EXERCICES SUR LES ESPACES VECTORIELS EUCLIDIENS

Notation : dans tous les exercices qui suivent, $E = (E, <,>)$ désigne un espace vectoriel euclidien de dimension finie.

Exercice 1.

Démontrer les inégalités $\forall(x,y) \in E^2, |\|x\| - \|y\|| \leq \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Exercice 2 (Egalité du parallélogramme)**.**

Calculer la somme des carrés des longueurs des diagonales d'un parallélogramme en fonction des longueurs de ses cotés.

Exercice 3 (Introduire un produit scalaire)**.**

Soit n nombres réels x_i. Montrer que $\left(\sum_1^n x_i\right)^2 \leq n \sum_1^n x_i^2$.

Exercice 4 (Construire un produit scalaire)**.**

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique (e_1, e_2). Peut-on construire un produit scalaire $f(xe_1 + ye_2, x'e_1 + y'e_2)$ sur $\mathbb{R}^2$ de sorte que les vecteurs $e_1 + 2e_2$ et $e_1 + 3e_2$ forment une base orthonormée ?

Exercice 5.

On suppose que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice 6 (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)**.**

Dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire standard et de la base canonique $\mathcal{C}$, appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $\mathcal{B}$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \; v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \; v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

pour obtenir une base orthonormée $\mathcal{B}'$.

La matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$ est-elle orthogonale ? L'écrire. La matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}'$ est-elle orthogonale ?

Exercice 7 (Bases orthonormées)**.**

Dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire standard et de la base canonique (e_1, e_2, e_3), déterminer une base orthonornée du sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs $(e_1 + e_2, e_1 + e_3)$ et la compléter en une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 8.

On considère $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire usuel. Soit F le sous espace engendré par $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, -1, 1)$ et $v_3 = (2, 3, -1, 1)$. Déterminer une base orthonormée de F et la compléter pour obtenir une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 9 (Vrai ou faux, Préciser)**.**

Soit $(E, < \ . \ >)$ un espace vectoriel euclidien. Répondre par vrai ou faux, puis dire sous quelles hypothèses supplémentaires sur la base l'affirmation est vraie.

(1) La matrice A d'une application linéaire orthogonale u dans une base $\mathcal{B}$ de E vérifie ${}^tAA = Id$.
(2) Dans toute base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, la matrice d'une rotation est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Exercice 10 (Projections)**.**

Soit E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique et de la base canonique. Soit H le plan d'équation $x + 2y + 2z = 0$. Soit π la projection orthogonale sur H et s la symétrie orthogonale par rapport à H.

(1) Déterminer un vecteur ϵ_1 normal à H et unitaire.
(2) Pour tout vecteur V de E, écrire $V - \pi(V)$, puis $\pi(V)$ à l'aide de V et ϵ_1 seulement. (On pourra utiliser des produits scalaires comme coefficients).
(3) Déterminer les matrices de π et de s dans la base canonique. Sont-elles orthogonales, symétriques ?

Exercice 11.

Soit φ une forme linéaire sur E (c'est à dire une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$) et a un vecteur non nul. Montrer que l'application $f : E \to E$ définie par $f(x) = x + \varphi(x)\, a$ est une isométrie vectorielle si et seulement si φ est nulle ou $\varphi(x) = -2\frac{\langle x,a\rangle}{\langle a,a\rangle}$. Quelle est l'isométrie correspondant à chacun de ces cas ?

Exercice 12.

Montrer que deux symétries orthogonales distinctes d'un plan vectoriel euclidien commutent si et seulement si leurs axes sont orthogonaux.

Exercice 13.

Soient a et b deux vecteurs unitaires distincts de $\mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe une unique symétrie hyperplane d'axe H qui échange a et b et déterminer H.

Exercice 14 (Rotation)**.**

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 3 & 2 & 6 \\ 6 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

(1) Montrer que f est une rotation. (En dimension 3, une rotation est une isométrie de déterminant 1.)
(2) Trouver un vecteur unitaire V_1 dans l'axe de la rotation.
(3) Compléter en une base orthomormée de $\mathbb{R}^3$.
(4) Ecrire la matrice de f dans cette base.

Exercice 15 (Projection orthogonale)**.**

(1) Montrer que dans un espace euclidien, une projection orthogonale est auto-adjointe. Que peut-on en déduire pour sa matrice dans une base orthonormée ?
(2) Montrer que dans un espace euclidien, une projection auto-adjointe est une projection orthogonale.
(3) Soit $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que f est une projection orthogonale dont on précisera l'image.

Exercice 16 (Sur les involutions)**.**

Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit u une transformation orthogonale de E telle que $u^2 = Id$. On dit que u est une involution.

(1) Montrer que u est diagonalisable.
(2) Montrer que les sous-espaces propres de u sont orthogonaux.
(3) Soit $a \in E - \{0\}$ et

$$\begin{array}{rccc} u_a : & E & \to & E \\ & x & \mapsto & x - 2\frac{\langle x,a\rangle}{\langle a,a\rangle}a \end{array}$$

Montrer que u_a est une involution orthogonale. Déterminer ses espaces propres et décrire u géométriquement.

(4) Soit u une involution orthogonale et w une transormation orthogonale. Montrer que wuw^{-1} est une involution orthogonale et que $Ker(wuw^{-1} - Id) = w\big(Ker(u - Id)\big)$.
(5) Soit $a, b \in E - \{0\}$. Montrer que u_a et u_b sont conjuguées par une transformation orthogonale.

Exercice 17 (Une inégalité ?)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}$.

(1) Peut-on trouver une constante C strictement positive telle que pour tout couple $(a_i)_{i\in\mathbb{N}_n}, (b_i)_{i\in\mathbb{N}_n}$ de n-uplets de nombres réels
$$\left|\sum_1^n a_i b_i\right| \leq C \sum_1^n a_i^2 \sum_1^n b_i^2 ?$$
(2) Peut-on trouver une constante C strictement positive telle que pour tout couple $(a_i)_{i\in\mathbb{N}_n}, (b_i)_{i\in\mathbb{N}_n}$ de n-uplets de nombres réels
$$\left(\sum_1^n a_i b_i\right)^2 \leq C \sum_1^n a_i^2 \sum_1^n b_i^2 ?$$
(3) Peut-on trouver une constante C strictement positive telle que pour tout couple $(a_i)_{i\in\mathbb{N}_n}, (b_i)_{i\in\mathbb{N}_n}$ de n-uplets de nombres réels
$$\left(\sum_1^n a_i b_i\right)^2 \geq C \sum_1^n a_i^2 \sum_1^n b_i^2 ?$$

Exercice 18 (Des constructions (dans le plan affine euclidien))**.**

(1) Étant donné un segment de longueur a, construire un segment de longueur $a\sqrt{5}$. Vérifier que $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ en montrant que ce nombre est la racine positive de l'équation $4X^2 + 2X - 1 = 0$. Construire un pentagone régulier.
(2) Étant donné deux segments de longueur a et b,(et un segment de longueur 1), construire un segment de longueur ab et un segment de longueur $1/a$. (On pourra utiliser un théorème classique)
(3) Nos grand-parents apprenaient que dans un triangle rectangle, la hauteur issue de l'angle droit est moyenne-proportionnelle avec les segments qu'elle découpe sur l'hypothénuse. Quel est le sens de cette phrase ?
(4) Étant donné un segment de longueur a (et un segment de longueur 1), construire un segment de longueur $\sqrt{a}$.
(5) Étant donné un segment de longueur a (et un segment de longueur 1), construire un segment de longueur a^2.