Feuille d'exercices 4

Exercice 1 (On justifiera brièvement les réponses) Soit les deux densités suivantes.

1. Les deux ensembles de données suivants : $A = \{0,\ 0.3,\ 0.7,\ 1\}$ et $B = \{-1,\ 2,\ 2.5,\ 3\}$ représentent chacun des v.a. tirées selon p ou q, mais on ne sait plus lequel a été tiré selon quelle loi. Doit-on attribuer (selon toute vraisemblance) A à p et B à q ou l'inverse ? $A \leftrightarrow p, B \leftrightarrow q$
2. L'une des deux lois est gaussienne. Laquelle ? p
3. Laquelle a la plus grande variance ? Laquelle a la plus grande espérance ? Pour les deux questions : q

Exercice 2 Pour cet exercice, on utilisera la table au dos. Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $Y \sim \mathcal{N}(5,9)$.

(a) Trouver $P(-1 \leqslant X \leqslant 1)$, $P(-2 \leqslant X \leqslant 2)$, $P(0 \leqslant X \leqslant 1)$.

(b) Trouver $P(2 \leqslant Y \leqslant 8)$, $P(Y \geqslant 2)$, $P(Y \leqslant 8)$.

Rappel : si X suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors $P(a < X < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$; en plus, pour connaître $\Phi(x)$ quand $x < 0$, on utilise la formule $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

(a) $P(-1 \leqslant X \leqslant 1) = \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) = 2 \cdot \Phi(1) - 1 = 0,68268$. $P(-2 \leqslant X \leqslant 2) = 2 \cdot \Phi(2) - 1 = 0,9545$. $P(0 \leqslant X \leqslant 1) = \Phi(1) - 0,5 = 0,34134$.

(b) On observe que $Y - 5 \sim \mathcal{N}(0,9)$ et $\frac{Y-5}{3} \sim \mathcal{N}(0,1)$. Donc $P(2 \leqslant Y \leqslant 8) = P(\frac{2-5}{3} \leqslant \frac{Y-5}{3} \leqslant \frac{8-5}{3}) = P(-1 \leqslant X \leqslant 1) = 0,68268$. $P(2 \leqslant Y) = P(-1 \leqslant X) = 1 - \Phi(-1) = \Phi(1) = 0,84134$, et de façon semblable $P(Y \leqslant 8) = 0,84134$.

Exercice 3 La durée de vie en années d'une machine à laver suit une distribution $\mathcal{E}(\frac{1}{10})$.

(a) Quelle est son espérance de vie ? Nous avons vu que l'espérance d'une v.a. qui suit une loi exponentielle de paramètre λ est de $\frac{1}{\lambda}$, donc ici 10 ans.

(b) Quelle est la probabilité qu'elle tienne au moins une année ? $\int_1^{+\infty} \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}}\, dx = \left[-e^{-\frac{x}{10}}\right]_{x=1}^{x\to+\infty} = e^{-\frac{1}{10}} \cong 0,905 = 90,5\%$

(c) Quelle est la probabilité qu'elle tienne au moins 10 ans ? $= e^{-1} \cong 0,368 = 36,8\%$. On remarque que la durée de vie moyenne est de 10 ans, mais la probabilité de tenir 10 ans est inférieure à 50%. Formellement, dans une v.a. de loi exponentielle l'*espérance* et la *médiane* sont différentes.

Exercice 4 Soit X une variable aléatoire de densité $f(x) = \frac{1}{4}x^3 1_{[0,2]}(x) = \frac{1}{4}x^3 1_{0 \leqslant x \leqslant 2}$.

(a) Calculer $P(1 \leqslant X \leqslant 2)$. Faire un dessin du graphe de la fonction f, et de l'aire sous le graphe entre 1 et 2 ! $P(1 \leqslant X \leqslant 2) = \int_1^2 \frac{1}{4}x^3\,dx = \left[\frac{1}{16}x^4\right]_{x=1}^{x=2} = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

(b) Que vaut $P(X = 1)$? $\int_1^1 \frac{1}{4}x^3\,dx = 0$

(c) On tire n nombres indépendamment selon la loi de X.

(i) Quelle est la probabilité qu'ils soient tous compris entre 1 et 2 ? $(\frac{15}{16})^n$

(ii) Quelle est la distribution du nombre de ceux qui sont compris entre 1 et 2 ? Notons X ce nombre. Cette v.a. suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{15}{16})$, c.à.d. : $P(X = k) = \binom{n}{k}(\frac{15}{16})^k(\frac{1}{16})^{n-k}$

(d) Calculer l'espérance et la variance de X. $E[X] = \int_0^2 x \cdot \frac{1}{4}x^3\,dx = \left[\frac{1}{20}x^5\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{2^5}{20} = \frac{8}{5} = 1,6$ et $V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{1}{4}x^3\,dx - (\frac{8}{5})^2 = \left[\frac{1}{24}x^6\right]_{x=0}^{x=2} - (\frac{8}{5})^2 = \frac{64}{25} - \frac{64}{24} = 0,1066...$

(e) Calculer $E[X^{-1}]$, $E[X^{-3}\cos(X)]$, $E[X^{-2}\cos(X)]$. $E\left[\frac{1}{X}\right] = \int_0^2 \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{4}x^3\,dx = \left[\frac{1}{12}x^3\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{2}{3}$. $E\left[\frac{\cos(X)}{X^3}\right] = \int_0^2 \frac{1}{x^3}\cos(x) \cdot \frac{1}{4}x^3\,dx = \left[\frac{1}{4}\sin(x)\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{\sin(2)}{4}$. $E\left[\frac{\cos(X)}{X^2}\right] = \int_0^2 \frac{1}{4}x \cdot \cos(x)\,dx \overset{IPP}{=} \left[\frac{1}{4}(x \cdot \sin(x) + \cos(x))\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{1}{2}\sin(2) + \frac{1}{4}\cos(2) - \frac{1}{4} \cong 0,1$

Exercice 5 Soit X une variable aléatoire de densité $f(x) = cx^2 1_{0 \leqslant x \leqslant 1} + \frac{1}{2}1_{2 \leqslant x \leqslant 3}$.

