1 Premières propriétés des nombres réels

2 Suites numériques

3 Suites monotones : à faire

4 Séries numériques

4.1 Notion de série.

Définition 4.1. *Soit* (u_n) *une suite de nombres réels ou complexes. Pour* $N \in \mathbb{N}$*, on note* S_N *la somme des termes* u_n *dont l'indice* n *est compris entre* 0 *et* N *:* $S_N = u_0 + \ldots + u_N$*. La suite* $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ *est appelée série de terme général* u_n*. Pour* $N \in \mathbb{N}$*, le terme* S_N *est appelé somme partielle d'ordre* N *de la série.*

Exemples.
(a) Pour la suite des entiers $(u_n) = (n)$, on obtient pour tout N, $S_N = 0+1+\ldots+N = \frac{N(N+1)}{2}$.
(b) Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, $q \neq 1$, on obtient :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ S_N = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}.$$

(c) Si $(u_n) = (\frac{1}{(n+1)(n+2)})$, on observe que pour tout entier n, $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$, d'où $S_N = 1 - \frac{1}{N+2}$ pour tout entier N.
(d) La série harmonique est la série dont le terme général u_n est donné par $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$ (avec $u_0 = 0$), de sommes partielles $S_N = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{N}$.
(e) La série harmonique alternée est la série dont le terme général u_n est donné par $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ pour $n \geq 1$ (avec $u_0 = 0$), de sommes partielles $S_N = \frac{-1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \ldots + \frac{(-1)^N}{N}$.

Utilisation du signe $\sum$

Pour compacter l'écriture et éviter l'ambiguïté des pointillés, on note $\sum\limits_{n=0}^{N} u_n$ (ou aussi $\sum\limits_{0\leq u_n\leq N} u_n$) au lieu de $u_0 + \ldots + u_N$.
- La somme $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} u_n$ ne dépend que de N et pas de n ; on dit que l'indice n est muet. On peut tout aussi bien écrire par exemple $S_N = \sum\limits_{k=0}^{N} u_k$; il faut seulement prendre garde à remplacer la lettre n par la lettre k partout où elle apparaît.
- On peut faire des "changements d'indice". Par exemple, en faisant le changement $n' = n+1$, on obtient $\sum\limits_{n=0}^{N} \frac{1}{n+1} = \sum\limits_{n'=1}^{N+1} \frac{1}{n'} = \sum\limits_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n}$.

Remarque.
Si (S_n) est la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n, on a $u_0 = S_0$ et $u_n = S_n - S_{n-1}$ pour $n > 0$. Inversement, si on se donne une suite (v_n), on peut considérer la suite (u_n) telle que $u_0 = v_0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = v_n - v_{n-1}$ (c'est par exemple ce qu'on fait quand on étudie la monotonie de (v_n)). On a alors $v_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ pour tout N. On peut donc considérer la suite (v_n) comme la série de terme général u_n.

4.2 Convergence d'une série.

Définition 4.2. *Soit (u_n) une suite réelle ou complexe et pour $N \in \mathbb{N}$, $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$.*
Dire que la série de terme général u_n converge (resp. diverge) signifie que la suite (S_N) des sommes partielles converge (resp. diverge). Dans le cas convergent, $\lim_{N\to+\infty} S_N = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n$ est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et appelée somme de la série.

Retour sur les exemples.
(a) Cette série diverge.
(b) La série converge si et seulement si $|q| < 1$ et dans ce cas, on obtient la formule (fondamentale) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

(c) En exercice.

Remarque. Si deux suites ont tous leurs termes égaux à partir d'un certain rang n_0, les sommes partielles des deux séries correspondantes diffèrent d'une constante à partir du rang n_0. Les deux séries sont donc de même nature (convergentes/divergentes).
Autrement dit, la nature d'une série de terme général u_n ne dépend pas des premiers termes de la suite (u_n).

Proposition 4.3. Une condition nécessaire de convergence.
Si la série de terme général u_n converge, on a $\lim_n u_n = 0$.

Démonstration. Supposons que la série converge et soit S_∞ sa somme. Pour tout entier n, on a $u_n = S_n - S_{n-1}$; donc (u_n) converge et sa limite est $S_\infty - S_\infty = 0$. ∎

△ **La réciproque est fausse.**
Exemple. Le terme général de la série harmonique converge vers 0, mais la série diverge.
En effet, si on suppose (par l'absurde) qu'elle converge, on a $\lim_{N\to+\infty}(S_{2N} - S_N) = 0$. Mais pour

tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a $(S_{2N} - S_N) = \sum\limits_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{n} \geq N \times \frac{1}{2N} \geq \frac{1}{2}$, d'où une contradiction.

