Analyse 1
Résumé succinct

Cours de première année de licence
Université de Rennes 1
Version du 4 novembre 2008

Ce texte a été rédigé entre 2006 et 2008 par les équipes pédagogiques de "A01" et "AN1".

Programme

Les résultats exposés dans ce cours sont admis. En revanche on expliquera comment les utiliser.

Étude de fonctions Définitions intuitives de la limite en un point d'une fonction, de la continuité, de la dérivée (pente de la tangente, limite du taux d'accroissement, approximation affine). Théorème des valeurs intermédiaires, des accroissements finis. Dérivation d'un produit, d'un quotient, d'une fonction composée. Fonctions classiques : polynômes, fractions rationnelles, exponentielle, ch, sh, sin, cos. Représentations graphiques, variations, comparaison, ordres de grandeur. Formules de trigonométrie sphérique et hyperbolique. Encadrement par des polynômes au voisinage de zéro. Application au calcul de limites. Fonctions Arctan, Arcsin, Arccos. Primitives. Définition. Formulaire (exp, sin, $1/(x+a)^b$, $1/(1+x^2)$, $1/(1-x^2)^{1/2}$, ...). Intégration par parties. Changement de variable. Pas de théorie de la décomposition en éléments simples (quelques exemples par coefficients indéterminés).

Nombres Complexes Construction des nombres complexes comme ensemble de couples de réels. Complexe conjugué, module et inverse. Ecriture des complexes en coordonnées polaires, interprétation géométrique de la multiplication par un complexe de module 1 et du passage au conjugué. Exponentielle complexe et applications à la trigonométrie. Application des complexes à des problèmes de géométrie plane, similitudes. Equations différentielles à coefficients constant du premier et du second ordre. Au second ordre, un ou deux exercices avec un second membre simple. Application : circuits RLC.

Bibliographie de base
Ouvrages de terminale S
Liret Martinais
K. E. Hirst, Keith E. Hirst Calculus of One Variable

Remarque

Les résultats exposés dans ce cours sont tous admis. En revanche on expliquera comment les utiliser. L'objet du cours est de permettre à l'étudiant de confirmer et renforcer sa pratique de l'utilisation des premiers outils de l'analyse réelle et complexe. Il est aussi l'occasion de découvrir des énoncés de théorèmes d'analyse qui ont des applications immédiates dans les sciences.

I Fonctions et graphes

1 Introduction

Remarque 1.1 Nous ferons un usage élémentaire des notions d'*égalité*, d'*ensemble*, de *sous-ensemble*, d'*ensemble vide*, d'*élément*, d'*appartenance*, d'*inclusion*, d'*intersection,* de *réunion* et de *différence d'ensembles* ainsi que des symboles

$$=, \neq, \emptyset, \subset, \not\subset, \in, \notin, \cup, \cap, \setminus$$

qui leurs sont associés. Nous éviterons tant que possible le recours aux symboles $\forall$ et $\exists$ qui s'appellent respectivement **quantificateur universel** et **quantificateur existentiel** et se lisent respectivement *pour tout* et *il existe*.

Définition 1.1 Soient A et B deux ensembles. Une **fonction** (ou **application**) de A dans B est la donnée pour tout élément a de A d'un élément $b = f(a)$ de B appelé **valeur de f en a**. On note :

$$\begin{aligned} f: \ & A \to B \\ & a \mapsto f(a) = b. \end{aligned}$$

L'ensemble A s'appelle **domaine de f**, l'ensemble B s'appelle **l'ensemble d'arrivée** et le sous-ensemble

$$f(A) = \{b \in B | \exists a \in A, f(a) = b\}$$

de toutes les valeurs $f(a)$ obtenues lorsque a décrit A s'appelle **l'image de f**. Si $a \in A$ et $b \in B$ vérifient $b = f(a)$ alors b est appelé **image de a par f** et a est appelé **antécédent de b par f**. Si $b \in B$, le sous-ensemble de A formé de tous ses antécédents est noté $f^{-1}(b)$. Il est non vide si et seulement si b est un élément de $f(A)$

Exemples 1.1 Soit f la fonction dont le domaine est $A =]-1,1[$, l'ensemble d'arrivée $B = \mathbf{R}$ et définie par la formule $f(x) = 2x^2$. Alors $f(]-1,1[) = [0,2[$ est différent de $\mathbf{R}$. On a $f^{-1}(\frac{2}{9}) = \{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$ alors que $f^{-1}(3) = \emptyset$ est l'ensemble vide.

Définition 1.2 Soient $f : A \to B$ et $A' \subset A$. La **restriction** $f_{|A'}$ de f à A' est la fonction de A' dans B définie par $f_{|A'}(x) = f(x)$ si $x \in A'$. Si la restriction de f à A' vérifie une propriété donnée on dit que f vérifie cette propriété sur A'. Soit A'' et B'' des ensembles contenant respectivement A et B et g une application de A'' dans B''. Si pour tout élément $x \in A$ on a $f(x) = g(x)$ on dit que g **prolonge f à A''** ou que g **est un prolongement de f à A''**.

Exemple 1.2 Soit $A' = \{a,b,c,d,e\}$, $A = \{a,b,c,d\}$, $B' = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$ et $B = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$. On considère l'application $f : A \to B$ définie par

$$\begin{aligned} f(a) &= \alpha \\ f(b) &= \beta \\ f(c) &= \gamma \\ f(d) &= \delta, \end{aligned}$$

l'application $i : A' \to B'$ définie par

$$\begin{aligned} i(a) &= \alpha \\ i(b) &= \beta \\ i(c) &= \gamma \\ i(d) &= \delta \\ i(e) &= \varepsilon \end{aligned}$$

et l'application $j : A' \to B$ définie par

$$\begin{array}{rcl} j(a) & = & \alpha \\ j(b) & = & \beta \\ j(c) & = & \gamma \\ j(d) & = & \delta \\ j(e) & = & \delta. \end{array}$$

Les applications i et j sont deux prolongements différents de f à A'. L'application f est la restriction de j à A : $j_{|A} = f$. Bien que $i(x) = f(x)$ pour tout élément x de A, f n'est pas la restriction de i à A car f et i n'ont pas le même ensembe d'arrivée.

Dans la suite on s'intéressera à des fonctions **numériques d'une variable réelle**. Ceci signifie que A est un sous-ensemble de l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels (d'une variable réelle) ainsi que B (numérique).

Remarque 1.2 Souvent une fonction numérique d'une variable réelle est donnée par une formule sans précision de son domaine. Le premier travail à faire est alors de trouver le domaine le plus grand sur laquelle elle est définie. Par exemple la fonction donnée par $f(x) = \frac{1}{x}$ admet pour domaine $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ et la fonction donnée par $g(x) = \sqrt{x}$ admet pour domaine $[0, +\infty)$.

Définition 1.3 La fonction **valeur absolue** est la fonction $|\ | : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x < 0$.

Pour *visualiser* une fonction et ses propriétés on utilise son graphe.

Définition 1.4 Le graphe d'une fonction numérique de la variable réelle $f : A \to B$ est le sous-ensemble de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$

$$\{(x, f(x)) | x \in A\}.$$

Exemples 1.3 Voici le graphe de la fonction f de $[-1, 1]$ dans $\mathbf{R}$ et définie par la formule $f(x) = \frac{|x|}{2}$.

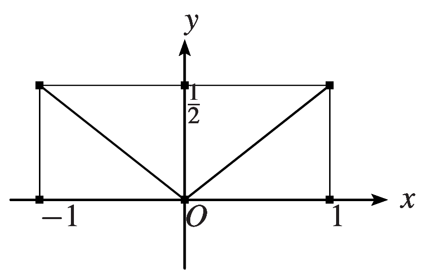


FIG. 1 – Le graphe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}|x|$

Définition 1.5 Si f et g sont deux fonctions numériques définies sur A et si $\lambda \in \mathbf{R}$ on définit **la somme** $f + g$, **le produit** λf **et le produit** fg par :

$$\text{si } \ x \in A, \ (f+g)(x) = f(x) + g(x), \ (\lambda f)(x) = \lambda(f(x)), \ (fg)(x) = f(x)g(x).$$

2 Les polynômes

Définition 2.1 On appelle **polynôme** une fonction P de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ pour laquelle il existe des réels en nombre fini $a_0, ..., a_d$ tels que si $x \in \mathbf{R}$ alors

$$P(x) = a_d x^d + ... + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k.$$

Les a_i s'appellent les **coefficients de** P. Si tous les a_i sont nuls le polynôme P est le **polynôme nul** et son **degré** est $-\infty$. Si au moins l'un des a_i est non nul, on appelle **degré** de P le plus grand indice i pour lequel a_i est non nul. Si seul a_d est non nul alors P est appelé **monôme de degré** d.

Proposition 2.1 *Si P et Q sont deux polynômes et $\lambda \in \mathbf{R}$ alors $P+Q$, PQ et λP sont des polynômes.*

Notation 2.1 Le polynôme dont les coefficients sont $a_0, ..., a_d$ est noté $a_d x^d + ... + a_1 x + a_0$ ou $\sum_{k=0}^{d} a_k x^k$.

