Feuille d'exercices 5

Exercice 1 La durée de vie d'une machine à laver suit une loi $\mathcal{E}(1/10)$ (en années). La durée de vie d'un four micro-ondes suit une loi $\mathcal{E}(1/2)$ (en années). Quelle est la probabilité que les deux ustensiles tiennent au moins 2 ans ? Il est raisonnable de supposer que les deux v.a. sont indépendantes ! On pourrait bien évidemment dire que $P(\text{MàL tient au moins 2 ans}) = \int_2^\infty \frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}\ dx = e^{-\frac{2}{10}} = e^{-\frac{1}{5}} = 0.8187$ et $P(\text{MO tient au moins 2 ans}) = e^{-\frac{2}{2}} = e^{-1} = 0.3679$, donc $P(\text{les deux tiennent}) = e^{-\frac{1}{5}} \cdot e^{-1} = e^{-\frac{6}{5}} = 0.3012$. Mais il est plus instructif d'observer que la densité de probabilité du couple (X =Durée de vie de MàL, Y =Durée de vie de MO) est $p(x,y) = \frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}} \cdot \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}$ et $P(X > 2, Y > 2) = \int_2^{+\infty}\int_2^{+\infty} \frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}} \cdot \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}\ dy\ dx = [...] = e^{-\frac{2}{10}} \cdot e^{-\frac{2}{2}} = e^{-\frac{6}{5}} = 0.3012$

Exercice 2. Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ Trouver le nombre z tel que

(a) $P(-z \leqslant X \leqslant z) = 0,9$ (Dessiner le graphe de $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{x^2}{2})$!) De façon équivalente, on veut $P(X \leqslant z) = 0,95$, ce qui est le cas pour $z = 1,64$, environ (un petit peu plus).

(b) $P(-z \leqslant X \leqslant z) = 0,95$. De façon semblable, on a $\Phi(z) = 0,975$ pour $z = 1,96$

Exercice 3. Chaque jour 150 personnes retirent de l'argent à un certain distributeur. Le montant de chaque retrait, en euros, suit une loi $\mathcal{N}(30,100)$. Combien d'argent doit contenir l'automate en début de journée pour que les clients soient tous servis avec une probabilité supérieure à 0,95 ? Si $X_1, \ldots, X_{150} \sim \mathcal{N}(30,100)$ sont indépendantes, alors $X := X_1 + \ldots + X_{150} \sim \mathcal{N}(30 \cdot 150, 100 \cdot 150)$, c.à.d. $X \sim \mathcal{N}(4500, 15000)$ *** ATTENTION, le fait qu'une somme de Gaussiennes indépendantes est à nouveau une Gaussienne n'a pas été vu en cours. On doit l'admettre. ***. On cherche une somme S telle que $0,95 = P(X < S)$. Or, $P(X < S) = P\left(\frac{X-4500}{\sqrt{15000}} < \frac{S-4500}{\sqrt{15000}}\right)$. Cette égalité est donc vraie si et seulement si $\frac{S-4500}{\sqrt{15000}} = 1,64$ (selon le tableau des valeurs de Φ). On conclut $S = 1,64 \cdot \sqrt{15000} + 4500 \cong 4700$. L'automate doit donc contenir 4700 Euros (l'espérance de la somme retirée en une journée étant de 4500 Euros).