Une série dont le terme général ne converge pas vers 0 est dite *grossièrement divergente.*

Proposition 4.4. Opérations sur les séries. *Soient λ un réel (ou un complexe) et (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels (ou complexes).*

1. *Si la série de terme général u_n converge, la série de terme général λu_n converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n) = \lambda(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n)$.*
2. *Si les deux séries de terme général u_n et v_n convergent, la série de terme général $u_n + v_n$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = (\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n) + (\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n)$.*

4.3 Séries numériques à termes réels positifs

Proposition 4.5. *Soit (u_n) une suite dont tous les termes sont réels positifs.*
La série de terme général (u_n) converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Démonstration. La suite (S_n) des sommes partielles est croissante. Si elle est majorée, elle converge. Sinon, elle diverge vers $+\infty$. ■

Définition. Séries de Riemann. Soit $\alpha \in R$. La série dont le terme général est donné par $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ pour $(n \geqslant 1)$ (avec $u_0 = 0$) est appelée série de Riemann d'exposant α.

Théorème 4.6. *La série de Riemann d'exposant α est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.*

Démonstration. Dans le cas $\alpha \leq 0$, le terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ ne converge pas vers 0, donc la série est grossièrement divergente.
Dans le cas $\alpha = 1$, on retrouve la série harmonique qui est divergente.
Dans les autres cas, on compare les sommes partielles de la série avec des intégrales de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ (faire un dessin de son graphe). On a en effet, pour $k \geq 2$

$$\frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\, dt \leq \frac{1}{(k-1)^\alpha}$$

Supposons $1 < \alpha$. On obtient, pour tout $n \geq 2$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\, dt \leq 1 + \int_{1}^{n} \frac{1}{t^\alpha}\, dt = 1 + \frac{1}{\alpha - 1}(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}) \leq 1 + \frac{1}{\alpha - 1}$$

La suite (S_n) est majorée donc la série (à termes réels positifs) converge.

Supposons $0 < \alpha < 1$. On obtient de même pour tout $n \geq 2$,

$$S_n = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{(k-1)^\alpha} \geq \sum_{k=2}^{n+1} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\, dt \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}\, dt = \frac{1}{1-\alpha}((n+1)^{1-\alpha} - 1).$$

Le terme de droite diverge vers $+\infty$. Il en est de même de la suite (S_n). La série est donc divergente. ■

Exercice. Appliquer ce même procédé dans le cas $\alpha = 1$ pour retrouver la divergence de la série harmonique et montrer que de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n})}{\ln n} = 1$.

Proposition 4.7. Comparaison de deux séries 1. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes réels positifs et telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq u_n \leq v_n$. Alors*

1. *Si la série de terme général v_n converge, celle de terme général u_n converge aussi et on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$.*
2. *Si la série de terme général u_n diverge, celle de terme général v_n diverge aussi.*

Démonstration. (i) Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n=0}^{N} u_n \leq \sum_{n=0}^{N} v_n \qquad (*)$$

Si la série de terme général v_n converge, la suite de ses sommes partielles est majorée ; d'après (*) la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n est majorée et cette série est à terme positifs, donc elle converge. L'inégalité entre les deux sommes s'obtient en passant à la limite dans (*).
(ii) est une conséquence immédiate de (i). ■

Exemples.

1. Si $(u_n) = (\frac{2^n-1}{3^n+1})$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$; le terme de droite est celui d'une série géométrique de raison $\frac{2}{3}$, qui converge car $|\frac{2}{3}| < 1$; donc la série de terme général u_n (positif) converge aussi.
2. Si $(u_n)_{n\geq 1} = (\frac{\log(n+3)}{n})_{n\geq 1}$, pour tout $n \geq 1$, on a $u_n \geq \frac{1}{n} \geq 0$. La série de terme général u_n est donc divergente, comme la série harmonique.

En comparant avec une série géométrique, on obtient les deux critères suivants :

Proposition 4.8. Critère de d'Alembert
Soit (u_n) une suite à termes réels strictement positifs. Supposons que $\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, où $l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
(i) Si $\ell < 1$, la série converge.
(ii) Si $\ell > 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et la série diverge grossièrement.

Démonstration.

(i) Supposons $\ell < 1$ et soit $q = \frac{\ell+1}{2}$. Dans ce cas, on a $0 \leq \ell < q < 1$. Il existe un entier n_0 tel que pour $n \geq n_0$, on ait $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$, soit (puisque $u_n > 0$), $u_{n+1} \leq qu_n$. On en déduit $\forall n \geq n_0$, $u_n \leq q^{n-n_0}u_{n_0} = q^n \frac{u_{n_0}}{q^{n_0}}$. La série géométrique de terme général q^n converge puisque $0 \leq q < 1$. Le premier critère de comparaison montre que la série de terme général u_n converge.
(ii) Supposons $\ell > 1$ et soit $q = \frac{\ell+1}{2}$ si $\ell \in \mathbb{R}$, $q = 2$ si $\ell = +\infty$, de sorte que dans les deux cas, on a $1 < q < \ell$. On montre de même qu'il existe un entier n_0 tel que pour $n \geq n_0$, on ait $u_n \geq q^n \frac{u_{n_0}}{q^{n_0}}$. Ici, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$; par suite la série de terme général u_n diverge grossièrement. ■

Proposition 4.9. Critère de Cauchy.
Soit (u_n) une suite réelle à termes positifs. Supposons que $\lim_n (u_n)^{\frac{1}{n}} = \ell$, où $l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.
(i) Si $\ell < 1$, la série converge.
(ii) Si $\ell > 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et la série diverge grossièrement.