Remarque 2.1 Si $(a_0, ..., a_d)$ et $(b_0, ..., b_f)$ sont associés à un même polynôme avec $a_d \neq 0$ et $b_f \neq 0$ alors $d = f$ et pour tout i on a $a_i = b_i$: les coefficients sont égaux.

Exemples 2.1 Le polynôme $P = x^2 - 3x + 2$ est un polynôme de degré 2. Si $c \in \mathbf{R}$ la fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x) = c$ est un polynôme de degré 0 ou $-\infty$ appelée **fonction constante** c. Si $a, b \in \mathbf{R}$ la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = ax + b$ est un polynôme de degré au plus 1 appelée **fonction affine**. Si $b = 0$ on dit que f est **linéaire**.

Théorème 2.1 *Soit A et B deux polynômes avec B non nul. Alors il existe un unique couple de polynômes (Q, R) tels que $A = BQ + R$ et le degré de R est strictement inférieur à celui de B.*

Définition 2.2 Soient A, B, Q, R des polynômes tels que B non nul, $A = BQ + R$ et le degré de R est strictement inférieur à celui de B. On dit que Q est le **quotient de la division euclidienne de** A **par** B et que R est le **reste**. Le polynôme A est appelé le **dividende** et le polynôme B le **diviseur**.

Exemple 2.2 $3x + 2$ et $-x + 1$ sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $6x^3 + 4x^2 + 2x + 3$ par $2x^2 + 1$.

Proposition 2.2 *Soient $r \in \mathbf{R}$ et P un polynôme. Alors r est racine de P (i.e. $P(r) = 0$) si et seulement si le reste de la division euclidienne de P par $x - r$ est le polynôme nul.*

Exemple 2.3 On a $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ et 1 est racine de $x^2 - 1$.

Définition 2.3 Un nombre réel r est **racine** (**zéro**) d'une fonction f si $f(r) = 0$. Si f est un polynôme et si $m \in \mathbf{N}^*$ on dit que r est **racine** (**zéro**) **de multiplicité** m s'il existe un polynôme g tel que $f = (x-r)^m g$ et $g(r) \neq 0$.

Exemple 2.4 Soit $f = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$. Alors $f = (x+1)^2 g$ avec $g = x^2 + 1$. Or $g(-1) = 2$. Par conséquent -1 est racine de multiplicité 2 de f.

3 Fractions rationnelles

Définition 3.1 Soient f et g deux polynômes. Si g n'est pas le polynôme nul alors **la fraction rationnelle** $\frac{f}{g}$ est la fonction de $\mathbf{R} \setminus g^{-1}(0)$ dans $\mathbf{R}$ définie par $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Exemples 3.1 Le domaine de la fraction rationnelle $x \mapsto \frac{3x+2}{x^2+4}$ est $\mathbf{R}$ alors que le domaine de la fraction rationnelle $x \mapsto \frac{3x+2}{x^2-4}$ est $\mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$.

4 Parité

Définition 4.1 Une fonction $f : A \to B$ est dite **paire** (respectivement **impaire**) si pour tout $x \in A$ alors $-x \in A$ et $f(-x) = f(x)$ (respectivement $f(-x) = -f(x)$).

Proposition 4.1 *Soit $f : A \to B$ une fonction. On suppose que si $x \in A$ alors $-x \in A$. Alors il existe un unique couple (P,I) tel que $P : A \to \mathbf{R}$ est une fonction paire, $I : A \to \mathbf{R}$ est une fonction impaire et $f = P + I$. Si $x \in A$ alors $P(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $I(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$.*

Exemple 4.1 La valeur absolue est une fonction paire.

Exemple 4.2 Un polynôme non nul est pair si et seulement s'il est somme de monômes de degré pair. Il est impair si et seulement si il est somme de monômes de degré impair.

Exemple 4.3 Si f et g sont deux polynômes non nuls alors la fraction rationnelle $\frac{f}{g}$ est paire si et seulement si f et g sont simultanément pairs ou simultanément impairs et elle est impaire si et seulement si f est pair pendant que g est impair ou que f est impair pendant que g est pair.

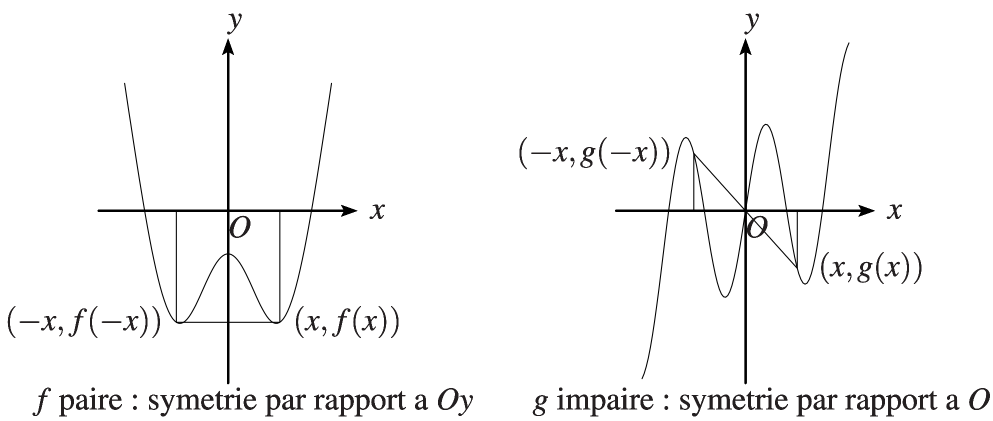


FIG. 2 – Symétrie du graphe en fonction de la parité

5 Composition de fonctions, injection, surjection, bijection, réciproque

Définition 5.1 Si $f : A \to B$ et $g : B \to C$ sont deux fonctions on appelle **composée de** f **par** g la fonction $g \circ f$ (on lit **g rond f**) la fonction de A dans C définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ pour tout $x \in A$.

Exemple 5.1 On considère les ensembles $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$ et $C = \{1,2,3,4\}$ et les applications $f : A \to B$ définie par

$$\begin{array}{rcl} f(a) & = & \alpha \\ f(b) & = & \beta \\ f(c) = f(d) & = & \delta \end{array}$$

et $g : B \to C$ définie par

$$\begin{array}{rcl} g(\alpha) & = & 1 \\ g(\beta) = g(\gamma) & = & 2 \\ g(\delta) = g(\varepsilon) & = & 4. \end{array}$$

Alors la composée $g \circ f$ est l'application de A dans C définie par

$$\begin{array}{rcl} (g \circ f)(a) & = & 1 \\ (g \circ f)(b) & = & 2 \\ (g \circ f)(c) = (g \circ f)(d) & = & 4. \end{array}$$

Définition 5.2 On dit que $f : A \to B$ est **injective** si pour tous les x et x' de A distincts ($x \neq x'$) les images $f(x)$ et $f(x')$ sont distinctes ($f(x) \neq f(x')$), c'est à dire tout y de B possède au plus un antécédent.

Exemples 5.2 La fonction f de $\mathbf{R}$ dans $[0,+\infty)$ définie par $f(x) = x^2$ n'est pas injective car $f(1) = f(-1) = 1$. En revanche la fonction $g : [0,+\infty) \to \mathbf{R}$ définie par $g(x) = \sqrt{x}$ est injective car si x et x' sont positifs ou nuls et $\sqrt{x} = \sqrt{x'}$ alors $x = \sqrt{x}^2 = \sqrt{x'}^2 = x'$. Sauf si le domaine est réduit au singleton $\{0\}$, une fonction paire n'est jamais injective.

Définition 5.3 On dit que $f : A \to B$ est **surjective** si $f(A) = B$ c'est à dire si tout y dans B possède au moins un antécédent.

Exemples 5.3 La fonction f de $\mathbf{R}$ dans $[0,+\infty)$ définie par $f(x) = 2x^2$ est surjective car pour tout réel positif ou nul y il existe un réel x tel que $x^2 = y$. En revanche la fonction $g : [0,+\infty) \to \mathbf{R}$ définie par $g(x) = \sqrt{x}$ n'est pas surjective car un nombre strictement négatif n'est pas une racine carrée d'un réel.

Définition 5.4 On dit que $f : A \to B$ est **bijective** si elle est injective et surjective.

Remarque 5.1 La fonction $f : A \to B$ est bijective si et seulement si tout élément y de B admet un et un seul antécédent.

Exemple 5.4 La fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x) = 2x+1$ est bijective car elle est injective et surjective (injective car si $x \neq x'$ alors $2x+1 \neq 2x'+1$ et surjective car si $y \in \mathbf{R}$ alors $x = \frac{y-1}{2}$ est un antécédent de y.

Définition 5.5 Soit $f : A \to B$. On dit que $g : B \to A$ est la **réciproque de** f (ou **inverse de** f **pour la composition**) si pour tous les x de A et tous les y de B on a $(g \circ f)(x) = x$ et $(f \circ g)(y) = y$.

Proposition 5.1 *Soit $f : A \to B$. La fonction f possède une réciproque si et seulement si elle est bijective et alors cette réciproque est unique.*

Notation 5.1 On note f^{-1} la réciproque de f si elle existe.

Remarque 5.2 Si g est la réciproque de f alors f est la réciproque de g.

Exemple 5.5 La fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x) = 2x + 1$ et la fonction g de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $g(y) = \frac{y-1}{2}$ sont réciproques l'une de l'autre.

