Examen de géométrie euclidienne (E01)
(Seconde session)

Exercice 1. *Questions de cours (5pt)*

(1) Dans l'espace affine $\mathbb{R}^n$, quelle est la dimension d'un sous-espace affine défini par deux équations affines indépendantes ?
(2) Donner une condition suffisante qui assure que deux sous espaces affines F et G d'un espace affine E de dimension infinie s'intersectent.
(3) Les isométries sans points fixes du plan sont-elles toutes des translations ?
(4) Une application affine dont la partie linéaire a 1 pour valeur propre peut-elle avoir un point fixe ?
(5) Une application affine dont la partie linéaire a 1 pour valeur propre peut-elle avoir un unique point fixe ?

Exercice 2. *Une isométrie (3pt)*

Dans l'espace affine euclidien muni d'un repère orthonormé, on considère le cube de sommets $A(-1,-1,-1)$, $B(-1,-1,1)$, $C(-1,1,1)$, $D(-1,1,-1)$, $E(1,-1,-1)$, $F(1,-1,1)$, $G(1,1,1)$, $H(1,1,-1)$.

(1) Donner l'image du point A par la symétrie par rapport au plan médiateur de $[FG]$.
(2) Existe-t-il une isométrie de l'espace qui conserve globalement le cube et qui envoie A sur C et B sur G ? Si oui, la déterminer.

Exercice 3. *Un faisceau de plan (3pt)*

Soit P un espace affine de dimension trois et $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ un repère. Déterminer l'intersection commune de tous les plans $P_{\lambda,\mu}$ d'équation

$$(\lambda+\mu)x + 2\lambda y + (3\mu-\lambda)z = 3\lambda - \mu.$$

Exercice 4. *Une symétrie (3pt)*

Soit P un espace affine de dimension trois et $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ un repère. Soit $A(1,2,3)$ et $B(3,2,1)$.

(1) Déterminer l'expression analytique de la symétrie orthogonale par rapport au plan médiateur du segment $[AB]$.
(2) Vérifier votre résultat en déterminant l'image du point A.

Exercice 5. *A l'aide des nombres complexes (4pt)*

Soit P un plan affine euclidien identifié au plan complexe $\mathbb{C}$.

(1) L'application donnée par $z \mapsto \frac{1+i}{\sqrt{2}}\overline{z} + 3$ est-elle une isométrie ?
(2) Déterminer sa nature, ses points fixes, son axe et sa composante de translation.

Exercice 6. *Une propriété des tétraèdres (3pt)*

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3, et A, B, C, D un tétraèdre de $\mathcal{E}$. Montrer que les droites joignant les milieux des cotés opposés du tétraèdre sont concourantes.