La démonstration se fait comme celle du critère de d'Alembert.
Exemples. (a) Si $(u_n) = (\frac{3^n}{n+1})$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 3\frac{n}{n+1}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 3 > 1$; la série de terme général u_n diverge d'après le critère de d'Alembert.
(b) Si $(u_n) = (\frac{1}{(n+1)^n})$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $(u_n)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n+1}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = 0$; la série de terme général u_n converge d'après le critère de Cauchy.

△ Attention !
- Il peut arriver que $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ ou $u_n)^{\frac{1}{n}}$ n'aient pas de limite.
- Le critère de d'Alembert (resp. de Cauchy) ne permet pas de conclure lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ (resp. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = 1$) : observer le cas des séries de Riemann.

Proposition 4.10. Comparaison de deux séries 2. *Soient u_n et v_n les termes généraux de deux séries à termes réels strictement positifs. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, alors les deux séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature.*

Démonstration. Prenons $\epsilon = \frac{1}{2}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, on a $\frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{3}{2}$, donc $\frac{1}{2}v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2}v_n$. Il suffit d'appliquer la proposition "comparaison de deux séries 1". ■

On fait déjà beaucoup de choses en comparant avec des séries géométriques ou de Riemann.
Exemples.

1. Si $(u_n) = (\frac{1}{(n+1)^\alpha + \sin n})$ avec $\alpha > 0$, les termes généraux u_n et $\frac{1}{n^\alpha}$ sont strictement positifs et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n^\alpha} = 1$. Donc la série de terme général u_n est de même nature que la série de Riemann d'exposant α. Elle converge si et seulement si $\alpha > 1$.
2. Soit $(u_n) = (\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2})$. On peut voir que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n n^{\frac{3}{2}} = 0$, donc que pour n assez grand, $0 \leq u_n n^{\frac{3}{2}} \leq 1$, ce qui donne $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Les deux séries sont à termes positifs. La série de Riemann d'exposant $\frac{3}{2}$ converge ($\frac{3}{2} > 1$) et majore celle de terme général u_n, donc

celle-ci converge aussi.

3. Soit $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}\ln(n+2)}$. On a $\lim_{n\to+\infty} nu_n = +\infty$, donc pour n assez grand, $u_n \geq \frac{1}{n} > 0$, d'où l'on déduit la divergence de la série de terme général u_n.

4.4 Séries absolument convergentes.

Définition. Soit (u_n) une suite réelle ou complexe. Dire que la série de terme général u_n est absolument convergente signifie que la série de terme général (réel positif) $|u_n|$ est convergente.

Proposition 4.11. *Une série absolument convergente est convergente.*

△ Attention ! La réciproque est fausse. La série harmonique alternée de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ pour $n \geq 1$ n'est pas absolument convergente, mais on verra en 4.5 qu'elle converge.
Une série qui converge mais n'est pas absolument convergente est dite *semi-convergente.*
Démonstration. Supposons tous les termes u_n réels. Pour tout entier n, on note $u_n^+ = \sup(u_n, 0)$ et $u_n^- = \sup(-u_n, 0)$ les parties positives et négatives de u_n ; on a alors $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$ et $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$. Les séries ayant respectivement pour terme général u_n^+ et u_n^- sont convergentes d'après le premier critère de comparaison. Comme $u_n = u_n^+ - u_n^-$ pour tout n, le résultat résulte de la proposition 2.4.
Pour des termes complexes, on note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_n + ib_n$, où a_n et b_n sont réels ; on a $|a_n| \leq |u_n|$ et $|b_n| \leq |u_n|$. Les séries (réelles) ayant respectivement pour terme général a_n et b_n sont absolument convergentes d'après le premier critère de comparaison, donc convergentes d'après ce qui précède. Le résultat résulte à nouveau de la proposition 2.4. ■

Exemples.
(a) Si $(u_n) = (\frac{(-1)^n}{n^2})$, on a $(|u_n|) = (\frac{1}{n^2})$, la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, donc la série $\sum u_n$ est absolument convergente.
(b) Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $(u_n) = (\frac{z^n}{\sqrt{n+1}\ln(n+2)})$; on a $(|u_n|) = (\frac{|z|^n}{\sqrt{n+1}\ln(n+2)})$. On peut essayer d'appliquer le critère de d'Alembert à la série de terme général strictement positif $|u_n|$; on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = |z|$. Donc :
(i) si $|z| < 1$, la série $\sum |u_n|$ converge, donc la série de terme général u_n est absolument convergente (a fortiori convergente) ;
(ii) si $|z| > 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$, donc la série de terme général u_n est grossièrement divergente.
Si $|z| = 1$, ce critère ne permet pas de conclure. Mais dans ce cas, on a $|u_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1}\ln(n+2)}$ et on a vu plus haut que cette série diverge. Si $z = 1$, la série diverge ; sinon, la série $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente (cela ne préjuge pas de sa convergence ou de sa divergence).

