



Algèbre et Arithmétique 1

DM - à rendre pour le lundi 3 novembre 2008

Un soin particulier devra être apporté à la rigueur.

En particulier, vous vous efforcerez de vous exprimer en utilisant :

- les quantificateurs \forall et \exists
- les opérateurs logiques \implies , \iff , « ou » et « et ».

EXERCICE 1

- 1 Enoncer le théorème de la division euclidienne.
- 2 Enoncer les deux propositions du théorème de Gauss.

EXERCICE 2

Soit A et B deux ensembles non vides et $f : A \rightarrow B$ une application telle que chaque élément de l'ensemble d'arrivée a exactement quatre antécédents.

- 1 Représenter (avec des patates) une telle application.
- 2 L'application f est-elle injective, surjective, bijective? (Ne pas oublier de justifier)
- 3 On suppose que l'ensemble B a exactement huit éléments. Donner le nom du principe par lequel on peut calculer le nombre d'éléments de A ? Calculer le nombre d'éléments de A .

EXERCICE 3

- 1 Ecrire $\overline{100110}^{(2)}$ en base 10.
- 2 Ecrire $\overline{982}^{(10)}$ en base 7.
- 3 Le nombre $\overline{6541}^{(7)}$ est-il divisible par 7?

EXERCICE 4

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1, u_1 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. On cherche une formule close pour le terme général de cette suite.

- 1 Calculer u_2, u_3, u_4 .
- 2 Pour tout entier naturel n , on appelle \mathcal{P}_n la proposition

$$\begin{cases} u_n &= 2^{n+1} - 3^n \\ \text{et } u_{n+1} &= 2^{n+2} - 3^{n+1} \end{cases}$$

Démontrer par récurrence sur n , que pour tout entier naturel n , la proposition \mathcal{P}_n est vraie.

- 3 Conclure

EXERCICE 5

- 1 Le nombre 78908 est-il divisible par 4 ?
- 2 Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, l'entier 10^k est divisible par 4.
- 3 Énoncer puis démontrer un critère de divisibilité par 4. L'appliquer pour savoir si 5878978 est divisible par 4.

Bonus

Soit k un entier naturel non nul. Pour quels entiers relatifs n la somme

$$1 - C_k^1 n + C_k^2 n^2 - C_k^3 n^3 + C_k^4 n^4 + \dots + (-1)^k C_k^k n^k$$

est elle nulle ?