Exemples 5.6 Soit $A' = \{a,b,c,d,e\}$, $A = \{a,b,c,d\}$ et $B = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$. On considère aussi les ensemble $C = \{\alpha,\beta,\gamma\}$ et $D = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$. L'application $f : A \to B$ définie par

$$\begin{array}{rcl} f(a) & = & \alpha \\ f(b) & = & \beta \\ f(c) & = & \gamma \\ f(d) & = & \delta \end{array}$$

est injective mais elle n'est pas surjective. L'application $g : A \to C$ définie par

$$\begin{array}{rcl} g(a) = g(b) & = & \alpha \\ g(c) & = & \beta \\ g(d) & = & \gamma \end{array}$$

est surjective mais elle n'est pas injective L'application $h : A \to D$ définie par

$$\begin{array}{rcl} h(a) & = & \alpha \\ h(b) & = & \beta \\ h(c) & = & \gamma \\ h(d) & = & \delta \end{array}$$

est bijective. Sa réciproque est l'application $h^{-1} : D \to A$ définie par

$$\begin{array}{rcl} h^{-1}(\alpha) & = & a \\ h^{-1}(\beta) & = & b \\ h^{-1}(\gamma) & = & c \\ h^{-1}(\delta) & = & d. \end{array}$$

Définition 5.6 On dit de façon équivalente :
- f est injective et f est une **injection**,
- f est surjective et f est une **surjection**,
- f est bijective et f est une **bijection**.

6 Fonctions monotones

Définition 6.1 Soit $f : A \to B$. On dit que f est **croissante** si pour tous les x,x' de A tels que $x \leq x'$ on a $f(x) \leq f(x')$. On dit que f est **strictement croissante** si pour tous les x,x' de A tels que $x < x'$ on a $f(x) < f(x')$.

Définition 6.2 Soit $f : A \to B$. On dit que f est **décroissante** si pour tous les x,x' de A tels que $x \leq x'$ on a $f(x) \geq f(x')$. On dit que f est **strictement croissante** si pour tous les x,x' de A tels que $x < x'$ on a $f(x) > f(x')$.

Définition 6.3 Soit $f : A \to B$. On dit que f est **monotone** si elle est croissante ou si elle est décroissante. On dit qu'elle est **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou si elle est strictement décroissante.

Exemples 6.1 Les fonctions $x \mapsto 1$, $x \mapsto 5+x$, $x \mapsto -2+4x+x^3$ et la racine carrée $\sqrt{\ }$ sont croissantes ($x \mapsto 5+x$, $x \mapsto -2+4x+x^3$ et $\sqrt{\ }$ sont même strictement croissantes). Les fonctions $x \mapsto 2$, $x \mapsto 4-5x^7$ sont décroissantes ($4-5x^7$ est même strictement décroissante). Les fonctions $x \mapsto x^2$, valeur absolue, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ne sont ni croissantes ni décroissantes.

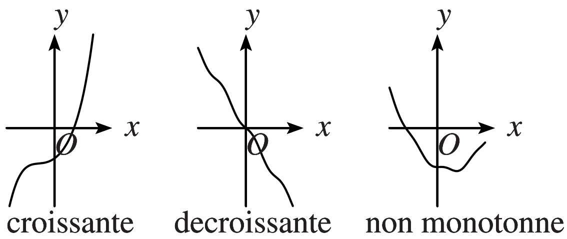


FIG. 3 – Monotonie

Proposition 6.1 *Une fonction $f : A \to B$ qui est strictement monotone est injective.*

7 Trigonométrie

Définition 7.1 Une fonction $f : A \to \mathbf{R}$ est dite **périodique** de **période** T si et seulement si pour tout $x \in A$ on a $x+T \in A$ et $f(x+T) = f(x)$.

Définition 7.2 On considère **un cercle de rayon 1**. Son périmètre vaut alors 2π (dire **deux pi**). On peut repérer les points de ce cercle par leurs coordonnées dans un repère orthonormé dont l'origine O est le centre du cercle. Les points du cercle sont les points dont les coordonnées (x,y) vérifient l'équation

$$x^2+y^2 = 1.$$

Notons A le point de coordonnées $(1,0)$. Parcourir le cercle dans **le sens positif ou trigonométrique** c'est le parcourir dans les sens anti-horaire. Si on part de A et qu'on parcourt sur le cercle la longueur t en tournant positivement on arrive au point $M(t)$ de coordonnées $x = \cos(t)$ (dire **cosinus** t) et $y = \sin(t)$ (dire **sinus** t). Si on tourne négativement en parcourant la longueur t on arrive au point M de coordonnées $x = \cos(-t)$ et $y = \sin(-t)$.

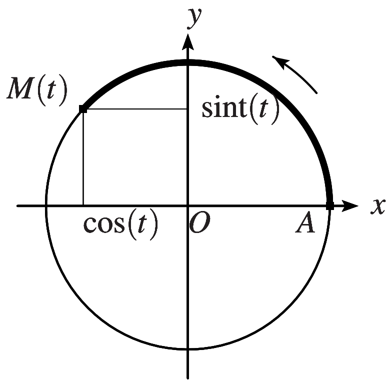


FIG. 4 – Le cercle trigonométrique

Proposition 7.1 *Les fonctions cosinus et sinus sont définies sur* $\mathbf{R}$, *à valeurs dans* $[-1,1]$ *et vérifient*

$$\cos^2 + \sin^2 = 1.$$

Proposition 7.2 *La fonction cosinus est définie sur* $\mathbf{R}$, 2π*-périodique, paire, son image est le segment* $[-1,1]$. *Elle est strictement décroissante sur l'intervalle* $[0,\pi]$. *Si* $t \in \mathbf{R}$ $\cos(\pi - t) = -\cos(t)$. *On a* $\cos(0) = 1, \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}, \cos(\frac{\pi}{2}) = 0, \cos(\pi) = -1$. *L'ensemble* $\cos^{-1}(0)$ *est égal à* $\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbf{Z}\}$.

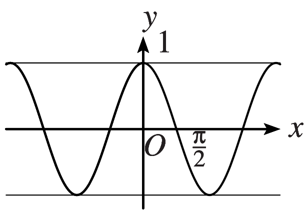


FIG. 5 – Le graphe de cos

Proposition 7.3 *La fonction sinus est définie sur* $\mathbf{R}$, 2π*-périodique, impaire, son image est le segment* $[-1,1]$. *Elle est strictement croissante sur l'intervalle* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. *Si* $t \in \mathbf{R}$ $\sin(t) = \cos(t - \frac{\pi}{2})$. *On a* $\sin(0) = 0, \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}, \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin(\frac{\pi}{2}) = 1, \sin(\pi) = 0$. *L'ensemble* $\sin^{-1}(0)$ *est égal à* $\{k\pi | k \in \mathbf{Z}\}$.

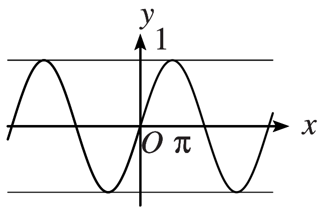


FIG. 6 – Le graphe de sin

Proposition 7.4 *Pour tous les réels t et s on a*

$$\begin{aligned} \cos(t+s) &= \cos(t)\cos(s) - \sin(t)\sin(s) \\ \sin(t+s) &= \sin(t)\cos(s) + \cos(t)\sin(s). \end{aligned}$$

Définition 7.3 La fonction **tangente** est la fonction définie sur $\mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbf{Z}\}$ par

$$\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}.$$

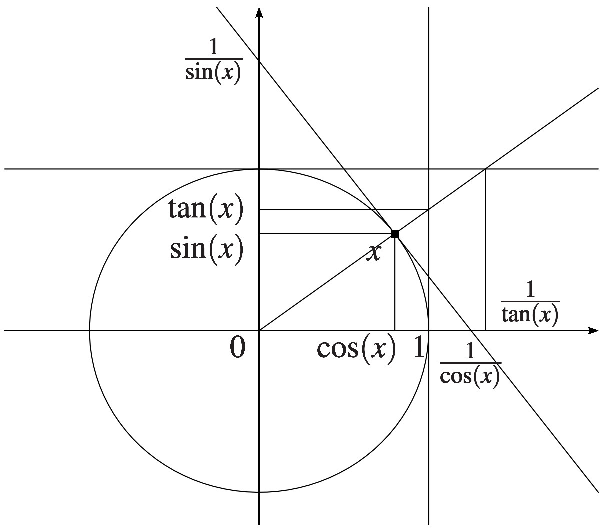


FIG. 7 – $x, \cos(x), \sin(x), \tan(x), \frac{1}{\cos(x)}, \frac{1}{\sin(x)}$ et $\frac{1}{\tan(x)}$

Proposition 7.5 *La fonction tangente est* π*-périodique, impaire, son image est* $\mathbf{R}$. *Elle est strictement croissante sur* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

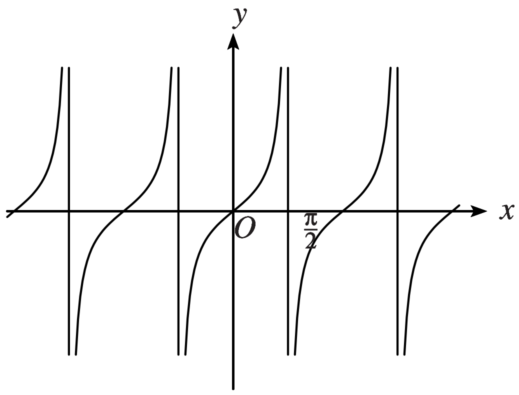


FIG. 8 – Le graphe de tan

Proposition 7.6 *Pour tous les réels t et s on a*

$$\tan(t+s) = \frac{\tan(t)+\tan(s)}{1-\tan(t)\tan(s)}.$$

Définition 7.4 La fonction **arccosinus** est la fonction bijective et strictement décroissante de $[-1,1]$ dans $[0,\pi]$ définie par $y = \arccos(x)$ si $x = \cos(y)$.