4.5 Séries alternées.

Définition. La série de terme général réel u_n est alternée si le terme général u_n est alternativement positif ou négatif, c'est-à-dire
- soit $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n |u_n|$,
- soit $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^{n+1} |u_n|$.

Exemples.
(a) La série de terme général $\ln(1 + \frac{(-1)^n}{n+1})$.
(b) La série harmonique alternée de terme général $(-1)^n \frac{1}{n}, n \geq 1$.

Proposition 4.12. *Si la série de terme général u_n est alternée et si la suite $(|u_n|)$ décroît vers 0, la série est convergente. Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = (S_{+\infty} - S_n)$ a le signe de u_{n+1} et vérifie $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.*

Démonstration. Supposons par exemple que les termes d'indices pairs sont positifs, les termes d'indices impairs négatifs et que $(|u_n|)$ décroît vers 0. Pour tout entier n, on a :

$$S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| \leq 0,$$

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+3} + u_{2n+2} = -|u_{2n+3}| + |u_{2n+2}| \geq 0,$$

$$S_{2n} - S_{2n+1} = -u_{2n+1} = |u_{2n+1}| \geq 0.$$

Donc la suite (S_{2n}) est décroissante, majore la suite (S_{2n+1}) qui est croissante et $\lim_{n \to +\infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = 0$. Finalement, les deux sous-suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Elles ont une limite commune S et on a vu que dans ce cas, la suite (S_n) converge aussi vers S.
De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $S_{2n+1} \leq S_{2n+3} \leq S \leq S_{2n+2}$, donc

$$0 \leq R_{2n+1} = S - S_{2n+1} \leq S_{2n+2} - S_{2n+1} = u_{2n+2}$$

$$-|u_{2n+3}| = u_{2n+3} = S_{2n+3} - S_{2n+2} \leq S - S_{2n+2} = R_{2n+2} \leq 0.$$

D'où le résultat. ∎

Commentaire. Si on approche la somme $S_{+\infty}$ par S_n, l'erreur commise est $|\mathbb{R}_n|$. On peut donc estimer cette erreur à partir de la majoration précédente.
Exemples.
(a) pour $z = -1$, la série de terme général $u_n = \frac{(z)^n}{\sqrt{n+1}\ln(n+2)}$ est alternée et $(|u_n|)$ décroît vers 0, donc cette série converge.
(b) La série harmonique alternée converge. Elle ne converge pas absolument. C'est un exemple de série semi-convergente. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|R_n| \leq \frac{1}{(n+1)}$. La convergence est lente.

Exercice. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\int_0^1 (1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n)\, dx = \ln 2 + \int_0^1 (-1)^n \frac{x^{n+1}}{1+x}\, dx$, puis que $|\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} - \ln 2| \leq \int_0^1 x^{n+1}\, dx \leq \frac{1}{n+2}$. (Comparer avec la majoration du reste de la série harmonique alternée obtenue ci-dessus.)
En déduire $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln 2$.

4.6 Développement décimal d'un réel

Soit (a_n) une suite de nombres entiers compris entre 0 et 9, avec $a_0 = 0$.
Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on note $x_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{10^n}$ la somme partielle d'ordre N de la série de terme général $\frac{a_n}{10^n}$; c'est un nombre décimal ; en écriture décimale, on le note $0, a_1 \ldots a_N$; on a

$$0 \leq x_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{10^n} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{9}{10^n} = 1 - (\frac{1}{10})^{N+1} < 1 \qquad (*)$$

.

D'après (*), la série converge vers un réel $x = \lim_{N \to +\infty} x_N = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$ de l'intervalle $[0, 1]$ que l'on note $x = 0, a_1 a_2 \ldots a_N \ldots$. On dit alors que (a_n) est un développement décimal de x.
Pour tout $N \in \mathbb{N}$, le reste $x - x_N$ est positif et vérifie :

$$x - x_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} \leq \sum_{N+1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = (\frac{1}{10})^N, \qquad (**)$$

L'égalité a lieu si et seulement si $a_n = 9$ pour tout $n \geq N + 1$.
Ainsi lorsque $a_N \neq 9$, on a $0, a_1 a_2 \ldots a_N 999 \ldots = 0, a_1 a_2 \ldots a'_N 000 \ldots$ où $a'_N = a_N + 1$.

Un développement qui ne stationne pas à 9 est dit propre. Dans ce cas, pour tout entier N, l'inégalité dans (**) est stricte : $0 \leq x - x_N < 10^{-N}$ et on obtient

$$x_N = 10^{-N} E[10^N x] \text{ et } a_{N+1} = E[10^{N+1}(x - x_N)]. \qquad (***)$$

Par suite, si $x \in [0, 1[$ admet un développement propre $0, a_1 a_2 \ldots a_N \ldots\ldots$, celui-ci est unique. Les nombres décimaux de $[0, 1[$ sont les seuls à avoir deux développements, un développement propre qui stationne à 0 et un développement, dit impropre, qui stationne à 9.