(a) Que vaut c ? Il faut que $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 cx^2\,dx + \int_2^3 \frac{1}{2}\,dx = c \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$. Donc $c = \frac{3}{2}$.

(b) Calculer $P(\frac{1}{4} \leqslant X \leqslant \frac{3}{4})$. Vu que $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \subseteq [0, 1]$, on a $P(\frac{1}{4} \leqslant X \leqslant \frac{3}{4}) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{3}{2}x^2\,dx = \left[\frac{1}{2}x^3\right]_{x=\frac{1}{4}}^{x=\frac{3}{4}} = \frac{26}{128} = 0,203125$

(c) Calculer l'espérance et la variance de X. Calculer $E[8X^3 - 60]$. $E[X] = \int_0^1 x \cdot \frac{3}{2}x^2\,dx + \int_2^3 x \cdot \frac{1}{2}\,dx = \frac{3}{8} + \left[\frac{1}{4}x^2\right]_2^3 = \frac{13}{8}$. $V[X] = \int_0^1 x^2 \cdot \frac{3}{2}x^2\,dx + \int_2^3 x^2 \cdot \frac{1}{2}\,dx - (\frac{13}{8})^2 = \frac{3}{10} + \left[\frac{1}{6}x^3\right]_2^3 - (\frac{13}{8})^2 = \frac{3}{10} + \frac{19}{6} - (\frac{13}{8})^2 \cong 0,826$. $E[8X^3 - 60] = \int_0^1 (8x^3 - 60) \cdot \frac{3}{2}x^2\,dx + \int_2^3 (8x^3 - 60) \cdot \frac{1}{2}\,dx = \int_0^1 12x^5 - 90x^2\,dx + \int_2^3 4x^3 - 30\,dx = [2x^6 - 30x^3]_0^1 + [x^4 - 30x]_2^3 = -28 - 9 + 44 = 7$

Exercice 6. Soit $a < 0 < b$, et X une variable aléatoire de loi $\mathcal{U}([a, b])$, quelle est la loi du signe de X ? Soit $t > 0$, quelle est la loi de $1_{X \leqslant t}$? *Indication.* Considérer les cas $t < a$, $a \leqslant t \leqslant b$, et $t > b$. Les valeurs possibles de cette v.a. sont -1 et 1. $P(\text{signe}(X) = -1) = P(X < 0) = \frac{-a}{b-a}$ et $P(\text{signe}(X) = 1) = \frac{b}{b-a}$. De façon semblable, la loi de la v.a. $1_{X \leqslant t}$ ne prend que deux valeurs, 0 et 1. Si $a \leqslant t \leqslant b$, alors $P(1_{X \leqslant t} = 1) = P(X \leqslant t) = \frac{t-a}{b-a}$, et donc $P(1_{X \leqslant t} = 0) = 1 - \frac{t-a}{b-a} = \frac{b-t}{b-a}$. Si $t < a$ alors la v.a. $1_{X \leqslant t}$ prend toujours la valeur 0. Si $b < t$ alors la v.a. $1_{X \leqslant t}$ prend toujours la valeur 1.

Exercice 7. À un péage autoroutier, n voitures empruntent au hasard et indépendamment les unes des autres, l'un des trois passages mis à leur disposition. Soient X, Y et Z les v.a. dénombrant les voitures ayant franchi ces passages.

(a) Déterminer la loi de X, et celle de $X+Y$. X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{3})$. $X+Y$ (le nombre de voitures ayant franchi le premier ou deuxième passage) suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{2}{3})$.

(b) Calculer les variances de X, Y et de $X+Y$. En déduire la covariance de X et Y. $V[X] = V[Y] = n \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = n \cdot \frac{2}{9}$. $V[X+Y] = n \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = V[X]$. Puisque $V[X+Y] = V[X] + V[Y] + 2 \cdot Cov[X, Y]$, on obtient $Cov[X, Y] = -\frac{V[X]}{2} = -\frac{n}{9}$.

Trouvez-vous l'énoncé réaliste ? L'énoncé dit que le choix du passage des différents automobilistes est indépendant les uns des autres. Ceci est à peu près réaliste sous l'hypothèse que le traffic n'est pas du tout dense : il n'y a jamais une voiture dans un passage au moment où une autre voiture arrive. Sans cette hypothèse, l'énoncé est complètement irréaliste.

$\Phi(t) = P(X \leqslant t)$ pour $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

t	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,5279	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,5438	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,6293	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,6591	0,66276	0,6664	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,7054	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,7224
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,7549
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,7673	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,7823	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,8665	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,879	0,881	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,9032	0,9049	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,9222	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,9452	0,9463	0,94738	0,94845	0,9495	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,9608	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,9732	0,97381	0,97441	0,975	0,97558	0,97615	0,9767
2	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,9803	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,983	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,985	0,98537	0,98574
2,2	0,9861	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,9884	0,9887	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,9901	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,9918	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,9943	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,9952
2,6	0,99534	0,99547	0,9956	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,9972	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,9976	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861

Table pour les grandes valeurs

3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4
0,99865	0,99903	0,99931	0,99952	0,99966	0,99977	0,99984	0,99989	0,99993	0,99995	0,99997