Feuille d'exercices 1

Exercice 1 Soient A, B et C trois evénements. L'événement «A et B se réalisent» s'écrit «$A \cap B$». Ecrire de manière analogue, en utilisant les symboles d'union, d'intersection et de passage au complémentaire les événements suivants (l'écriture demandée n'est pas forcément unique) :

(a) A ou B se réalisent $A \cup B$

(b) A ne réalise pas $\overline{A}$

(c) A et B réalisent mais pas C $A \cap B \cap \overline{C}$

(d) A ou B se réalisent mais pas les deux en même temps. (La formule est ici plus longue) $(A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)}$ ou $(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$

Exercice 2. Soient A et B deux evénements de probabilités $P(A) = \frac{3}{4}$ et $P(B) = \frac{1}{3}$. Montrer que forcément

$$\frac{1}{12} \leqslant P(A \cap B) \leqslant \frac{1}{3}.$$

On commencera par la deuxième inégalité qui est plus simple et pour la première on passera au complémentaire.

La deuxième inégalité est facile : comme $A \cap B \subseteq B$, on a $P(A \cap B) \leqslant P(B) = \frac{1}{3}$. Pour la première inégalité, deux solutions possibles. (1) on rappelle la formule $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Ensuite $1 \geqslant P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{13}{12} - P(A \cap B)$. (2) On passe au complémentaire $P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A} \cup \overline{B}) \leqslant P(\overline{A}) + P(\overline{B}) = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{11}{12}$. Donc $P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A \cap B}) \geqslant 1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$

Exercice 3 Dans une première expérience on jette un dé pipé : $P(1) = \frac{1}{2}, P(2) = P(3) = \cdots = P(6) = p$. Que vaut p ?

Dans une second expérience on jette deux dés pipés identiques à celui utilisé précédemment. Un dé est vert l'autre est rouge. Donnez une modélisation de cette expérience. Quelle est la probabilité d'obtenir une paire ? On doit avoir $\frac{1}{2} + 5 \cdot p = 1$, donc $p = \frac{1}{10}$. Modélisation : $P(R = 1, V = 1) = \frac{1}{4}$, et pour tout $i, j \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ on a $P(R = i, V = 1) = P(R = 1, V = j) = \frac{1}{20}$ et $P(R = i, V = j) = \frac{1}{100}$. La probabilité d'une paire est donc $\frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{1}{100} = 0,3 = 30\%$.

Exercice 4 Un tournoi sportif compte 8 équipes engagées. Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres une seule fois. Combien doit-on organiser de matchs ? Réponse : $\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28$ matchs. On peut profiter de l'occasion pour rappeler que, par exemple $\binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 9 \cdot 7 \cdot 2$ se calcule dans la tête, et surtout sans calculatrice !

Exercice 5. On considère les mains de 5 cartes que l'on peut extraire d'un jeu de 32 cartes. ATTENTION, il faut expliquer que signifie l'expression française "une *main* de cinq cartes".

(a) Combien y a-t-il de mains différentes ? $\binom{32}{5} = 201376$

(b) Combien y a-t-il de mains comprenant exactement l'as de pique ? $\binom{31}{4} = 31465$

(c) Combien y a-t-il de mains comprenant exactement un as ? Quelle est la probabilité qu'une main contienne exactement un as ? $\binom{4}{1}\binom{28}{4} = 81900$. Probabilité $\frac{81900}{201367} \cong 0,4067$ donc plus de 40%.

(d) Combien y a-t-il de mains sans valet ? $\binom{28}{5} = 98280$

(e) * Combien y a-t-il de mains comprenant au moins un roi et au moins une dame ?
Indication : Exprimer ce nombre en fonction des trois nombres de mains : sans roi, sans dame, sans roi ni dame. On va regarder trois ensembles M =tous les mains, SR =mains sans roi, SD =mains sans dame. Alors on calcule $|M \backslash (SR \cup SD)| = |M| - |SR \cup SD| = |M| - |SR| - |SD| + |SR \cap SD| = \binom{32}{5} - \binom{28}{5} - \binom{28}{5} + \binom{24}{5} = 47320$

Exercice 6. Raymond Queneau a écrit un ouvrage intitulé *Cent mille milliards de poèmes*. Il est composé de 10 pages contenant chacune 14 vers. Le lecteur peut composer son propre poème de 14 vers en prenant le premier vers de l'une des 10 pages puis le deuxième vers de l'une des 10 pages et ainsi de suite jusqu'au quatorzième vers. Justifier le titre de l'ouvrage. $10^{14} = 100000 \cdot 1000000000 =$ cent mille milliards.