Théorème 4.13.

Un réel $x \in [0, 1[$ a un développement décimal propre et un seul.

Démonstration. Soient (x_N) et (a_N) les suites définies à partir de x par les relations (***). Fixons un entier N. Par construction, a_{N+1} est un entier et on a $a_{N+1} \leq 10^{N+1}(x - x_N) < a_{N+1} + 1$; donc $E[10^{N+1}x] = 10^{N+1}x_N + a_{N+1}$ et $x_{N+1} = x_N + \frac{a_{N+1}}{10^{N+1}}$; de plus, $a_{N+1} \leq 10^{N+1}(x - x_N) < 10$ et $0 \leq 10^{N+1}(x - x_N) < a_{N+1} + 1$, donc a_{N+1} est un entier compris entre 0 et 9.
Par récurrence sur N, on obtient $\forall N \in \mathbb{N}$, $x_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{10^n} = 0, a_1 a_2 \ldots a_N$. Enfin, puisque $\forall N \in \mathbb{N}$, $0 \leq x - x_N < 10^{-N}$, on a $\lim_{n \to +\infty} x_N = x$.
La suite (a_n) est donc un développement décimal de x.
Si le développement est impropre, il existe un N tel que $x = 0, a_1 a_2 \ldots a_N 9999$; mais alors, $10^N(x - x_N) = 1$, ce qui contredit la définition de x_N. ∎

Remarque. Un réel $x \in [0, 1[$ est décimal si et seulement si son développement propre stationne à 0. On peut montrer que x est rationnel si et seulement si son développement propre est périodique à partir d'un certain rang.

Exercice. Calculer $0, 98989898 \ldots \times 0, 121212 \ldots$.

4.7 Compléments.

Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. D'après la section précédente, tout réel est limite d'une suite de décimaux. On en déduit que dans tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, il existe un rationnel (et même un nombre décimal). On dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Définition. Un ensemble non vide E est dénombrable s'il existe une suite (u_n) d'éléments de E telle que E soit l'ensemble des termes u_n (autrement dit si on peut numéroter les éléments de E).

Exemples. Evidemment $\mathbb{N}$ est dénombrable. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, le sous-ensemble fini $\{1, 2 \ldots, p\}$ de $\mathbb{N}$ est dénombrable (prendre $(u_n) = (1, 2, \ldots, p, p, p, \ldots)$). Il est facile de montrer que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.

Théorème. L'ensemble des réels n'est pas dénombrable.

Démonstration. Supposons $\mathbb{R}$ dénombrable. C'est l'ensemble des termes d'une suite. On en extrait une suite (u_p) dont $[0, 1[$ est l'ensemble des termes. Pour $p \in \mathbb{N}$, on note $(a_n^{(p)})$ le développement propre de u_p et on pose $a'_p = 0$ si $a_p \neq 0$, $a'_p = 8$ si $a_p = 0$, de sorte que $a'_p \neq a_p^{(p)}$ et $a'_p \neq 9$. Soit x le réel de développement (a'_p). Ce développement est propre et n'est celui d'aucun des u_p. Mais $x \in [0, 1[$. On obtient donc une contradiction. ∎

5 Compléments

Cette section n'est pas au programme de l'examen, mais vu l'importance des notions et résultats ici abordés en 5.1 et 5.2, il est (très) recommandé pour la suite d'en prendre connaissance, quitte à laisser de côté les démonstrations.

5.1 Suites extraites.

On fixe une suite de nombres réels ou complexes (u_n).

Définition. Une suite extraite (ou une sous-suite) de (u_n) est une suite de la forme $(u_{s(n)})$ où $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Exemples. - La suite (u_{2n}) est une sous-suite de la suite (u_n). (On prend $s(n) = 2n$.) De même pour (u_{n^2}).
- Si $(v_n) = (u_{2n})$, la sous-suite (v_{3n}) de (v_n) est une sous-suite de (u_n), $(v_{3n}) = (u_{6n})$.
- Plus généralement, une sous-suite d'une sous-suite de (u_n) est une sous-suite de (u_n).
(Prendre $v_n = u_{s(n)}$ et $w_n = v_{t(n)}$. On obtient $w_n = u_{s o t(n)}$.)

Proposition. Convergence et sous-suites. Soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Si $\lim_n u_n = \ell$, pour toute sous-suite $(u_{s(n)})$ de (u_n), on a aussi $\lim_n u_{s(n)} = \ell$.

Corollaire. S'il existe deux sous-suites de (u_n) qui ont des limites différentes, la suite (u_n) n'a pas de limite.

Exemples.
- (a) On a déjà vu ces résultats pour les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).
- (b) La suite $(u_n) = (\cos(\frac{2n\pi}{3}))$ diverge.

Théorème de Bolzano-Weierstrass (*B. P. Bolzano : 1781 - 1848; K. T. Weierstrass : 1815-1897*)
Soit (u_n) une suite réelle ou complexe. Si (u_n) est bornée, (u_n) a une sous-suite convergente.

