# EXERCICES DE GÉOMÉTRIE AFFINE

**Exercice 1.** *Questions de cours*

a.– Rappeler les définitions du parallélisme et du parallélisme faible.
b.– Soit $(\lambda_i)$ $p$ nombre réels de somme égale à $1$ et $M_i$ $p$ points d'un espace affine. Rappeler le sens de la notation $\sum_i \lambda_i M_i$. Est-il nécessaire que les points $M_i$ soient distincts ?

**Exercice 2.** *A partir des définitions*

Montrer que dans un espace affine $\mathcal{E}$, pour tout point $A$ le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est nul. Montrer que l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ équivaut à l'égalité $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$.

**Exercice 3.**

Donner la liste des sous-espaces affines du plan affine $\mathbf{R}^2$ et de l'espace affine $\mathbf{R}^3$.

**Exercice 4.** *Un exemple dans un ensemble de fonctions*

On considère $\mathcal{C}^2(\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions sur $\mathbf{R}$ deux fois dérivables à dérivée seconde continue. Montrer que le sous-ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation différentielle

$$y'' - y = 1$$

est un espace affine dont on précisera l'espace vectoriel directeur, la dimension et un repère affine.

**Exercice 5.**

Dans un repère affine de l'espace affine $\mathbf{R}^3$, à quelle condition sur les coefficients les plans d'équation $ax + by + cz = d$ et $a'x + b'y + c'z = d'$ sont-ils parallèles ?

**Exercice 6.** *Avec le cours*

- Dans l'espace affine $\mathbf{R}^n$, quelle est la dimension d'un sous-espace affine défini par deux équations affines indépendantes ?
- Deux plans de l'espace affine $\mathbf{R}^3$ peuvent-ils avoir un unique point d'intersection ?

**Exercice 7.** *Dans $\mathbf{R}^3$, à partir d'équations*

Soit l'espace affine $\mathbf{R}^3$ muni d'un repère affine $A_0, A_1, A_2, A_3$.

a.– Montrer que le sous-ensemble $A$ de l'espace affine $\mathbf{R}^3$ d'équation

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in A \iff \begin{cases} 2x - y - z - 3 = 0 \\ x + y - 2z = 3 \end{cases}$$

est un sous-espace affine. Préciser sa dimension, l'espace vectoriel directeur et un repère affine.

b.– Même questions avec $B$ d'équation

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in B \iff \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 3z + 1 \\ 5x + 5y = 10z \end{cases}$$

**Exercice 8.** *Dans* $\boldsymbol{R}^3$*, trouver des équations*

Soit l'espace affine $\mathbf{R}^3$ muni d'un repère affine $A_0, A_1, A_2, A_3$.

a.– Trouver un système d'équations pour le sous-espace affine $\mathcal{A}$ passant par le point $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et parallèle au plan d'équation $(2x - y - z = 5)$.

b.– Trouver un système d'équations pour le sous-espace affine $\mathcal{B}$ passant par le point $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ de direction $\mathbf{R}\overrightarrow{u} \oplus \mathbf{R}\overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{u}$ est le vecteur de coordonées $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}$ le vecteur de coordonées $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans la base $(\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}\overrightarrow{A_0A_3})$.

c.– Trouver un système d'équations pour le sous-espace affine $\mathcal{C}$ engendré par les points $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

**Exercice 9.** *Dans* $\boldsymbol{R}^3$*, trouver encore des équations*

Soit l'espace affine $\mathbf{R}^3$ muni d'un repère affine $A_0, A_1, A_2, A_3$.

a.– Trouver un système d'équations pour le sous-espace affine $\mathcal{D}$ passant par le point $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et parallèle à la droite d'équation $\begin{cases} 2x - y - z = 5 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$.

b.– Trouver un système d'équations pour le sous-espace affine $\mathcal{E}$ passant par le point $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ de direction $\mathbf{R}\overrightarrow{u}$ où $\overrightarrow{u}$ est le vecteur de coordonées $\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$ dans la base $(\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}\overrightarrow{A_0A_3})$.

c.– Trouver un système d'équations pour le sous-espace affine $\mathcal{F}$ engendré par les points $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}$.