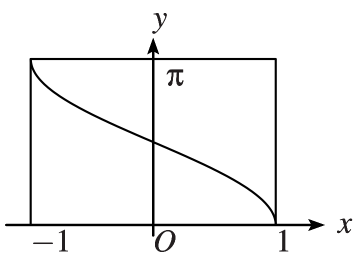


FIG. 9 – Le graphe de arccos

Définition 7.5 La fonction **arcsinus** est la fonction bijective et strictement croissante de $[-1,1]$ dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ définie par $y = \arcsin(x)$ si $x = \sin(y)$.

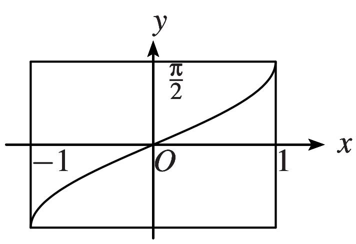


FIG. 10 – Le graphe de arcsin

Proposition 7.7

$$\arcsin + \arccos = \frac{\pi}{2}.$$

Définition 7.6 La fonction **arctan** est la fonction bijective et strictement croissante de **R** dans $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ définie par $y = \arctan(x)$ si $x = \tan(y)$.

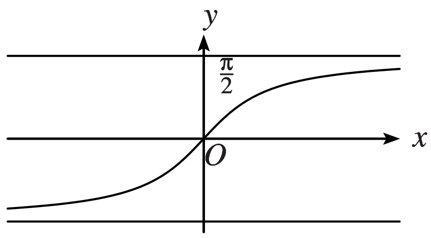


FIG. 11 – Le graphe de arctan

8 Logarithme, exponentielle, trigonométrie hyperbolique

Définition 8.1 Intuitivement le **logarithme** (ou **logarithme neperien**) est la fonction de $]0,+\infty)$ dans **R** définie de la façon suivante. Si $x > 0$ alors $\ln(x)$ est l'aire (comptée algébriquement) de la zone délimitée par l'axe des abscisses le graphe de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$, la droite verticale qui passe par le point $(1,0)$ et la droite verticale qui passe par le point $(x,0)$.

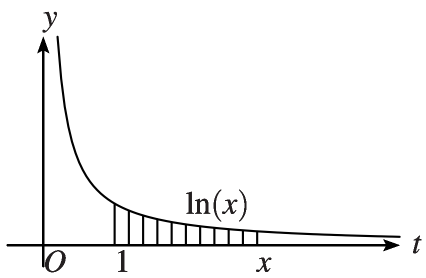


FIG. 12 – Le graphe de $t \mapsto \frac{1}{t}$ et le logarithme

Proposition 8.1 *La fonction logarithme est une bijection strictement croissante de* $]0,+\infty)$ *dans* **R** *qui vérifie la propriété d'addition suivante. Si x et y appartiennent à* $]0,+\infty)$ *alors*

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

En particulier

$$\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x).$$

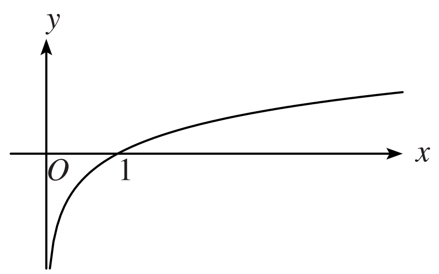


FIG. 13 – Le graphe de ln

Définition 8.2 L'**exponentielle** est la fonction réciproque du logarithme. C'est une bijection strictement croissante de $\mathbf{R}$ dans $]0,+\infty)$ qui vérifie la propriété de multiplication suivante. Si x et y appartiennent à $\mathbf{R}$ alors

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$

En particulier

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$$

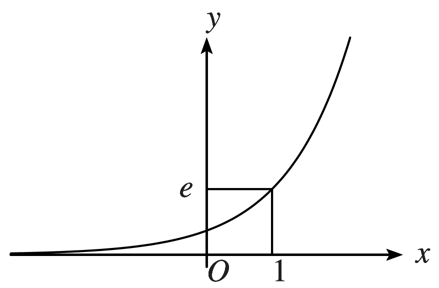


FIG. 14 – Le graphe de exp

Définition 8.3 Si $x > 0$ et $y \in \mathbf{R}$ on définit x **puissance** y par $x^y = \exp(y\ln(x))$.

Proposition 8.2 *Soit $x, x' > 0$ et $y, y' \in \mathbf{R}$. On a*

$$(xx')^y = (x^y)(x'^y),\ x^{y+y'} = (x^y)(x^{y'}) \text{ et } (x^y)^{y'} = x^{yy'}.$$

Notation 8.1 Si $n \in \mathbf{N}\setminus\{0\}$ on note $x^{\frac{1}{n}}$ parfois $\sqrt[n]{x}$.

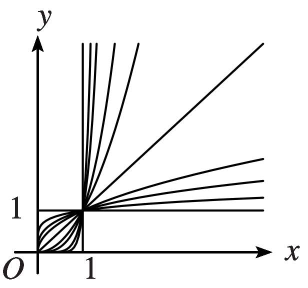


FIG. 15 – Graphes de puissances

Définition 8.4 Le **cosinus hyperbolique**, le **sinus hyperbolique** et la **tangente hyperbolique** sont les fonctions de **R** dans **R** définies de la façon suivante. Si $x \in \mathbf{R}$ on pose

$$\cosh(x) = \frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2}, \ \sinh(x) = \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2} \ \text{ et } \ \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

Remarque 8.1 Puisque le cosinus hyperbolique est, comme l'exponentielle, strictement positif, le domaine de la tangente hyperbolique est **R**.

Proposition 8.3 *Le cosinus hyperbolique est pair. Son image est* $[1,+\infty)$. *Il est strictement croissant sur* $[0,+\infty)$.

Proposition 8.4 *Le sinus hyperbolique est impair et c'est une bijection strictement croissante de* **R** *dans* **R**.

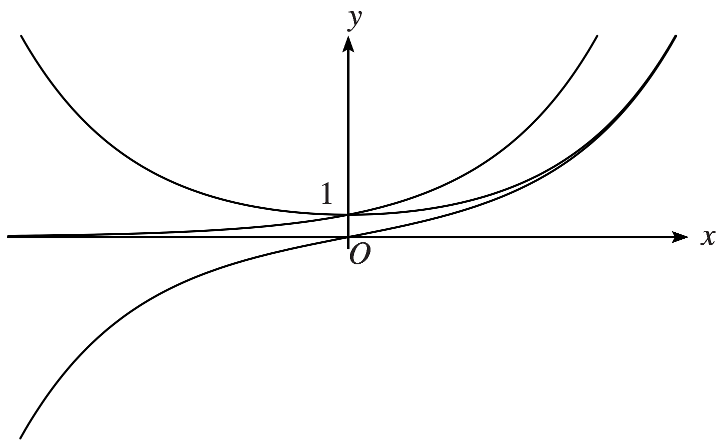


FIG. 16 – Les graphes du cosinus hyperbolique, du sinus hyperbolique et de l'exponentielle

Proposition 8.5 *La tangente hyperbolique est impaire et c'est une bijection strictement croissante de* **R** *dans* $]-1,1[$.

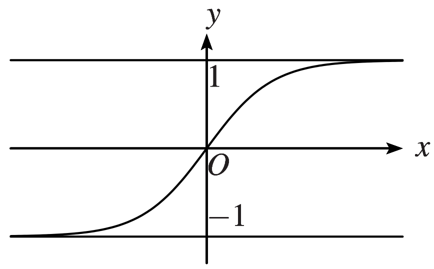


FIG. 17 – Le graphe de tanh

Proposition 8.6 *Si $x, y \in \mathbf{R}$ alors*

$$\begin{aligned} \exp(x) &= \cosh(x) + \sinh(x) \\ \cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= 1 \\ \cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) \\ \sinh(x+y) &= \cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y). \end{aligned}$$

Remarque 8.2 L'identité $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ permet de donner une interprétation graphique du cosinus hyperbolique et du sinus hyperbolique. La courbe déquation $u^2 - v^2 = 1,\ u > 0$ est une branche d'hyperbole qui admet comme paramétrisation bijective l'application $x \in \mathbf{R} \mapsto (\cosh(x), \sinh(x))$. L'aire délimitée par le segment d'extrémités $(0,0)$ et $(1,0)$, par le segment d'extrémités $(0,0)$ et $(\cosh(x), \sinh(x))$ et par l'arc d'hyperbole reliant $(0,0)$ et $(\cosh(x), \sinh(x))$ est $\frac{x}{2}$. Pour le montrer on se place dans le système de coordonnées orthogonales $U = \frac{(u-v)}{\sqrt{2}},\ V = \frac{(u+v)}{\sqrt{2}}$. Dans ces coordonnées l'équation de l'hyperbole est $V = \frac{1}{2U},\ U > 0$ et l'aire considérée est l'aire délimitée par le segment d'extrémités $(0,0)$ et $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, par le segment d'extrémités $(0,0)$ et $(\frac{\exp(t)}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}\exp(t)})$ et par l'arc d'hyperbole reliant $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, et $(\frac{\exp(t)}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}\exp(t)})$.

