $A' \cap B' = \varnothing$ et $A' \cup B' = F$.

5 Montrer que l'application $\varphi : E \to F$ définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g^{-1}(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

est une bijection de E sur F.