UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Partiel de géométrie euclidienne

Exercice 1 (Questions de cours)**.**

1) Dans un espace affine, quel est le sens de la notation $1/3\ A + 1/3\ B + 1/3\ C$ où A, B, C sont trois points ?

2) Soit A, B, C, D quatre points d'un plan affine. Soit I le milieu de $[C, D]$. L'isobarycentre des points A, B, C, D est-il le centre de gravité du triangle A, B, I?

3) Une isométrie est-elle caractérisée par sa partie linéaire ?

4) Deux isométries d'un espace affine euclidien de dimension trois qui ont exactement le même plan P de points fixes sont-elles égales ?

Exercice 2 (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)**.**

Dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire standard et de la base canonique $\mathcal{C}$, appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $\mathcal{B}$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ ; \ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ ; \ v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

pour obtenir une base orthonormée $\mathcal{B}'$.

Exercice 3.

Soit $A(0,0)$ et $B(3,0)$ deux points d'un plan affine euclidien muni d'un repère $\mathcal{R} = (O, i, j)$ cartésien orthonormé. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que

$$2MA^2 - MB^2 = -2.$$

Exercice 4 (Reconnaître une application affine)**.**

Soit E un plan affine euclidien. Soit $\mathcal{R} = (O, i, j)$ un repère cartésien orthonormé de E.

a.— Déterminer l'expression analytique de la translation t de vecteur $\overrightarrow{u} = 3i + j$.

b.— Déterminer l'expression analytique de la symétrie orthogonale s d'axe la droite d d'équation $(x + y = 1)$.

c.— Déterminer l'expression analytique de la composée $f = t \circ s$.

d.— Démontrer que f est une isométrie. Préciser le déterminant de sa partie linéaire. Que peut-on en déduire ?

e.— Déterminer l'ensemble des points fixes de f. Déterminer son axe (on pourra montrer que pour tout point M du plan le milieu du segment $[M, f(M)]$ est sur une droite dont on précisera l'équation).

f.— Déterminer la composante de translation de f.

Exercice 5.

On reprend les notations de l'exercice précédent. Soit E un plan affine euclidien. Soit $\mathcal{R} = (O, i, j)$ un repère cartésien orthonormé de E. On considère la translation t de vecteur $\overrightarrow{u} = 3i + j$ et la symétrie orthogonale s d'axe la droite d d'équation $(x + y = 1)$.

a.— Décomposer le vecteur $\overrightarrow{u}$ dans la somme directe orthogonale $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{d}^{\perp} \oplus \overrightarrow{d}$ en $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$.

b.— Déterminer géométriquement la nature et les éléments caractéristiques de la composée $t_{\overrightarrow{v}} \circ s$. On pourra décomposer chaque isométrie en produits de réflexions.

c.— Déterminer géométriquement la nature et les éléments caractéristiques de la composée $t \circ s$.

Exercice 6.

Rappeler la construction des centres d'homothéties qui envoient un cercle sur un autre de rayon différent.

Construire un cercle tangent à deux droites données et passant par un point donné.