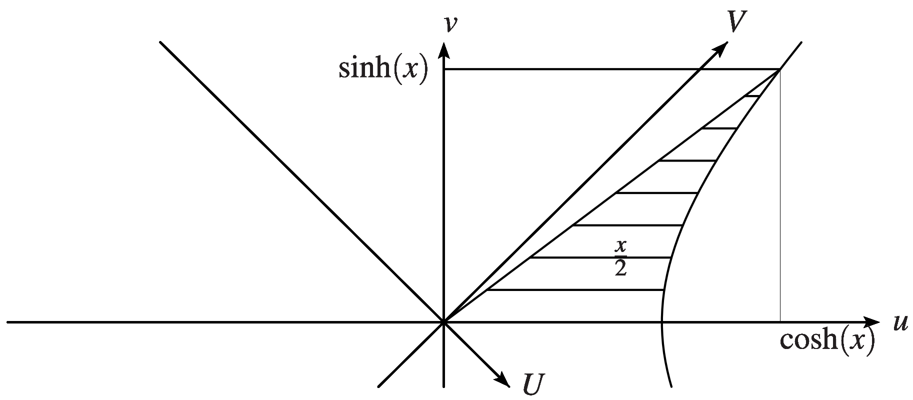


FIG. 18 – x, $\cosh(x)$ et $\sinh(x)$

Proposition 8.7 *Pour tous les réels t et s on a*

$$\tanh(t+s) = \frac{\tanh(t) + \tan(s)}{1 + \tan(t)\tan(s)}.$$

Définition 8.5 La fonction **argsh** est la fonction bijective et strictement croissante de **R** dans **R** définie par $y = \text{argsh}(x)$ si $x = \sinh(y)$.

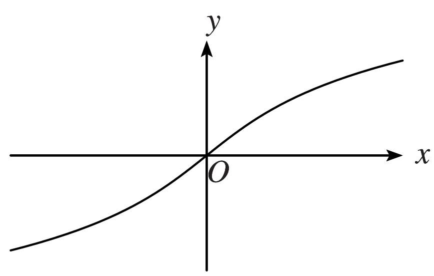


FIG. 19 – Le graphe de argsh

Définition 8.6 La fonction **argch** est la fonction bijective et strictement croissante de $[1, +\infty)$ dans $[0, +\infty)$ définie par $y = \text{argch}(x)$ si $x = \cosh(y)$.

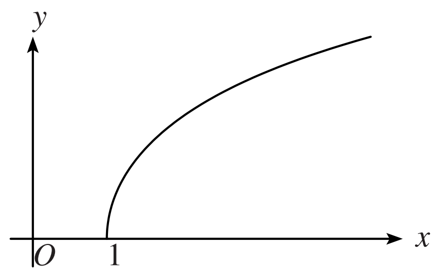


FIG. 20 – Le graphe de argch

Définition 8.7 La fonction **argth** est la fonction bijective et strictement croissante de $]-1, 1[$ dans **R** définie par $y = \text{argth}(x)$ si $x = \tanh(y)$.

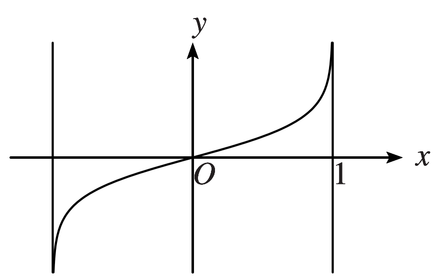


FIG. 21 – Le graphe de argth

Proposition 8.8

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{argsh}(x) & = & \ln(x+\sqrt{x^2+1}) \\ \operatorname{argch}(x) & = & \ln(x+\sqrt{x^2-1}) \\ \operatorname{argth}(x) & = & \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \end{array}$$

II Limites de fonctions, fonctions continues

1 Limite d'une suite

Définition 1.1 Soit $n_0 \in \mathbf{N}$. On appelle **suite numérique débutant au rang** n_0 une application u définie sur $\{n \in \mathbf{N}; n \geq n_0\}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$.

Remarque 1.1 Si $n_0 = 0$ on parle simplement de **suite numérique**.

Notation 1.1 On note $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ et si n est un entier naturel supérieur ou égal à n_0 alors u_n désigne l'image $u(n)$ de n par u et s'appelle **le n-ème terme de la suite u ou le terme d'indice n**.

Définition 1.2 Soit $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ une suite numérique débutant au rang n_0. Soit $l \in \mathbf{R}$. On dit que u **admet l comme limite** si u_n est arbitrairement proche de l lorsque n est arbitrairement grand.

Notation 1.2 L'écriture $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ signifie que u admet l comme limite.

Remarque 1.2 (culturelle) La phrase u_n *est arbitrairement proche de l lorsque n est arbitrairement grand* est équivalente à la formulation *Pour tout intervalle ouvert I contenant l il existe un rang* $N \in \mathbf{N}$ *tel que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n le terme* u_n *appartient à I* :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, [(n \geq n_0 \text{ et } n \geq N) \Rightarrow (|u_n - l| < \varepsilon)].$$

Exemples 1.1

- La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par la relation $u_n = \frac{1}{n}$ admet 0 comme limite. En effet si $\varepsilon > 0$ alors pour tout entier n supérieur ou égal à "1+la partie entière de $\frac{1}{\varepsilon}$" on a $|u_n - 0| < \varepsilon$.
- La suite $(v_n)_{n \geq 0}$ définie par la relation $v_n = \frac{1}{2^n}$ admet 0 comme limite. En effet si $\varepsilon > 0$ alors pour tout entier n supérieur ou égal à "1+la partie entière de $\frac{1}{\varepsilon}$" on a $|v_n - 0| < \varepsilon$. Pour s'en convaincre il suffit d'observer que pour tout entier naturel n on a $n \leq 2^n$.

Proposition 1.1 *Si u admet une limite cette limite est unique.*

Définition 1.3 Soit $\lambda \in \mathbf{R}$, u suite numérique débutant au rang n_0 et v une suite numérique débutant au rang n_0'. On définit les suites $u + v$, uv et λu en posant

$$(u+v)(n) = u(n) + v(n),\ (uv)(n) = u(n)v(n) \text{ et } (\lambda u)(n) = \lambda u(n)$$

si n est supérieur ou égal à n_0 et à n_0'. Si les termes de u sont tous non nuls alors on définit la suite $\frac{1}{u}$ en posant

$$(\frac{1}{u})(n) = \frac{1}{u(n)} \text{ si } n \geq n_0.$$

Proposition 1.2 *Si u et v admettent comme limites l et l′ et si* $\lambda \in \mathbf{R}$ *alors les suites* $u+v$, uv *et* λu *admettent respectivement* $l + l'$, ll' *et* λl *comme limites. Si les termes de u sont tous non nuls et* $l \neq 0$ *alors* $\frac{1}{u}$ *admet* $\frac{1}{l}$ *comme limite.*

2 Limite finie, continuité

Définition 2.1 Soit $f : A \to \mathbf{R}$, soient a et l dans $\mathbf{R}$. On suppose qu'il existe $h > 0$ tel que $]a, a+h[$ ou $]a-h, a[$ soit inclus dans A. On dit que f **possède une limite en** a **égale à** l si les valeurs $f(x)$ sont arbitrairement proches de l lorsque x est arbitrairement proche de a en étant dans $A \cap]a-h, a+h[$.

Notation 2.1 L'écriture $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ signifie que f possède une limite à égale à l en a.

Remarque 2.1 (culturelle) La phrase *Les valeurs $f(x)$ sont arbitrairement proches de l lorsque x est arbitrairement proche de a en étant dans* $A \cap]a-h, a+h[$ est équivalente à la formulation *Pour tout intervalle ouvert I contenant l il existe un intervalle ouvert non vide J contenant a et tel que l'image $f(J)$ soit incluse dans I* :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, [(|x-a| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - l| < \varepsilon)].$$

Remarque 2.2 Dans certains cours on prend une définition différente de la limite en a. En particulier au lieu de prendre $x \in A \cap]a-h, a+h[$ comme ici, certains auteurs préfèrent prendre $x \in (A \cap (]a-h, a[\cup]a, a+h[))$ qui correspond dans notre texte à la définition ci-dessous de *possèder une limite en a quand x tend vers a en étant différent de a*. Le choix fait dans ce document permet d'avoir un énoncé simple du théorème de composition des limites.

Définition 2.2 Soit $f : A \to \mathbf{R}$, soient a et l dans $\mathbf{R}$. On suppose qu'il existe $h > 0$ tel que l'intervalle $]a, a+h[$ est inclus dans A. On dit que f **possède une limite à droite en** a **égale à** l si les valeurs $f(x)$ sont arbitrairement proches de l lorsque x est arbitrairement proche de a en étant dans $]a, a+h[$.