Démonstration. Supposons (u_n) réelle et bornée. Soient a et b deux réels tels que pour tout entier n, on a $a \leq u_n \leq b$.
Pour $K \in \mathbb{N}$, notons $H(K)$ la propriété : il existe des segments $[a_0, b_0], [a_1, b_1], \ldots, [a_K, b_K]$ tels que $[a_K, b_K] \subset \ldots \subset [a_1, b_1] \subset [a_0, b_0] = [a, b]$ et vérifiant pour tout $k \leq K$, les deux conditions suivantes :
(i) $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$
(ii) l'ensemble des indices n tels que u_n appartienne à $[a_k, b_k]$ est un ensemble infini.
Par récurrence sur K, la propriété $H(K)$ est vraie pour tout $K \in \mathbb{N}$; ceci résulte des points (1) et (2) suivants :

(1) La propriété $H(0)$ est évidente.
(2) Soit $K \in \mathbb{N}$. Supposons $H(K)$ vérifiée. Notons m le milieu du segment $[a_K, b_K]$. S'il existe une infinité d'indices n tels que u_n appartienne à $[a_K, m]$, on pose $a_{K+1} = a_K$ et $b_{K+1} = m$; sinon, il existe forcément une infinité d'indices n tels que u_n appartienne à $[m, b_K]$, on pose $a_{K+1} = m$ et $b_{K+1} = b_K$. Dans les deux cas, les conditions (i) et (ii) sont vérifiées pour $k = K + 1$. On en déduit $H(K + 1)$.

On a construit ainsi deux suites (a_k) et (b_k) qui sont adjacentes ; elles ont donc une limite commune ℓ et pour tout entier k, on a $a_k \leq \ell \leq b_k$.
Pour $K \in \mathbb{N}$, notons maintenant $H'(K)$ la propriété : il existe des entiers $s(0), s(1), \ldots, s(K)$ tels que $0 = s(0) < s(1) < \ldots < s(K)$ et pour tout $k \leq K$, $u_{s(k)} \in [a_k, b_k]$.
(1)' La propriété $H'(0)$ est évidente.
(2)' Soit $K \in \mathbb{N}$. Supposons $H'(K)$ vérifiée. L'ensemble des indices n tels que u_n appartienne à $[a_{K+1}, b_{K+1}]$ étant infini, il en existe au moins un qui est strictement plus grand que $s(K)$; on définit $s(K + 1)$ comme le plus petit d'entre eux. On en déduit $H'(K + 1)$.
Les points (1)' et (2)' et un raisonnement par récurrence sur K montrent que la propriété $H'(K)$ est vraie pour tout K.

On a ainsi construit une sous-suite $(u_{s(k)})$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k \leq u_{s(k)} \leq b_k$. Le théorème des gendarmes montre alors que cette sous-suite converge vers ℓ.

Le cas où (u_n) est une suite complexe bornée se ramène au précédent. En effet, si pour n entier on écrit $u_n = a_n + ib_n$ où a_n et b_n sont réels, les deux suites (a_n) et (b_n) sont réelles bornées. On peut extraire de (a_n) une sous-suite convergente $(a_{s(n)})$, de limite a, puis extraire de $(b_{s(n)})$ une sous-suite convergente $(b_{s\circ t(n)})$ de limite b. La sous-suite $(u_{s\circ t(n)})$ converge alors vers $a + ib$.

Ce théorème est d'une très grande importance. Il fournit nombre de résultats décisifs en analyse, par exemple :
Corollaire. Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ qui est continue sur l'intervalle borné $[a, b]$ est bornée.

Démonstration. On raisonne par l'absurde, en supposant que f n'est pas bornée ; par exemple f n'est pas majorée.
Ceci signifie que pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe un $x \in [a, b]$ tel que $f(x) \geq M$ (écrire la définition de "f majorée " et en prendre la négation). En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver un élément $x_n \in [a, b]$ tel que $f(x_n) \geq n$. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$.
La suite (x_n) est bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle possède une sous-suite $(x_{s(n)})$ qui converge vers une limite ℓ. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a \leq x_{s(n)} \leq b$, en passant à la limite, on trouve $a \leq \ell \leq b$. De plus, f est continue, donc on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{s(n)}) = f(\ell)$. Mais d'après ce qui précède, on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{s(n)}) = +\infty$.
D'où une contradiction.

