Feuille d'exercices 2

Exercice 1 Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une au hasard, et on considère les évènements : A = « tirage d'un nombre pair », B = « tirage d'un multiple de 3 » :

(a) Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

(b) Reprendre la question avec une urne contenant 13 boules.

(a) $P(A \cap B) = P(\{6, 12\}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$, et $P(A) \cdot P(B) = P(\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}) \cdot P(\{3, 6, 9, 12\}) = \frac{2}{12} \cdot \frac{4}{12} = \frac{1}{6}$. Puisque $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, les événements A et B sont indépendants. (b) $P(A \cap B) = \frac{2}{13}$ et $P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{13} \cdot \frac{4}{13} = \frac{24}{169}$. Les événements sont dépendants.

Exercice 2. Une urne contient des jetons, dont chacun est rouge ou noir, et marqué A ou B. Lors du tirage d'un jeton, la probabilité d'en tirer un rouge est $\frac{3}{5}$, celle d'en tirer un B est $\frac{2}{3}$, et celle d'en tirer un qui est rouge et A est p.

(a) Que vaut la probabilité d'en tirer un qui est noir et marqué B ?

(b) Pour quelles valeurs de p les évènements «noir» et «B» sont-ils indépendants ?

On peut dessiner un schéma avec $2 \times 2 = 4$ boîtes, correspondants aux 4 cas AR, AN, BR, BN, pour mieux visualiser les différentes probabilités. (a) On a $P(R) = \frac{3}{5}$, $P(N) = \frac{2}{5}$, $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{2}{3}$, $P(R \cap A) = p$. Calculons d'abord $P(N \cap A) = P(A) - P(R \cap A) = \frac{1}{3} - p$. Ensuite, $P(N \cap B) = P(N) - P(N \cap A) = \frac{2}{5} - (\frac{1}{3} - p) = \frac{1}{15} + p$. (b) N et B sont indépendants si et seulement si $P(N \cap B) = P(N) \cdot P(B)$, c.à.d. ssi $\frac{1}{15} + p = \frac{4}{15}$ ou encore $p = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.

Exercice 3 Arthur et Brigitte ont deux durées de vie indépendantes, telles que :

$$P(\text{Arthur vit encore 9 ans}) = \frac{4}{5}, \quad P(\text{Brigitte vit encore 9 ans}) = \frac{3}{5}.$$

Calculer les probabilités que : Notons les événements A = Arthur vit encore 9 ans, et B = Brigitte vit encore 9 ans (au moins).

(a) Arthur et Brigitte vivent encore 9 ans $P(A \cap B) = \frac{12}{25}$

(b) L'un des 2 au moins vive encore 9 ans $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} - \frac{12}{25} = \frac{23}{25}$.
Autre solution : $1 - P(\text{Arthur meurt et Brigitte meurt}) = 1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{23}{25}$

(c) Arthur seulement vive encore 9 ans (mais pas Brigitte) $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{25}$

(d) Arthur vive encore 9 ans sachant que l'un des 2 au moins vivra encore 9 ans. $P(A|A \cap B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{4/5}{23/25} = \frac{20}{23} \cong 0,87$

Exercice 4 Trois usines fabriquent 20%, 30%, et 50% des roulements à billes pour une compagnie. La probabilité qu'un roulement à billes soit défectueux est de 0.04, 0.03, et 0.02 pour les trois usines. La compagnie reçoit un roulement à billes défectueux. Quelle est la probabilité qu'il provienne de la première usine ? Ceci est une question standard concernant la formule de Bayes. On pourra dessiner un arbre. $P(\text{première usine}|\text{défectueux}) = \frac{0,2 \cdot 0,04}{0,2 \cdot 0,04 + 0,3 \cdot 0,03 + 0,5 \cdot 0,02} = \frac{8}{27} \cong 0,296$

Exercice 5 Le gérant d'un supermarché a reçu un lot de boîtes d'œufs. 5% des boîtes sont abîmées. Le gérant estime que 60% des boîtes abîmées contiennent au moins un œuf cassé et que 98% des boîtes non abîmées ne contiennent aucun œuf cassé. Un client prend au hasard une boîte du lot. On désigne par A l'évènement : «la boîte est abîmée» et par C l'évènement «la boîte choisie contient au moins un œuf cassé».

(a) Calculer les probabilités $P(A)$, $P(\bar{A})$, $P(C|A)$, $P(C|\bar{A})$, $P(\bar{C}|A)$ et $P(\bar{C}|\bar{A})$. On commencera par caractériser celles qui sont explicitement dans l'énoncé.

(b) Le client constate qu'un des œufs est cassé. Quelle est a la probabilité pour qu'il ait choisi une boîte abîmée ?

(a) $P(A) = 0,05,\ P(\overline{A}) = 0,95,\ P(C|A) = 0,6,\ P(\overline{C}|A) = 0,4,\ P(C|\overline{A}) = 0,02,\ P(\overline{C}|\overline{A}) = 0,98.$
(b) C'est la formule de Bayes. $P(A|C) = \frac{P(A\cap C)}{P(C)} = \frac{0{,}05\cdot 0{,}6}{0{,}05\cdot 0{,}6+0{,}95\cdot 0{,}02} = \frac{30}{30+19} = \frac{30}{49} \cong 0,612$

Exercice 6. Une usine fabrique des pièces, avec une proportion de 10% de pièces défectueuses. Le contrôle des fabrications est tel que :

- Si la pièce est bonne, elle est acceptée avec probabilité 0,9.
- Si la pièce est mauvaise, elle est refusée avec probabilité 0,8.