Notation 2.2 L'écriture $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l$ signifie que f possède une limite à droite égale à l en a.

Remarque 2.3 (culturelle) La phrase *Les valeurs $f(x)$ sont arbitrairement proches de l lorsque x est arbitrairement proche de a en étant dans* $]a, a+h[$ est équivalente à la formulation *Pour tout intervalle ouvert I contenant l il existe un intervalle ouvert non vide J dont l'extrémité gauche est a et tel que l'image $f(J)$ soit incluse dans I*.

Remarque 2.4 La condition *Il existe $h > 0$ tel que l'intervalle $]a, a+h[$ est inclus dans A* est toujours vérifiée si a est dans A et A est un intervalle ouvert ou une réunion d'intervalles ouverts.

Remarque 2.5 On définit de façon analogue à la limite à droite la **limite à gauche** et l'écriture $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l$ signifie que f possède une limite à gauche égale à l en a.

Définition 2.3 Soit $f : A \to \mathbf{R}$, soient a et l dans $\mathbf{R}$. On suppose qu'il existe $h > 0$ tel que $]a, a+h[$ ou $]a-h, a[$ soit inclus dans A. On dit que f **possède une limite en** a **quand** x **tend vers** a **en étant différent de** a **égale à** l si les valeurs $f(x)$ sont arbitrairement proches de l lorsque x est arbitrairement proche de a en étant dans $A \cap (]a-h, a[\cup]a, a+h[)$.

Notation 2.3 L'écriture $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = l$ signifie que f possède une limite à égale à l quand x tend vers a en étant différent de a.

Proposition 2.1 *Si f possède une limite en a (respectivement une limite à gauche ou à droite) cette limite est unique.*

Remarque 2.6 Soit $f : A \to \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$ et $h > 0$ tel que $]a, a+h[\subset A$ (respectivement $]a-h, a[\subset A$). Si f possède une limite en a alors f possède une limite à droite (respectivement à gauche) et ces limites sont égales.

Remarque 2.7 Soit $f : A \to \mathbf{R}$ et soit $a \in A$. Si f possède une limite en a alors cette limite vaut $f(a)$.

Définition 2.4 Soient $f : A \to \mathbf{R}$ et $a \in A$. On dit que f est **continue en** a si f possède une limite en a. Dans ce cas nécessairement cette limite vaut $f(a)$.

Remarque 2.8 Ici, il est **important** que a appartienne à A.

Définition 2.5 On dit que $f : A \to \mathbf{R}$ est **continue** si pour tout a dans A f est continue en a.

Remarque 2.9 La fonction f est continue en a si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$ existe et vaut $f(a)$.

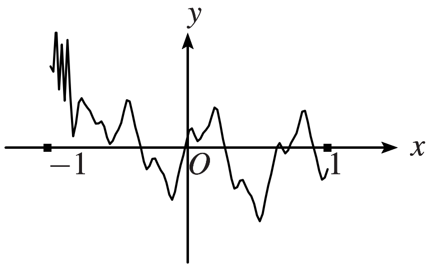


FIG. 22 – graphe d'une fonction continue sur $]01[$

Remarque 2.10 (culturelle) La notion de continuité traduit (imparfaitement) le tracé du graphe de la fonction sans lever le stylo. En revanche la continuité en un point est une notion plus faible.

Exemple 2.1
- Soit $\lambda \in \mathbf{R}$ et soient f et g les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x$ et par $g(x) = \lambda$ si $x \in \mathbf{R}$. On vérifie facilement en utilisant la formulation *Pour tout intervalle ouvert I contenant l il existe un intervalle ouvert non vide J dont l'extrémité gauche est a et tel que l'image $f(J)$ soit incluse dans I* que si $a \in \mathbf{R}$ alors $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = a$ (prendre $J = I \cap]a, +\infty)$) et $\lim\limits_{x \to a^+} g(x) = \lambda$ (prendre $J =]a, +\infty)$). On obtient de façon analogue le même résultat pour les limites à gauche. On en déduit que f et g sont continues.
- Soit f la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(0) = 1$ et $f(x) = 0$ si $x \neq 0$. Alors f est continue en x si $x \neq 0$ mais elle n'est pas continue en 0 car $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq 1 = f(0)$: les limites à gauche et à droite de f en 0 existent, sont égales mais diffèrent de $f(0)$.
- Soit f la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(0) = 1$, $f(x) = 0$ si $x < 0$ et $f(x) = 2$ si $x > 0$. Alors $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2 \neq \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$: les limites à gauche et à droite de f en 0 existent mais sont différentes.

– Soit f la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Alors f n'a pas de limite à droite (ni à gauche) en 0.

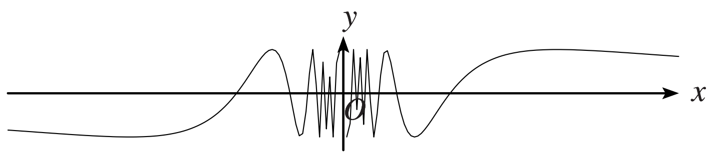


FIG. 23 – Le graphe de $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$

3 Limites infinies vs limites à l'infini

On peut être intéressé au comportement d'une fonction lorsque la variable x devient arbitrairement grande positivement ou négativement. Pour cette raison on introduit les notions de limite en $+\infty$ et en $-\infty$.

Définition 3.1 Soit $f : A \to \mathbf{R}$. On suppose qu'il existe $A_0 \in A$ tel que $]A_0, +\infty) \subset A$. On dit que f **possède une limite en $+\infty$ égale à l** si les valeurs $f(x)$ sont arbitrairement proches de l lorsque x est arbitrairement grand positivement.

Remarque 3.1 (culturelle) La phrase *Les valeurs $f(x)$ sont arbitrairement proches de l lorsque x est arbitrairement grand positivement* est équivalente à la formulation *Pour tout intervalle ouvert I contenant l il existe un intervalle ouvert J du type $J =]\lambda, +\infty)$ avec $\lambda > 0$ dont l'image $f(J)$ est incluse dans I.*

Définition 3.2 Soit $f : A \to \mathbf{R}$. On suppose qu'il existe $A_0 \in A$ tel que $(-\infty, A_0[\subset A$. On dit que f **possède une limite en $-\infty$ égale à l** si les valeurs $f(x)$ sont arbitrairement proches de l lorsque x est négatif et sa valeur absolue est arbitrairement grande.

Notations 3.1 L'écriture $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ signifie que f possède une limite égale à l en $+\infty$. L'écriture $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$ signifie que f possède une limite égale à l en $-\infty$.

Exemple 3.1 La fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ vérifie $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

On souhaite aussi caractériser le comportement d'une fonction qui prend des valeurs $f(x)$ arbitrairement grandes à proximité d'un réel a.

Définition 3.3 Soit $f : A \to \mathbf{R}$ et soit a dans $\mathbf{R}$. On dit que $+\infty$ (respectivement $-\infty$) est **la limite à droite de f en a** si les deux conditions suivantes sont vérifiées.
– Il existe $h > 0$ tel que l'intervalle $]a, a+h[$ est inclus dans A.
– Les valeurs $f(x)$ sont positives et arbitrairement grandes (respectivement négatives et de valeurs absolues arbitrairement grandes) lorsque x est arbitrairement proche de a en étant dans $]a, a+h[$.

Remarque 3.2 (culturelle) La phrase *Les valeurs* $f(x)$ *sont positives et arbitrairement grandes lorsque* x *est arbitrairement proche de* a *en étant dans* $]a, a+h[$ est équivalente à la formulation *Pour tout intervalle ouvert* I *de type* $]\lambda, +\infty)$ *avec* $\lambda > 0$ *il existe un intervalle ouvert non vide* J *dont l'extrémité gauche est* a *et dont l'image* $f(J)$ *est incluse dans* I.

On a des définitions analogues pour des limites à gauche égales à $+\infty$ ou $-\infty$.

Définition 3.4 On dit que $+\infty$ (respectivement $-\infty$) est **la limite de** f **en** a si c'est à la fois la limite à droite et la limite à gauche de f en a.

Exemple 3.2 La fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ vérifie $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$. Cette fonction n'a donc pas de limite en 0 car elle a des limites à droite et à gauche en 0 qui sont différentes.

Notation 3.2 On utilise suivant les cas les notations suivantes : $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Enfin on caractérise le comportement d'une fonction qui prend des valeurs $f(x)$ arbitrairement grandes pour des x arbitrairement grands.

Définition 3.5 Soit $f : A \to \mathbf{R}$. On suppose qu'il existe $A_0 \in A$ tel que $]A_0, +\infty) \subset A$. On dit que $+\infty$ (respectivement $-\infty$) est **limite de** f **en** $+\infty$ si les valeurs $f(x)$ sont positives et arbitrairement grandes (respectivement négatives et de valeurs absolues arbitrairement grandes) lorsque x est positif et arbitrairement grand.

On a des définitions analogues pour des limites infinies en $-\infty$.

Notation 3.3 On utilise suivant les cas les notations suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Exemple 3.3 La fonction définie par $f(x) = x^3$ vérifie $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ alors que la fonction définie par $g(x) = x^2$ vérifie $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Remarque 3.3 Qu'elle soit finie ou infinie, la limite en $a \in \mathbf{R}$ ou en $+\infty$ ou $-\infty$ est toujours unique.

