Feuille d'exercices 3

On rappelle que pour une v.a. discrète X, la réponse à la question « Quelle est la loi de X ?» est de préciser d'abord si nécessaire l'ensemble des valeurs prises par X, puis de donner la probabilité de chacune de ces valeurs.

Exercice 1 Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs 2, 4, 6, ou 8.

(a) Déterminer la loi de X sachant que $P(X < 6) = \frac{1}{3}$, $P(X > 6) = \frac{1}{2}$, $P(X = 2) = P(X = 4)$.

(b) Quelle est la loi de $|X - 6|$?

(a) $P(X = 8) = P(X > 6) = \frac{1}{2}$, $P(X = 6) = 1 - P(X < 6) - P(X > 6) = \frac{1}{6}$, $P(X = 2) + P(X = 4) = P(X < 6) = \frac{1}{3}$ donc $P(X = 2) = P(X = 4) = \frac{1}{6}$. (b) Notons $Y = |X - 6|$. Valeurs prises : 0, 2, 4. On trouve $P(Y = 0) = P(X = 6) = \frac{1}{6}$, $P(Y = 2) = P(X = 4) + P(X = 8) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ et $P(Y = 4) = P(X = 2) = \frac{1}{6}$

Exercice 2 Une urne contient des boules numérotées : 7 boules sont marquées du chiffre 1, 5 boules sont marquées 3, et 3 boules sont marquées 5. On tire une boule au hasard et l'on appelle X sa marque. On modélise le tirage par Ω l'ensemble des 15 boules muni de la probabilité uniforme. La variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ associe à une boule son numéro.

(a) Quelle est la loi de X ? La v.a. X prend les valeurs 1, 3, 5, et $P(X = 1) = \frac{7}{15}$, $P(X = 3) = \frac{5}{15}$, $P(X = 5) = \frac{3}{15}$

(b) Calculer son espérance et sa variance. Espérance $E[X] = 1\cdot\frac{7}{15} + 3\cdot\frac{5}{15} + 5\cdot\frac{3}{15} = \frac{37}{15} = 2,4666...$ Pour la variance on peut utiliser la formule $V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 1^2 \cdot \frac{7}{15} + 3^2 \cdot \frac{5}{15} + 5^2 \cdot \frac{3}{15} - (\frac{37}{15})^2 = \frac{536}{225} = 2 + \frac{86}{225} \cong 2,38222$

(c) Que vaut $E[|X - 2|]$? La v.a. $|X - 2|$ prend les valeurs 1 (quand $X = 1$ ou $X = 3$) et 3 (quand $X = 5$). Donc $P(|X - 2| = 1) = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ et $P(|X - 2| = 3) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$. On calcule $E[|X - 2|] = 1 \cdot \frac{4}{5} + 3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{7}{5}$.

Exercice 3. Soit X d'espérance 3 et de variance 2. Que vaut $E[(X - 2)^2]$? On sait que $E[X] = 3$ et $V[X] = 2$, c.à.d. $E[X^2] - (E[X])^2 = 2$. Donc $E[(X-2)^2] = E[X^2 - 4X + 4] = E[X^2] - 4\cdot E[X] + 4 = (2 + (E[X])^2) - 4 \cdot E[X] + 4 = 2 + 3^2 - 4 \cdot 3 + 4 = 3$

Exercice 4. Une variable aléatoire X prend des valeurs entières comprises entre 1 et 6. On sait qu'il existe α tel que $P(X = k) = \alpha k$.

(a) Quelle est la loi de X ? Calculer son espérance et sa variance.

(b) Quelle est la loi de $1/X$?

(a) D'abord il faut déterminer la bonne valeur de α. On doit avoir $1 = P(X = 1) + P(X = 2) + \ldots + P(X = 6) = \alpha(1+2+\ldots+6) = \alpha\cdot 21$. Donc $\alpha = \frac{1}{21}$. Alors $E[X] = 1\cdot\frac{1}{21} + 2\cdot\frac{2}{21} + \ldots + 6\cdot\frac{6}{21} = \frac{1^2+2^2+\ldots+6^2}{21} = \frac{91}{21} = \frac{13}{3} = 4,333...$ et $V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{1^3}{21} + \ldots + \frac{6^3}{21} - (\frac{13}{3})^2 = 21 - \frac{169}{9} = \frac{20}{9} \cong 2,222$. Formules utiles pour cette question : $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, $1^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $1^3 + \ldots + n^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$. (b) Loi $P(X = \frac{1}{k}) = \frac{k}{21}$