5.2 Suites de Cauchy

Préliminaire. Soit (u_n) une suite convergente (réelle ou complexe) de limite ℓ.
Fixons $\varepsilon > 0$. On sait que pour n assez grand, u_n approche ℓ à ε près. On en déduit que pour des indices n et p assez grands, u_n et u_p sont proches à ε près : en effet, on peut trouver un entier N tel que $\forall n \geq N$, $|u_n - \ell| < \frac{\epsilon}{2}$. Alors, pour tous les entiers n et p tels que $n \geq N$ et $p \geq N$, on a $|u_n - u_p| \leq |u_n - \ell| + |u_p - \ell| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \varepsilon$.
On obtient la propriété :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\ (n \geq N \,\text{et}\, p \geq N \Rightarrow |u_p - u_n| < \varepsilon) \tag{1}$$

Ceci conduit à la définition :
Définition : *On dit qu'une suite (u_n) de nombres réels (ou complexes) est une suite de Cauchy si elle vérifie la propriété (1). (Cauchy : 1789-1857)*

Dans cette propriété, on met en évidence les écarts entre deux termes de la suite, la limite ℓ n'apparaît plus.
D'après ce qui précède, une suite convergente est une suite de Cauchy.

L'intérêt de la notion de suite de Cauchy résulte du théorème fondamental suivant.

Théorème : *Une suite de nombres réels (ou complexes) est convergente si et seulement si c'est une suite de Cauchy.*

Commentaire :
Le sens le plus utile est :

$$(u_n) \text{ suite de Cauchy de réels (ou de complexes)} \Longrightarrow (u_n) \text{ convergente}$$

Cette implication permet de prouver la convergence d'une suite de réels (ou complexes) sans faire intervenir la limite ℓ, en particulier dans le cas où on n'a pas d'idée a priori sur une limite éventuelle.

Démonstration. Supposons que (u_n) est une suite de Cauchy.
En prenant $\epsilon = 1$, on trouve un entier N_0 tel que pour $n \geq N_0$, on a $|u_n - u_{N_0}| < 1$, donc $|u_n| \leq |u_{N_0}| + 1$. La suite (u_n) est donc bornée par $\sup\{|u_0|, \ldots, |u_{N_0-1}|, |u_{N_0}| + 1\}$.
En utilisant le théorème de Bolzano - Weierstrass, on trouve une sous-suite $(u_{s(n)})$ convergente, de limite ℓ. Montrons qu'alors la suite (u_n) converge vers ℓ.

Fixons $\epsilon > 0$, arbitrairement petit. Comme la sous-suite $(u_{s(n)})$ converge vers ℓ, il existe N_1 tel que $\forall n \geq N_1$, $|u_{s(n)} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$; d'autre part, par définition d'une suite de Cauchy, il existe N_2 tel que pour $n \geq N_2$ et $p \geq N_2$, $|u_n - u_p| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Soit $N = \sup(N_1, N_2)$ et $n \geq N$. On a $N \geq N_1$ donc $|u_{s(N)} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$; d'autre part, on a

$n \geq N \geq N_2$ et $s(N) \geq N \geq N_2$, donc $|u_n - u_{s(N)}| < \frac{\varepsilon}{2}$. On obtient $\forall n \geq N$, $|u_n - \ell| < \epsilon$.

D'où la convergence de (u_n) vers ℓ.

Exercice. On note f la fonction $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{2}\sin x$. Soit (u_n) la suite vérifiant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(i) Montrer que f est dérivable et que $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
(ii) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{2^n}|u_1 - u_0| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$, puis que $|u_{n+p} - u_n| \leq \frac{1}{2^n}$ pour tous les entiers n et p.
(iii) En déduire que (u_n) est une suite de Cauchy. Elle converge donc vers une limite ℓ, qui est un point fixe de f.
(iv) Montrer que pour tout entier n, on a $|\ell - u_n| \leq \frac{1}{2^n}$. Trouver n tel que $|u_n - \ell| \leq 10^{-10}$.

Commentaire. La méthode utilisée dans cet exercice pour montrer que f a un point fixe se généralise à des fonctions dérivables telles que $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \leq K$ où $0 \leq K < 1$.

Des rationnels aux réels. Une suite de Cauchy dont les termes sont rationnels a une limite réelle, mais celle-ci n'est pas forcément rationnelle.
Par exemple, la suite de Héron, définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$ pour tout entier n est une suite de rationnels convergente, donc une suite de Cauchy, mais sa limite $\sqrt{2}$ est irrationnelle.
De même les suites ayant respectivement pour terme général $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!n}$ sont adjacentes donc convergent dans $\mathbb{R}$ (et sont des suites de Cauchy). Ce sont des suites de rationnels. Mais la limite n'est pas rationnelle.
Pour construire $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$, l'idée est de compléter $\mathbb{Q}$ par les limites des suites de Cauchy de rationnels.

5.3 Eléments sur la construction de $\mathbb{R}$.

On a supposé connus au départ les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ et leurs propriétés usuelles concernant l'addition, la multiplication et la relation d'inégalité. Mais comment peut-on construire de tels ensembles ?

L'existence d'**un ensemble d'entiers naturels** ad hoc n'est pas évidente. Peano la donnait en axiome ; aujourd'hui, on la déduit d'une théorie axiomatique des ensembles (qui pose elle-même des problèmes de fondements).

Mais il est (assez) facile de construire **l'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombre relatifs** à partir de $\mathbb{N}$; il s'agit d'augmenter l'ensemble $\mathbb{N}$ de l'ensemble des entiers relatifs négatifs et de pouvoir faire des soustractions entre deux relatifs quelconques. En gros, voici comment on procède.