Exercice 4. Soit la fonction $p(x,y) = xy^{x-1}e^{-x}1_{x>0}1_{0<y<1}$. Démontrer que p est une densité. Soit (X,Y) de loi de densité p. Calculer $E[X]$, $E[(X+1)Y]$. Pour démontrer qu'il s'agit d'une densité, on doit vérifier que $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\ dy\ dx = 1$. Vérification : $= \int_0^{+\infty}\int_0^1 xy^{x-1}e^{-x}\ dy\ dx = \int_0^{+\infty}[y^x e^{-x}]_{y\to 0^+}^{y=1}\ dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\ dx = 1$. Attention aux intégrales impropres ! $E[X] = \int_0^{+\infty}\int_0^1 x^2y^{x-1}e^{-x}\ dy\ dx = \int_0^{+\infty}[xy^xe^{-x}]_{y\to 0^+}^{y=1}\ dx = \int_0^{+\infty} x \cdot e^{-x}\ dx \overset{IPP}{=} [-x \cdot e^{-x}]_0^{+\infty} = \int_0^\infty e^{-x} = 0 + 1 = 1$. Ensuite $E[(X+1)Y] = \int_1^\infty\int_0^1 (x+1)\cdot y \cdot x \cdot y^{x-1}e^{-x} = \int_1^\infty\int_0^1 (x+1)\cdot x \cdot y^x e^{-x} = \int_0^\infty \left[y^{x+1}\right]_{y\to 0}^{y=1} \cdot x \cdot e^{-x}dx = 1$. Je ne réussis pas à calculer $E[Y]$! La formule pour $Cov(X,Y)$ aurait été $Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]\cdot E[Y] = E[(X+1)Y] - E[Y] - E[X]\cdot E[Y]$

Exercice 5 Soit la fonction $p(x,y) = \frac{1}{2}x(x+1)y^{x-1}e^{-x}1_{x>0}1_{0<y<1}$. Démontrer que p est une densité. Soit (X,Y) de loi de densité p. Calculer $Cov(X,Y)$. On rappelle que pour une v.a. Z de loi $\mathcal{E}(1)$, $E[Z] = 1, E[Z^2] = 2$. Pour démontrer qu'il s'agit d'une densité, on doit vérifier que $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\ dy\ dx = 1$. Vérification : $= \int_0^{+\infty}\int_0^1 \frac{1}{2}x(x+1)y^{x-1}e^{-x}\ dy\ dx = \int_0^{+\infty}\frac{1}{2}(x+1)e^{-x}[y^x]_{y=0}^{y=1}\ dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(x+1)e^{-x}\ dx = \frac{1}{2}(\int_0^{+\infty} xe^{-x}\ dx + \int_0^{+\infty} e^{-x}\ dx) = \frac{1}{2}(E[Z]+1) = 1$

$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x,y)\, dy\, dx = \int_0^{+\infty} \int_0^1 \frac{1}{2}x^2(x+1)y^{x-1}e^{-x}\, dy\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}x(x+1)e^{-x} \left(\int_0^1 xy^{x-1}\, dy\right) dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}x(x+1)e^{-x}[y^x]_{y=0}^{y=1}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}x(x+1)e^{-x}\, dx = \frac{1}{2}(E[Z^2]+E[Z]) = \frac{3}{2}$

$E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} yp(x,y)\, dy\, dx = \int_0^{+\infty} \int_0^1 \frac{1}{2}x(x+1)y^x e^{-x}\, dy\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}xe^{-x} \left(\int_0^1 (x+1)y^x\, dy\right) dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}xe^{-x}[y^{x+1}]_{y=0}^{y=1}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}xe^{-x}\, dx = \frac{1}{2}E[Z] = \frac{1}{2}$

$E[XY] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyp(x,y)\, dy\, dx = \int_0^{+\infty} \int_0^1 \frac{1}{2}x^2(x+1)y^x e^{-x}\, dy\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}x^2e^{-x} \left(\int_0^1 (x+1)y^x\, dy\right) dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}x^2e^{-x}[y^{x+1}]_{y=0}^{y=1}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}x^2e^{-x}\, dx = \frac{1}{2}E[Z^2] = 1$

Ainsi, $Cov(X,Y) = E[XY] - E[X] \cdot E[Y] = 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Exercice 6 Soient X et Y, deux variables aléatoires de Bernoulli de même paramètre p, $0 < p < 1$. On définit les variables aléatoires $S = X + Y$ et $D = X - Y$.

