Corrigé du QCM 4

1. On munit l'intervalle $[0,1]$ de la métrique triviale d définie par :

$$\begin{cases} d(x,x)=0 & \text{si} \quad x\in[0,1]\,, \\ d(x,y)=1 & \text{si} \quad x\in[0,1]\,,\ y\in[0,1] \text{ et } x\neq y\,. \end{cases}$$

Soit $(x_n)_n \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $x\in[0,1]$. Alors il existe un entier $N\in\mathbb{N}$ tel que $x_n = x$ pour tout $n\geq N$: $\begin{cases} \square & \text{oui} \\ \square & \text{non} \end{cases}$

La réponse est **oui**. *Par définition de la convergence de $(x_n)_n$ vers x, il existe un entier $N\in\mathbb{N}$ tel que :*

$$d(x_n,x)\leq \tfrac{1}{2}\,,\quad \forall\, n\geq N\,.$$

Compte tenu de la définition de d, on a forcément $x_n = x$.

2. On munit l'intervalle $[0,1]$ de la métrique triviale d définie par :

$$\begin{cases} d(x,x)=0 & \text{si} \quad x\in[0,1]\,, \\ d(x,y)=1 & \text{si} \quad x\in[0,1]\,,\ y\in[0,1] \text{ et } x\neq y\,. \end{cases}$$

L'espace métrique $[0,1]$ ainsi défini est compact : $\begin{cases} \square & \text{oui} \\ \square & \text{non} \end{cases}$

La réponse est **non**. *On raisonne par l'absurde. Supposons que l'espace métrique $[0,1]$ soit compact. Considérons alors la suite $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$. Il est possible d'en extraire une sous-suite convergente vers $x\in[0,1]$. D'après la question* **1.**, *cette sous-suite devient stationnaire (égale à x) à partir d'un certain cran N. Ce n'est clairement pas le cas.*

3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne. On note $B(0,1]\subset\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la boule fermée de centre 0 et de rayon 1, munie de la topologie induite. On considère une fonction continue $f\,:\,B(0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$. Alors il existe $x\in B(0,1]$ tels que $f(y)\leq f(x)$ pour tout $y\in B(0,1]$: $\begin{cases} \square & \text{oui} \\ \square & \text{non} \end{cases}$

La réponse est **oui**. *La boule $B(0,1]$ est compacte. La fonction f atteint sa borne supérieure (corollaire 3.4.2).*

4. On considère le $\mathbb{R}-$espace vectoriel E formé des suites convergeantes de nombres réels. Ainsi, tout élément x de E est donné par $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $x_n\in\mathbb{R}$. On admet que l'ensemble E muni de la norme $\parallel x\parallel_\infty := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel normé. On définit l'application $f\,:\,E\longrightarrow\mathbb{R}$ qui à la suite $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E$ associe la valeur de sa limite. Alors :
$\begin{cases} \square & \text{l'application } f \text{ est linéaire} \\ \square & \text{l'application } f \text{ est continue} \end{cases}$

La réponse est deux fois **oui**. *L'application f est linéaire comme conséquence des règles générales de convergence des sommes et produits (par un scalaire) des suites. Elle est aussi continue (de norme égale exactement à 1) car pour tout $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E$, on a :*

$$f(x) \,=\, \lim_{n\longrightarrow\infty}\ x_n \ \leq \parallel x\parallel_\infty\,.$$