4 Règles algébriques

Proposition 4.1 *Soit* f *et* g *deux fonctions numériques de la variable réelle,* $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *et* $l, l' \in \mathbf{R}$. *On suppose que* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ *et* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l'$. *Alors*

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} f(x) + g(x) &= \quad l + l' \\ \lim_{x \to a} f(x) g(x) &= \quad l l' \\ \textbf{si } l' \neq 0, \ \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \quad \frac{l}{l'} \end{aligned}$$

Proposition 4.2 *Soit f une fonction numériques, $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou si $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ alors*

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ **et si f est strictement positive** *alors*

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

Si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ **et si f est strictement négative** *alors*

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = -\infty.$$

Proposition 4.3 *Soit f et g deux fonctions numériques, $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et $l \in \mathbf{R}$. On suppose que $\lim_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$. Alors*

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} -g(x) &= -\infty \\
\lim_{x \to a} f(x) + g(x) &= +\infty \\
\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} &= 0 \\
\textbf{si } \ l > 0, \ \lim_{x \to a} f(x)g(x) = \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} &= +\infty \\
\textbf{si } \ l < 0, \ \lim_{x \to a} f(x)g(x) = \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} &= -\infty
\end{aligned}$$

Proposition 4.4 *Soit f et g deux fonctions numériques, $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et $l \in \mathbf{R}$. On suppose que $\lim_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$. Alors*

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} -g(x) &= +\infty \\
\lim_{x \to a} f(x) + g(x) &= -\infty \\
\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} &= 0 \\
\textbf{si } \ l > 0, \ \lim_{x \to a} f(x)g(x) = \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} &= -\infty \\
\textbf{si } \ l < 0, \ \lim_{x \to a} f(x)g(x) = \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} &= +\infty
\end{aligned}$$

Proposition 4.5 *Soit f et g deux fonctions numériques et $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On suppose que $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$. Alors*

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} f(x) + g(x) &= +\infty \\
\lim_{x \to a} f(x)g(x) &= +\infty.
\end{aligned}$$

Proposition 4.6 *Soit f et g deux fonctions numériques et $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On suppose que $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ et que $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$. Alors*

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} f(x) + g(x) = & \quad -\infty \\ \lim_{x \to a} f(x)g(x) = & \quad +\infty. \end{aligned}$$

Proposition 4.7 *Soit f et g deux fonctions numériques et $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On suppose que $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ et que $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$. Alors*

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = -\infty.$$

Remarques 4.1 Ces propositions donnent la liste exhaustive de toutes les situations où on déduit les limites de $f+g$, fg ou $\frac{f}{g}$ en a de la seule connaissance des limites de f et g en a. Les situations non envisagées s'appellent **les formes indéterminées**. Dans **tous ces autres cas** $f+g$, fg ou $\frac{f}{g}$ n'ont pas nécessairement de limites en a et la preuve de l'existence éventuelle de limites nécessite de développer une argumentation.

5 Composition

Proposition 5.1 *Soient $f : A \to \mathbf{R}$ $g : B \to \mathbf{R}$ deux fonctions telles que $f(A)$ soit inclus dans B. Soient $a, b, l \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Si $\lim_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim_{y \to b} g(y) = l$ alors $\lim_{x \to a} g(f(x)) = l$.*

Remarque 5.1 La simplicité de cet énoncé résulte du choix qu'on a fait de la définition de limite.

Proposition 5.2 *Si $f : A \to \mathbf{B}$ et $g : B \to \mathbf{R}$ sont continues alors $g \circ f : A \to \mathbf{R}$ est continue.*

6 Comparaison

Proposition 6.1 *Soient f, g et h trois fonctions numériques définies sur un sous ensemble A de $\mathbf{R}$ et soient a dans $\mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et l dans $\mathbf{R}$. On suppose que si $x \in A$ alors $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. On suppose aussi que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = l$. Alors $\lim_{x \to a} g(x) = l$.*

Proposition 6.2 *Soient f et g deux fonctions numériques définies sur un sous ensemble A de $\mathbf{R}$ et soit a dans $\mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On suppose que si $x \in A$ alors $f(x) \leq g(x)$. On suppose aussi que $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$. Alors $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$.*

Exemple 6.1 On admet que si $x > 0$ alors $\sin(x) < x$. De plus si $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, l'inégalité triangulaire appliquée à un triangle rectangle d'hypothénuse 1 et dont les longueurs des deux autres côtés sont $\sin(x)$ et $\cos(x)$ implique que $1 - \cos(x) < \sin(x)$ et donc $1 - \cos(x) < x$. On déduit de ces inégalités, de la continuité de $x \mapsto x$, du théorème de comparaison et de la parité que les fonctions sinus et cosinus sont continues en 0.

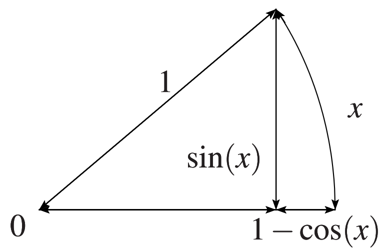


FIG. 24 – $\sin(x) < x$ et $1-\cos(x) < \sin(x) < x$

7 Continuité des fonctions classiques

Proposition 7.1 *Les polynômes, les fonctions rationnelles, la valeur absolue, les fonctions* cos, sin, tan, arccos, arcsin, arctan, ln, exp, cosh, sinh, tanh, argch, argsh *et* argth *sont continues sur leurs domaines respectifs.*

8 Quelques limites classiques

Proposition 8.1 *Si* $n \in \mathbf{N}^*$ *alors*

$$\begin{array}{llll}
\lim\limits_{x\to+\infty} x^n & = +\infty & \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} & = 0 \\
\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x^n} & = +\infty & \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x^n} & = -\infty \text{ si } n \text{ impair} \\
 & & \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x^n} & = +\infty \text{ si } n \text{ pair.}
\end{array}$$

Cette proposition permet de calculer des limites des fonctions rationnelles.

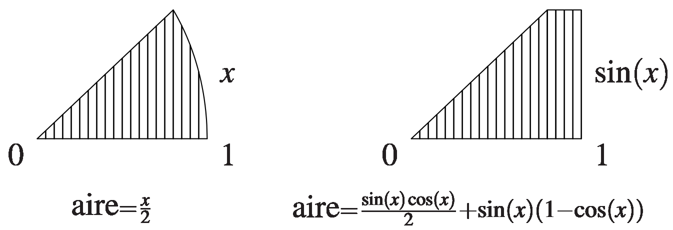


FIG. 25 – $\frac{\sin(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\sin(x)\cos(x)}{2} + \sin(x)(1-\cos(x))$

Proposition 8.2 $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1.$

Proposition 8.3

$$\begin{array}{llll}
\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan(x) & = +\infty & \lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) & = -\infty \\
\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) & = \frac{\pi}{2} & \lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(x) & = -\frac{\pi}{2}
\end{array}$$

Proposition 8.4 *Si* $x > 0$ *alors* $\ln(1+x) < x$.

On déduit de cette proposition et des résultats de composition et de comparaison précédents quelques limites classiques relatives aux fonctions de la trigonométrie hyperboliques.

Proposition 8.5

$$\begin{array}{llll} \lim_{x\to+\infty} \exp(x) & =+\infty & \lim_{x\to-\infty} \exp(x) & =0 \\ \lim_{x\to+\infty} \ln(x) & =+\infty & \lim_{x\to 0^+} \ln(x) & =-\infty \end{array}$$

Proposition 8.6 *Si* $\lambda > 0$,

$$\begin{array}{llll} \lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x^\lambda} & =+\infty & \lim_{x\to-\infty} |x|^\lambda \exp(x) & =0 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\lambda} & =0 & \lim_{x\to 0^+} x^\lambda \ln(x) & =0. \end{array}$$

Proposition 8.7

$$\begin{array}{llll} \lim_{x\to+\infty} \cosh(x) & =+\infty & \lim_{x\to-\infty} \cosh(x) & =+\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \sinh(x) & =+\infty & \lim_{x\to-\infty} \sinh(x) & =-\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \tanh(x) & =1 & \lim_{x\to-\infty} \tanh(x) & =-1 \end{array}$$

Proposition 8.8

$$\begin{array}{llll} \lim_{x\to+\infty} \operatorname{argch}(x) & =+\infty & \lim_{x\to 1^+} \operatorname{argch}(x) & =0 \\ \lim_{x\to+\infty} \operatorname{argsh}(x) & =+\infty & \lim_{x\to-\infty} \operatorname{argsh}(x) & =-\infty \\ \lim_{x\to 1^-} \operatorname{argth}(x) & =+\infty & \lim_{x\to -1^+} \operatorname{argth}(x) & =-\infty \end{array}$$

9 Asymptotes

Définition 9.1 Si $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha$ (respectivement $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha$) on dit que f **admet comme direction asymptotique en** $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) la direction $y=\alpha x$ (ou $x=0$ si $\alpha \in \{-\infty,+\infty\}$).

Définition 9.2 Si $|\lim_{x\to a^+} f(x)| = +\infty$ et si $|\lim_{x\to a^-} f(x)| = +\infty$ on dit que la droite verticale d'équation $x=a$ est **asymptote au graphe de** f.