(a) Calculer $\mathrm{Cov}(S,D)$. $E[S] = E[X] + E[Y] = 2p$, $E[D] = E[X] - E[Y] = 0$, $E[S \cdot D] = E[(X+Y)\cdot(X-Y)] = E[X^2 - Y^2] = E[X^2] - E[Y^2] = 0$, où la dernière égalité est vraie parce que X et Y suivent la même loi. On peut aussi calculer $E[S \cdot D]$ “à la main” : les valeurs possibles de $S \cdot D$ sont 0 (quand $X = Y$, avec probabilité $(1-p)^2 + p^2$), 1 (quand $X = 1, Y = 0$, avec probabilité $p(1-p)$) et -1 (quand $X = 0, Y = 1$, avec probabilité $p(1-p)$). Ensuite $Cov(S,D) = E[S \cdot D] - E[S] \cdot E[D] = 0$

(b) On suppose X et Y, indépendantes. Les variables S et D sont-elles indépendantes ? *Indication :* Calculer $P(S = 0, D = 0)$ et $P(S = 0)P(D = 0)$. $P(S = 0, D = 0) = P(X = 0, Y = 0) = P(S = 0)$, ce qui est strictement plus grand que $P(S = 0) \cdot P(D = 0)$ car $P(D = 0) = P(X = 0, Y = 0) + P(X = 1, Y = 1) = (1-p)^2 + p^2 < 1$.
Autre solution : on ne va pas suivre l'indication, mais comparer $P(S = 0, D = 1)$ et $P(S = 0) \cdot P(D = 1)$. On trouve $P(S = 0, D = 1) = 0$ car les deux événements $S = 0$ et $D = 1$ sont incompatibles. En revanche, $P(S = 0) \cdot P(D = 1) = P(X = 0, Y = 0) \cdot P(X = 1, Y = 0) = (1-p^2) \cdot (1-p)p \neq 0$. On trouve que les variables S et D sont dépendantes.

Exercice 7 Soient $X : \Omega \to \{0,2,4\}$ et $Y : \Omega \to \{0,1,2,3\}$ deux variables aléatoires. Nous supposons que les probabilités $P(X = i, Y = j)$ sont comme indiqués dans le tableau suivant :

$X \backslash Y$	0	1	2	3
0	2/48	6/48	3/48	1/48
2	4/48	12/48	6/48	2/48
4	2/48	6/48	3/48	1/48

(a) Déterminer la loi de X. Déterminer la loi de Y. $P(X = 0) = \frac{2+6+3+1}{48} = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$, $P(X = 2) = \frac{24}{48} = \frac{1}{2}$, $P(X = 4) = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$, donc

X	0	2	4
Proba	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

, et

Y	0	1	2	3
Proba	$\frac{2}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{12}$

(b) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? Oui ! Il faut vérifier pour chaque case que $P(X = i, Y = j) = P(X = i) \cdot P(Y = j)$

Exercice 8 Voici des statistiques concernant le lien entre l'hypertension et la consommation d'alcool sur une population de 490 personnes [1]. La variable V représente le nombre de verres d'alcools consommés par jours, et H la présence d'hypertension.

1. D'après OzDASL. Les chiffres sont arrondis.

H \ V	0	2	4	8
O(ui)	20	30	35	45
N(on)	100	80	100	80

Quelle est la distribution de V ? Quelle est la distribution de V sachant $H = O$? Que valent $E[V|H = N]$ et $E[V|H = O]$?

V	0	2	4	8
Proba	$\frac{120}{490}$	$\frac{110}{490}$	$\frac{135}{490}$	$\frac{125}{490}$

. Sachant que le patient a de l'hypertension, on a le tableau

V	0	2	4	8
Proba	$\frac{20}{130}$	$\frac{30}{130}$	$\frac{35}{130}$	$\frac{45}{130}$

$E(V \mid \text{Hypertension} = \text{Oui}) = 0 \cdot \frac{20}{130} + 2 \cdot \frac{30}{130} + 4 \cdot \frac{35}{130} + 8 \cdot \frac{45}{130} = 4,3$. De façon semblable $E(V \mid \text{Hypertension} = \text{Non}) = 0 \cdot \frac{100}{360} + 2 \cdot \frac{80}{360} + 4 \cdot \frac{100}{360} + 8 \cdot \frac{80}{360} = 3,33$.