EXERCICES SUR LES APPLICATIONS AFFINES

Exercice 1.

Une application affine peut-elle avoir exactement deux points fixes distincts ?
Donner un exemple d'application affine sans point fixe, qui n'est pas une translation.

Exercice 2. *Les translations*

Montrer à l'aide de la règle du parallélogramme que les seules applications affines dont la partie linéaire est l'identité sont les translations.

Exercice 3. *Les homothéties*

Soit E un espace affine et f une application affine dont la partie linéaire est multiple de l'identité de $\overrightarrow{E}$.

On suppose que $\overrightarrow{f} = \lambda Id_{\overrightarrow{E}}$ avec $\lambda \neq 1$. Décrire les valeurs propres de $\overrightarrow{f}$. Montrer que f a un unique point fixe. Montrer alors que f est une homothétie.

Exercice 4. *Les projections*

Soit E un espace affine et F et G deux sous espaces affines de direction supplémentaire dans $\overrightarrow{E}$. Décrire $F \cap G$.

1) Soit M un point de E. Montrer que le sous-espace affine passant par M et parallèle à G rencontre F en un unique point noté $p(M)$.

2) Montrer que l'application p est affine.

3) Déterminer les points fixes de p.

4) Montrer que $p \circ p = p$.

Exercice 5. *Les symétries*

Soit E un espace affine et F et G deux sous espaces affines de direction supplémentaire dans $\overrightarrow{E}$. 1) Décrire la symétrie s par rapport à F parallèlement à G. Est-elle bijective ?

2) Soit M un point de E. Quel est le milieu du segment $[M, s(M)]$?

3) Déterminer $ker(\overrightarrow{s} - Id_{\overrightarrow{E}})$ et $ker(\overrightarrow{s} + Id_{\overrightarrow{E}})$.

4) Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de G. Déterminer l'application $s \circ t_{\overrightarrow{u}} \circ s^{-1}$.

Exercice 6. *Les affinités et transvections*

Dans l'espace affine $E = \mathbf{R}^3_{aff}$, on considère un endomorphisme affine f qui admet un hyperplan de points fixes F. Soit A un point de E qui n'est pas dans F.

1) Que dire de f si $f(A) = A$?

2) On suppose maintenant que $f(A)$ est différent de A. On suppose de plus que la droite $(Af(A))$ coupe le plan F en un point Ω. Expliquer comment construire $f(M)$? On dit alors que l'application f est une affinité.

3) On suppose maintenant que $f(A)$ est différent de A. On suppose de plus que la droite $(Af(A))$ ne rencontre pas le plan F. Expliquer comment construire $f(M)$? On dit alors que l'application f est une transvection.

Exercice 7.

Soit le plan affine E muni du repère cartésien $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On considère l'application f qui à tout $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe le point $M' \begin{pmatrix} 2x - 5y + 3 \\ -4x + 10y - 1 \end{pmatrix}$.

a.– Montrer que f est affine et écrire la matrice de son application linéaire associée $\overrightarrow{f}$ dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

b.– Déterminer les points fixes de f.

c.– Montrer que $Im\overrightarrow{f}$ et $Ker\overrightarrow{f}$ sont supplémentaires dans $\overrightarrow{E}$. Donner une base de chacun de ces sous-espaces.

Exercice 8. *Écrire des expressions analytiques*

Dans l'espace affine $\mathbf{R}^3$ muni d'un repère affine A_0, A_1, A_2, A_3, donner l'expression analytique

(1) a.– de l'homothétie h de centre $C \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et de rapport 4.

b.– de la symétrie s d'axe $(x + y + z = 1)$ parallèlement à $\overrightarrow{A_0A_1}$.

c.– de l'affinité a de base $(x + y + z = 1)$ de rapport 3 parallèlement à $\overrightarrow{A_0A_1}$.

d.– de la transvection t de base $(x + y + z = 1)$ qui envoie A_0 sur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(2) Donner des expressions analytiques des applications affines précédentes dans des repères mieux adaptés à déterminer.

Exercice 9. *Constructions*

1) Deux droites se coupent hors de la feuille en un point I. Soit A un point de la feuille. Tracer la droite (AI).

2) Soit d et d' deux droites parallèles et M un point du plan. Tracer avec une règle (non graduée) la parallèle à d passant par M.