Quelle est la probabilité qu'une erreur de contrôle se produise sur une pièce choisie au hasard ? On pourra dessiner un arbre ! Notons les événements B, M, Acc, Rej. On cherche la probabilité d'une erreur de contrôle, c.à.d. d'un faux positif ou un faux négatif du test : $P(B \cap Rej) + P(M \cap Acc) = 0,9 \cdot 0,1 + 0,1 \cdot 0,2 = 0,09 + 0,02 = 0,11$, donc 11%.

Exercice 7. Un livre a une probabilité de $\frac{1}{3}$ de se trouver dans une commode comportant 5 tiroirs, et des chances égales de se trouver dans chacun des tiroirs.

(a) On ouvre les 4 premiers tiroirs, sans le trouver ; quelle est la probabilité de le trouver dans le dernier tiroir ?

(b) On ouvre les 2 premiers tiroirs, sans le trouver ; quelle est la probabilité de le trouver dans le dernier tiroir ? dans l'un des 3 derniers tiroirs ?

Indication : On notera T_i l'évènement «Le livre est dans le tiroir i», ceci pour i allant de 1 à 5, et T_0 «Le livre n'est pas dans la commode». Noter que ces six évènements forment une partition de Ω.
(a) $P(T_5|T_0 \cup T_5) = \frac{P(T_5)}{P(T_0 \cup T_5)} \overset{disjoint}{=} \frac{1/15}{1/15\ +\ 2/3} = \frac{1}{11}$. (b) $P(T_5|T_0 \cup T_3 \cup T_4 \cup T_5) = \frac{1/15}{2/3\ +\ 3/15} = \frac{1}{13}$.
$P(T_3 \cup T_4 \cup T_5|T_0 \cup T_3 \cup T_4 \cup T_5) = \frac{3/15}{2/3\ +\ 3/15} = \frac{3}{13}$.

Exercice 8. Le quart d'une population est vacciné contre le choléra. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour 4 non-vaccinés. En plus, parmi les vaccinés il y a une personne sur 12 qui tombe malade. Quelle est la probabilité qu'un non-vacciné tombe malade ? Cette question est relativement difficile. On calcule d'abord $P(V \cap M) = P(V) \cdot P(M|V) = \frac{14}{\cdot}\frac{1}{12} = \frac{1}{48}$. Ensuite, $P(M) = \frac{P(V\cap M)}{V|M} = \frac{1/48}{1/5} = \frac{5}{48}$. Finalement, $P(M|\overline{V}) = \frac{M\cap\overline{V}}{P(\overline{V})} = \frac{P(M)-P(M\cap V)}{P(\overline{V})} = \frac{5/48\ -1/48}{3/4} = \frac{1}{9}$. À titre de comparaison, $P(M|V) = \frac{1}{12}$, donc ce vaccin n'est pas très efficace !

Exercice 9. Une urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires. Quand une boule est tirée, on la remet dans l'urne, avec 5 boules de la même couleur. On effectue ainsi deux tirages au hasard. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit noire sachant que la seconde est blanche ? Notons $1B$, $1N$, $2B$, $2N$ les événements que la première/deuxième boule tirée soit blanche/noire. L'énoncé implique $P(2B|1B) = \frac{8}{15}$, $P(2N|1B) = \frac{7}{15}$, $P(2B|1N) = \frac{3}{15}$ et $P(2N|1N) = \frac{12}{15}$. Comme toujours, on peut dessiner un arbre... On calcule $P(1N|2B) = \frac{P(1N\cap 2B)}{P(2B)} = \frac{\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{15}}{\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{15}+\frac{3}{10}\cdot\frac{8}{15}} = \frac{21}{21+24} = \frac{7}{15} \cong 0,466$

Exercice 10. Dans une population on trouve une proportion de 1 pour 10000 individus qui portent un certain virus. Il y a un test pour la présence de ce virus. Ce test n'est pas parfait : si un individu porte le virus, alors le test le détecte avec une probabilité de 0,99. Si un individu ne porte pas le virus, le test donne un résultat positif (érroné) avec probabilité de 0,001.

On tire un individu au hasard de la population, on lui fait passer le test, et le résultat est positif ; quelle est la probabilité qu'il porte vraiment le virus ? Soit $V =$"l'individu porte le virus" et $T =$"le test donne un résultat positif". Alors $P(V|T) = \frac{P(V) \cdot P(T|V)}{P(V) \cdot P(T|V) + P(\overline{V}) \cdot P(T|\overline{V})} = \frac{\frac{1}{10000} \cdot 0{,}99}{\frac{1}{10000} \cdot 0{,}99 + 0{,}9999 \cdot 0{,}001} \simeq 0,09$. Donc, malgré un test très performant, un individu testé positif n'a que 9% de chances de porter vraiment le virus ! Voici la solution du paradoxe : le virus est tellement rare que les fausses alertes sont plus nombreux que des vrais tests positifs.