Examen de géométrie euclidienne (E01)
Mai 2007

Les documents et les calculatrices sont interdites. Les exercices sont indépendants.
La précision des arguments et le soin apporté à la rédaction seront pris en compte.

Exercice 1. *Questions de cours (6 points)*

(1) Soit P un plan affine et (A, B, C) un repère affine. Donner la condition d'alignement de trois points en coordonnées barycentriques.
(2) Démontrer que si f est une application linéaire orthogonale d'un espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{E}$ de dimension finie, alors $Ker(f - Id_{\overrightarrow{E}})$ et $Im(f - Id_{\overrightarrow{E}})$ sont supplémentaires orthogonaux.
(3) Donner l'exemple d'une application affine qui n'est pas une isométrie.
(4) Les isométries de déterminant -1 dans un espace affine euclidien de dimension trois ont-elles toutes un point fixe ?
(5) Peut-on écrire une rotation dans le plan euclidien comme composée de cinq réflexions ?
(6) Dans l'espace affine euclidien muni d'un repère orthonormé, on considère le cube de sommets $A(-1, -1, -1)$, $B(-1, -1, 1)$, $C(-1, 1, 1)$, $D(-1, 1, -1)$, $E(1, -1, -1)$, $F(1, -1, 1)$, $G(1, 1, 1)$, $H(1, 1, -1)$. Existe-t-il une isométrie de l'espace qui envoie A sur B et G sur F ? Si oui, la déterminer.

Exercice 2. *Une symétrie (2 points)*

Soit E un espace affine de dimension trois et $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ un repère. Soit $A(1, 2, 3)$ et $B(3, 2, 1)$ deux points de E.

(1) Déterminer l'expression analytique dans le repère $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ de la symétrie orthogonale par rapport au plan médiateur du segment $[AB]$.
(2) Vérifier votre résultat en déterminant l'image du point A.

Exercice 3. *Ligne de niveau d'une fonction de Leibniz (3 points)*

On munit le plan affine euclidien $(P, <, >)$ d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. On considère les points $A(-1, 2)$ et $B(5, 4)$.

(1) Déterminer les coordonnées du barycentre G des points massiques $A(-3)$ et $B(1)$.
(2) Calculer $-3GA^2 + GB^2$.
(3) Démontrer que pour tout point M du plan, on a
$$-3MA^2 + MB^2 = -2MG^2 - 3GA^2 + GB^2.$$
(4) Déterminer l'ensemble $\mathcal{L}$ des points M du plan tels que $-3MA^2 + MB^2 = 50$.

Tourner la page, s.v.p.

Exercice 4. *Conique (3 points)*

Dans l'espace affine $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$, on considère le cône $\mathcal{C}$ d'équation $y^2 + z^2 = 3(x-2)^2$.

(1) Déterminer un plan dont l'intersection avec le cône $\mathcal{C}$ soit un cercle.
(2) Déterminer la nature de l'intersection de $\mathcal{C}$ avec le plan d'équation $z = 1$. On précisera (s'ils existent) le centre, les axes de symétrie et les asymptotes .

Exercice 5. *Isométries et constructions (4 points)*

(1) On considère dans le plan euclidien orienté un point A et la rotation r de centre A d'angle $+\pi/2$. Soit M un point et $M' = r(M)$ son image par r. Soit d une droite passant par M. Décrire un point et la direction de l'image $r(d)$ de la droite d.
(2) Soit d_1 et d_2 deux droites et $B \in d_1$ et $C \in d_2$ tel que ABC soit un triangle rectangle isocèle en A (avec $mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = +\pi/2$). Démontrer que C appartient à l'image de la droite d_1 par r.
(3) Soit δ_1 et δ_2 deux droites non perpendiculaires et E un point du plan. Construire un triangle EFG rectangle isocèle en E et tel que $F \in \delta_1$ et $G \in \delta_2$.

Exercice 6. *Produits de réflexions et composition (4 points)*

Dans le plan euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, on considère la translation t de vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\imath} + 2\overrightarrow{\jmath}$ et la rotation r de centre $A(-3, -1)$ et d'angle $+\pi/2$.

(1) Montrer que $t \circ r$ a un unique point fixe.
(2) Décomposer la translation t en produit $s_{d_2} \circ s_{d_1}$ de réflexions par rapport à des droites d_1 et d_2 que l'on décrira.
(3) Décomposer la rotation r en produit $s_{d_4} \circ s_{d_3}$ de réflexions par rapport à des droites d_3 et d_4 que l'on décrira.
(4) Est-il possible de choisir $d_1 = d_4$ dans les questions précédentes ?
(5) Déterminer par une méthode géométrique la nature et les éléments caractéristiques de la composée $t \circ r$.

Le corrigé sera disponible sur internet.