Supposant le problème résolu, on observe qu'on peut construire une application $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, (m, n) \mapsto m - n$. Tous les relatifs peuvent être obtenus ainsi. Si $a \in \mathbb{Z}$, a est l'image de tous les couples (m, n) tels que $m - n = a$. (Si a est positif, a est en particulier l'image de $(a, 0)$; si a est négatif, a est en particulier l'image de $(0, -a)$.)
Ceci revient à considérer un relatif comme une différence de deux entiers naturels ou comme un ensemble de couples d'entiers naturels.
On observe que deux couples (m, n) et (m', n') ont la même image si et seulement si $m - n = m' - n'$, c'est-à-dire si et seulement si $m + n' = n + m'$. L'avantage de cette relation est qu'elle peut-être définie sans supposer a priori l'existence de $\mathbb{Z}$.

Partant de $\mathbb{N}$, cela conduit à considérer pour un couple $x = (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, l'ensemble $\overline{x}$ des couples (m', n') tels $m + n' = n + m'$ (dans $\mathbb{N}$) et à définir un entier relatif comme un ensemble $\overline{x}$.
Pour $x = (m, 0)$, on note encore m le relatif $\overline{x}$, ce qui permet d'identifier $\mathbb{N}$ à un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$. Il faut encore étendre l'addition, la multiplication et la relation $\leq$ de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{Z}$, de sorte que si $x = (m, n)$, on ait $\overline{x} = m - n$ (dans $\mathbb{Z}$) et que l'ensemble des relatifs ainsi construit ait les propriétés attendues.

La construction de **l'ensemble des rationnels** à partir de $\mathbb{Z}$ relève du même principe : cette fois, il faut disposer de l'inverse d'un rationnel non nul et pouvoir faire des divisions.
Supposant le problème résolu, on observe qu'on peut construire une application $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mapsto \mathbb{Q}, (p, q) \mapsto \frac{p}{q}$.
On observe que deux couples (p, q) et (p', q') ont la même image si et seulement si $pq' = p'q$.

Cela conduit à considérer pour un couple $x = (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, l'ensemble $\overline{x}$ des couples (p', q') tels que $pq' = p'q$ (dans $\mathbb{Z}$) et à définir un rationnel comme un ensemble $\overline{x}$.
Pour $x = (p, 1)$, on identifie le relatif p au rationnel $\overline{x}$. Puis on définit une addition, une multiplication et une relation $\leq$ de sorte que si $x = (p, q)$ on ait $\frac{p}{q} = \overline{x}$ (dans $\mathbb{Q}$) et qu'on ait les propriétés voulues.

Pour construire $\mathbb{R}$ **à partir de** $\mathbb{Q}$, l'idée est de compléter $\mathbb{Q}$ par les limites des suites de Cauchy de rationnels.
Supposons $\mathbb{R}$ déjà construit. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites de Cauchy de nombres rationnels.
On construit l'application $\varphi : \mathcal{C} \mapsto \mathbb{R}, (u_n) \mapsto \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
On a vu qu'un réel x est limite d'une suite de nombres décimaux, donc tous les réels sont obtenus ainsi.
Maintenant, deux suites de Cauchy (u_n) et (v_n) ont la même limite si et seulement si $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$. On s'appuie sur cette relation pour définir les réels.
Une petite difficulté est que dans la définition des suites convergentes de réels, on a utilisé des ε réels :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon) \tag{1}$$

De même pour les suites de Cauchy :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\ (n \geq N \,\mathrm{et}\, p \geq N \Rightarrow |u_p - u_n| < \varepsilon) \tag{2}$$

Mais, il est facile d'observer qu'on a des définitions équivalentes en se restreignant à des ε rationnels ou même de la forme $\frac{1}{p}$, $p \in \mathbb{N}^*$: en effet, d'après la propriété d'Archimède, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{p} < \varepsilon$.

Partant de $\mathbb{Q}$, on dira donc qu'une suite de rationnels converge dans $\mathbb{Q}$ vers le rationnel ℓ si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon) \tag{1'}$$

et que c'est une suite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*,\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\ (n \geq N \,\mathrm{et}\, p \geq N \Rightarrow |u_p - u_n| < \varepsilon) \tag{2'}$$

Puis, pour $(u_n) \in \mathcal{C}$, on note $\overline{u}$ l'ensemble des suites $(v_n) \in \mathcal{C}$ telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$ et on définit un réel comme un ensemble $\overline{u}$.
Il n'est pas difficile à partir de là de définir une somme, un produit et une relation d'inégalité dans l'ensemble des réels qui en font un corps commutatif totalement ordonné et archimédien, comme énoncé dans la première section. La définition des réels à partir des suites de Cauchy de rationnels permet de montrer que les suites de Cauchy de réels convergent vers un réel. On retrouve ensuite la propriété des segments emboîtés et donc toutes les propriétés qui en ont été déduites.