Exercice 5. On lance trois pièces. Soit X le nombre de piles obtenus. Donner la loi de X ; calculer son espérance, sa variance, ainsi que $E[\sin(\pi X/2)]$. Les valeurs possibles de X sont $0, 1, 2, 3$ et $P(X = 0) = \frac{1}{8}$, $P(X = 1) = \frac{3}{8}$, $P(X = 2) = \frac{3}{8}$, $P(X = 3) = \frac{1}{8}$. On calcule $E[X] = 0\cdot\frac{1}{8} + 1\cdot\frac{3}{8} + 2\cdot\frac{3}{8} + 3\cdot\frac{1}{8} = \frac{3}{2}$

et $V[X] = 0^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} - (\frac{3}{2})^2 = \frac{3}{4}$. Autre solution : X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(3, \frac{1}{2})$, donc $E[X] = 3 \cdot \frac{1}{2}$ et $V[X] = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$. Enfin, $E[\sin(\pi X/2)] = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 0 \cdot \frac{3}{8} + (-1) \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$

Exercice 6 On sème 100 graines dont chacune a une probabilité $p = \frac{1}{10}$ de germer. On note X le nombre total de graines qui germent.

(a) Quelle est la loi de X ? C'est une loi binomiale $\mathcal{B}(100, \frac{1}{10})$, c.à.d. $P(X = k) = \binom{100}{k}(\frac{1}{10})^k(\frac{9}{10})^{100-k}$

(b) Quelle est son espérance, son écart-type ? Nous avons appris des formules pour cela : $E[X] = 100 \cdot \frac{1}{10} = 10$ et $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{100 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10}} = 3$

Exercice 7. Soient $X_1, \dots X_n$ des v.a.i.i.d. de distribution $\mathcal{B}(1, p)$. Quelle est la loi de $X_1 + \cdots + X_n$? Réponse : $\mathcal{B}(n, p)$

Exercice 8. Soient deux parents hétérozygotes de génotype Aa. Leurs enfants peuvent avoir le génotye AA, aa, ou Aa avec probabilité $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ respectivement. Ils ont 4 enfants. La biologie nous dit que les génotypes des enfants sont indépendants.

(a) Quelle est la probabilité qu'exactement un des enfants ait le génotype aa ? C'est une loi binomiale : $P(\text{nombre d'enfant de génotype aa} = 1) = \binom{4}{1}(\frac{1}{4})^1(\frac{3}{4})^3 = \frac{27}{64} \cong 42,1875\%$

(b) Quelle est la probabilité qu'au moins un des enfants ait le génotype aa ? $= 1 - P(\text{tous différents de aa}) = 1 - (\frac{3}{4})^4 = \frac{175}{256} \cong 68,36\%$

(c) Les trois premiers enfants ont le génotype aa. Quelle est la probabilité que le quatrième ait le génotype aa ? Par indépendance, c'est toujours $\frac{1}{4}$!

Exercice 9. Soit X une variable aléatoire dans $\mathbb{Z}^*$ de loi donnée par

$$P(X = k) = 2^{-|k|-1}, \qquad k \neq 0.$$

(a) Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y(\omega) = |X(\omega)|$.

(b) Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z(\omega) = 2 + \pi\cos(\pi X(\omega))$.

(a) Y peut prendre les valeurs $1, 2, 3, 4, \dots$, et $P(Y = k) = P(X = k \text{ ou } X = -k) = 2 \cdot 2^{-k-1} = 2^{-k}$.
(b) Regardons la v.a. $\cos(\pi X)$. Elle prend la valeur 1 si X est paire, et -1 si X est impaire. Donc $P(\cos(\pi X) = 1) = P(X = \pm 2 \text{ ou } X = \pm 4 \text{ ou } X = \pm 6 \text{ ou } ...) = 2^{-2} + 2^{-4} + 2^{-6} + \dots = (\frac{1}{4})^1 + (\frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{4})^3 + \dots = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$. En conséquence, $P(\cos(\pi X) = -1) = \frac{2}{3}$. Ensuite, $P(Z = 2 + \pi) = \frac{1}{3}$ et $P(Z = 2 - \pi) = \frac{2}{3}$.

Exercice 10. Un trousseau de n clefs contient une seule clef ouvrant une serrure donnée. On les essaie l'une après l'autre au hasard. Calculer la loi, l'espérance et la variance du nombre d'essais nécessaires. Même question si l'on essaie à chaque fois une clef au hasard sans avoir écarté les précédentes. (a) En essayant une clé après l'autre : la "bonne" clé est la 1re, 2me, ..., $n$me clé essayée avec probabilités égales. On a donc une loi uniforme avec valeurs possibles $\{1, 2, \dots, n\}$. On a appris $E[X] = \frac{n+1}{2}$, $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$. (b) Si on n'écarte pas les clés déjà essayées : X suit alors une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{n}$. La v.a. X peut prendre les valeurs $1, 2, 3, 4, \dots$, et $P(X = k) = (\frac{n-1}{n})^{k-1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{(n-1)^{k-1}}{n^k}$. On a appris $E[X] = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n$ et $V[X] = \frac{1-\frac{1}{n}}{(\frac{1}{n})^2} = (n-1)n$.