**Exercice 10.** *Calcul en coordonnées cartésiennes dans le plan*

Soit $a$ et $b$ deux réels non nuls distincts. Dans un plan affine muni d'un repère, calculer une équation cartésienne de la droite $\Delta$ passant par le point de coordonnées $(a, b)$ et par le point d'intersection des deux droites $D$ d'équation $x/a + y/b = 1$ et $D'$ d'équation $x/b + y/a = 1$.

**Exercice 11.** *Deux droites sécantes dans l'espace*

Dans un espace affine de dimension 3 muni d'un repère affine.

(1) Montrer que les droites $D$ et $D'$ d'équations cartésiennes

$$D\ :\ x + y - z - 2 = 0 \text{ et } 2x - y + 3z - 1 = 0$$

et

$$D'\ :\ x - 2y - 3 \text{ et } 3x + 6y - 1$$

sont concourantes.

(2) Trouver une équation cartésienne du plan qu'elles déterminent.

**Exercice 12.** *Sur les médianes*

Dans l'espace affine $\mathbf{R}^2$, on considère le triangle $ABC$. Choisir un repère affine $A_0, A_1, A_2$ adapté pour montrer simplement que les médianes du triangle $ABC$ sont concourantes. On devra calculer un équation pour chaque médiane et montrer qu'elles sont concourantes.

**Exercice 13.** *Dessiner*

Dans le plan affine $\mathbf{R}^2$ muni d'un repère $A_0, A_1, A_2$, représenter l'enveloppe convexe des points donnés en coordonnées cartésiennes $A\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$, $E\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$.

**Exercice 14.** *Une propriété des tétraèdres*

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3, et $A, B, C, D$ un tétraèdre de $\mathcal{E}$. Montrer que les droites joignant les milieux des cotés opposés du tétraèdre sont concourantes.

**Exercice 15.**

Dans un plan affine, quel est l'ensemble des milieux des segments dont les extrémités appartiennent respectivement à deux segments donnés.

**Exercice 16.** *Centre de gravité*

Dans un plan affine, soit $ABC$ et $A'B'C'$ deux triangles de centre de gravité $G$ et $G'$ respectivement.

(1) Calculer $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CA'}$ en fonction de $G$ et $G'$.
(2) Montrer que $ABC$ et $A'B'C'$ ont le même centre de gravité si et seulement s'il existe un point $D$ tel que $DBA'C$ et $DB'AC'$ soient des parallélogrammes.

**Exercice 17.** *Localiser des points en coordonnées barycentriques*

(1) Soit $(AB)$ une droite dans un espace affine déterminer par deux points distincts $A$ et $B$. Décrire à l'aide des coordonnées barycentriques dans le repère $AB$ les trois régions de la droite découpées par les points $A$ et $B$.
(2) Soit $ABC$ un triangle non plat dans un plan affine $E$. Décrire à l'aide des coordonnées barycentriques dans le repère $ABC$ les sept régions découpées par les droites qui portent les cotés du triangle $ABC$.

**Exercice 18.** *Exercice de construction*

On suppose savoir tracer la parallèle à une droite donnée passant par un point donné. On peut utiliser un compas mais seulement pour reporter des longueurs égales. Partager en sept parties de mêm longueur un segment donné.

**Exercice 19.** *Dans un plan affine*

On considère dans l'espace affine $\mathbf{R}^2$ un triangle non aplati $ABC$. Soit $(a, b)$, $(c, d)$ et $(e, f)$ trois couples de nombre réels de somme non nulle. On désigne par $C'$ le barycentre de $(A, a; B, b)$, $A'$ le barycentre de $(B, c; C, d)$ et $B'$ le barycentre de $(C, e; A, f)$. Montrer que $A'$, $B'$ et $C'$ sont alignés si et seulement si $ace = -bdf$.