Exercice 7. A l'occasion d'une compétition sportive groupant 18 athlètes, on attribue une médaille d'or, une d'argent, une de bronze. Combien y-a-t-il de distributions possibles ? $18 \cdot 17 \cdot 16 = 4896$

Exercice 8. Donner les espaces de probabiltés (Ω, P) associés aux expériences aléatoires suivantes :
(a) On lance deux pièces de monnaie, et ω est le nombre de pile apparus.
(b) On choisit une pièce au hasard dans un porte-monnaie qui contient deux pièces de deux euros, trois pièces de un euros, cinq pièces de 10 centimes. (Deux choix possibles).
(c) On choisit un nombre entier au hasard entre 1 et 100.

Exercice 9. On constitue une file d'attente en attribuant au hasard des numéros d'ordre à n personnes ($n \geqslant 2$). Deux amis A et B se trouvent dans cette file d'attente. Quelle est la probabilité que les deux amis soient situés l'un derrière l'autre ?
Indication : On considérera séparément le cas « A devant B » et le cas « B devant A ». Il y a $n!$ files d'attente différentes possibles. Regardons d'abord les cas où A se trouve juste devant B : il y en a $(n-1) \cdot (n-2)!$. De façon semblable, il y a $(n-1) \cdot (n-2)!$ autres cas, avec B juste devant A. La probabilité qu'ils se retrouvent ensemble est donc de $\frac{2 \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{n!} = \frac{2}{n}$.

Exercice 10. Un QCM comporte 10 questions, pour chacune desquelles 4 réponses sont proposées, une seule est exacte. Combien y-a-t-il de grilles-réponses possibles ? Quelle est la probabilité de répondre au hasard au moins 6 fois correctement ?
Il y a $4^{10} = 1048576$ grilles-réponses possibles. Parmi eux, regardons ceux qui ont 6, 7, 8, 9, ou 10 réponses correctes : il y en a $\binom{10}{4} \cdot 3^4 + \binom{10}{3} \cdot 3^3 + \binom{10}{2} \cdot 3^2 + \binom{10}{1} \cdot 3 + 1 = 20686$. La probabilité d'avoir au moins six bonnes réponses est donc $\frac{20686}{1048576} \cong 0,01972$, donc un peu moins de 2%.

Exercice 11. Dans une entreprise, il y a 800 employés. Parmi ces employés, 300 sont des hommes, 352 sont membres d'un syndicat, 424 sont mariés, 188 sont des hommes syndiqués, 166 sont des hommes mariés, 208 sont mariés et syndiqués, 144 sont des hommes mariés syndiqués. Combien y-a-t-il de femmes non mariées et non syndiquées ?
Indication : Noter H, M, S les trois sous-ensembles «Hommes», «Mariés», «Syndiqués». Réécrire les hypothèses en utilisant ces notations. Calculer de cardinal du complémentaire de l'ensemble d'intérêt en utilisant la formule du cours concernant $|A \cup B|$, et également que $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
Il faut d'abord rappeler/introduire la formule $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$. Ensuite, le nombre de femmes non mariées et non syndiquées est $|\text{Employés}| - |H \cup S \cup M|$. On calcule $|H \cup S \cup M| = |H| + |S| + |M| - |H \cap S| - |H \cap M| - |S \cap M| + |H \cap S \cap M| = 300 + 352 + 424 - 188 - 166 - 208 + 144 = 658$. Donc il y a $800 - 658 = 142$ femmes non mariées et non syndiquées.