Définition 9.3 Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(\alpha x+\beta) = 0$ on dit que la droite d'équation $y=\alpha x+\beta$ est **asymptote au graphe de** f **en** $+\infty$. Si $\lim_{x\to-\infty} f(x)-(\alpha x+\beta) = 0$ on dit que la droite d'équation $y=\alpha x+\beta$ est **asymptote au graphe de** f **en** $-\infty$.

Proposition 9.1 *Si la droite d'équation* $y=\alpha x+\beta$ *est asymptote au graphe de* f *en* $+\infty$ *(respectivement* $-\infty$*) alors* f *admet comme direction asymptotique en* $+\infty$ *(respectivement* $-\infty$*) la direction* $y=\alpha x$.

Exemple 9.1 La fonction donnée par $f(x)=\ln(x)$ admet la direction asymptotique la droite d'équation $y=0$ en $+\infty$ mais n'admet pas d'asymptote en $+\infty$.

Remarque 9.1 Si la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ est asymptote au graphe de f en $+\infty$ et si $f(x) - (\alpha x + \beta)$ est positif (respectivement négatif) pour x arbitrairement grand alors le graphe de f est **au dessus** (respectivement **au dessous**) de cette droite en $+\infty$.

Exemple 9.2 Soit f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x^2 - x}{\sqrt{1+x^2}}$. Alors la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale au graphe de f en 0, la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote au graphe de f en $+\infty$ alors que la droite d'équation $y = -x + 1$ est asymptote au graphe de f en $-\infty$.

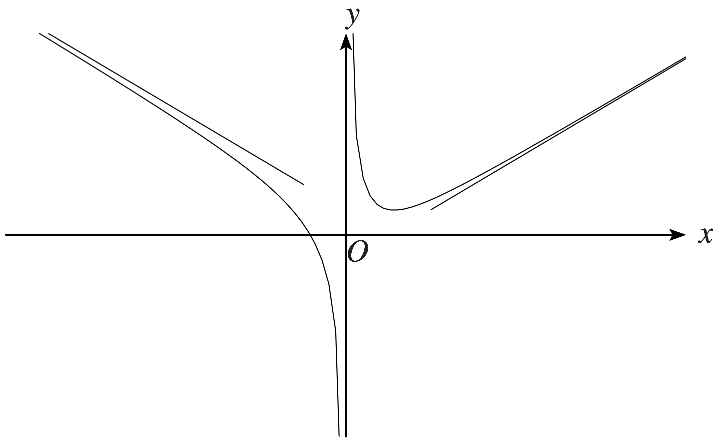


FIG. 26 – Le graphe de $x \mapsto \dfrac{1}{x} + \dfrac{x^2 - x}{\sqrt{1+x^2}}$ et ses asymptotes

10 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 10.1 (**Théorème des valeurs intermédiaires**) *Soit f une fonction continue définie sur un intervalle I et soit a et b dans I. Alors pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un c compris entre a et b tel que $f(c) = \lambda$.*

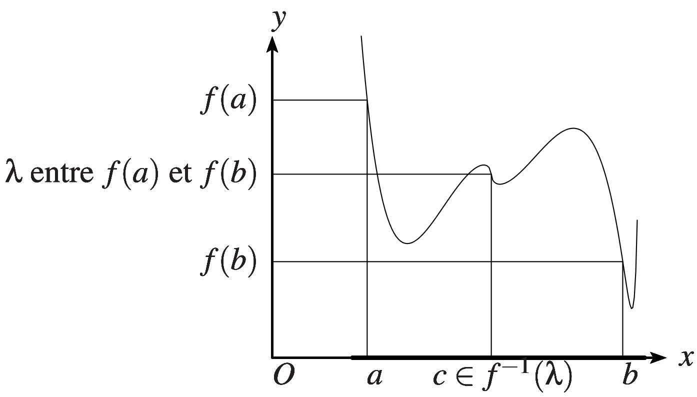


FIG. 27 – Les valeurs intermédiaires

Exemple 10.1 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ alors il existe a et b tels que $f(a) < 0 < f(b)$. Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe c tel que $f(c) = 0$.

11 Prolongement par continuité

Définition 11.1 Soit $f : A \to \mathbf{R}$ et $a \in \mathbf{R} \setminus A$. On suppose qu'il existe $h > 0$ tel que $]a-h, a[$ et $]a, a+h[$ soient inclus dans A. S'il existe $l \in \mathbf{R}$ tel que $\lim_{x\to a} f(x) = l$ alors on appelle **prolongement par continuité de** f **en** a la fonction g définie sur $A \cup \{a\}$ par $g(a) = l$ et si $x \in A$, $g(x) = f(x)$. La fonction g est continue en a.

Exemple 11.1 La fonction définie par $g(0) = 1$ et $g(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ si $x \neq 0$ est le prolongement par continuité en 0 de $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$.

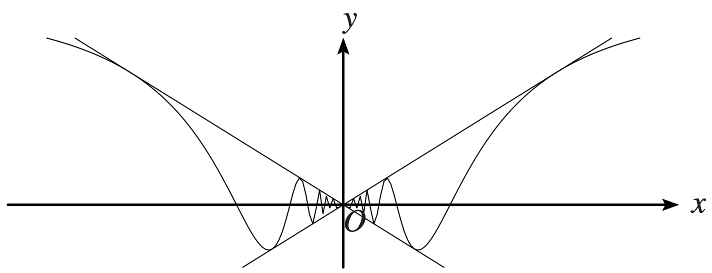


FIG. 28 – Les graphes de $x \mapsto x\sin(\frac{1}{x})$, $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto -|x|$

Exemple 11.2 La fonction définie par $g(0) = 0$ et $g(x) = x\sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ est le prolongement par continuité en 0 de $x \mapsto x\sin(\frac{1}{x})$.

12 Monotonie et continuité, existence de réciproque

On déduit du théorème des valeurs intermédiaires la proposition suivante.

Proposition 12.1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et continue. La fonction f est une bijection de I sur $f(I)$ si et seulement si f est strictement monotone. Si c'est une bijection, alors sa réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$ est aussi continue.*

Remarque 12.1 Les hypothèses f **continue** et I **intervalle** sont indispensables pour conclure.

Le théoèrme des valeurs intermédiaires permet aussi de caractériser, parmi les fonctions strictement monotones, les fonctions continues.

Proposition 12.2 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et strictement monotone. La fonction f est continue si et seulement si $f(I)$ est un intervalle.*

13 Image d'un segment par une fonction continue

Proposition 13.1 *Soit $f : A \to \mathbf{R}$ continue et $[a,b]$ un segment inclus dans A. Alors $f([a,b])$ est un segment. Plus précisément, il existe $\alpha, \beta \in [a,b]$ tels que $f([a,b]) = [f(\alpha), f(\beta)]$.*

Remarque 13.1 Les nombres α et β sont en général différents de a et b. Par exemple si f est définie par $f(x) = x(x^2-1)$ alors $f([-1,1]) = [-\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}] = [f(-\frac{1}{\sqrt{3}}), f(\frac{1}{\sqrt{3})})]$ alors que $f(-1) = f(1) = 0$.

III Dérivation d'une fonction

1 Dérivée en un point, dérivée

Définition 1.1 Soient $f : A \to \mathbf{R}$ et $a \in A$. On dit que f est **dérivable en** a si le **taux d'accroissement entre** x **et** a

$$x \in A \setminus \{a\} \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

admet une limite finie quand x tend vers a. Si f est dérivable en a on appelle **dérivée de** f **en** a et on note $f'(a)$ la limite du taux d'accroissement :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Si f est dérivable en tout point de A on dit que f est **dérivable** et la fonction f' ainsi définie sur A s'appelle **la dérivée de** f.

La dérivée d'une fonction f en un point a permet de donner une **approximation affine** de la fonction f quand x est proche de a.

Proposition 1.1 *Si f est dérivable en a alors*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-(f(a)+f'(a)(x-a))}{(x-a)} = 0.$$

Définition 1.2 Si f est dérivable en a la fonction affine $x \mapsto f(a)+f'(a)(x-a)$ s'appelle **l'approximation affine de** f **en** a**.**

Proposition 1.2 *Si f est dérivable en a et si $(\alpha,\beta) \neq (f(a), f'(a))$ alors*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-(f(a)+f'(a)(x-a))}{f(x)-(\alpha+\beta(x-a))} = 0.$$

Remarque 1.1 Cette proposition explique pourquoi la fonction affine $x \mapsto f(a)+f'(a)(x-a)$ s'appelle approximation affine de f en a.

La dérivée et le taux d'accroissement admettent l'interprétation cinématique suivante. Si $f(x)$ représente une position en fonction du temps x alors le taux d'accroissement entre x et a est *la vitesse moyenne* entre les temps a et x alors que la dérivée $f'(a)$ est *la vitesse instantannée* au temps a.

Exemples 1.1
- Les fonctions constantes sont dérivables de dérivée la fonction nulle.
- La fonction $x \mapsto ax$ est dérivable de dérivée la fonction constante a.
- La fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable de dérivée la fonction $x \mapsto 2x$.
- La valeur absolue n'est pas dérivable en 0.
- L'égalité $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ signifie que le sinus est dérivable en 0 et $\sin'(0) = 1$.

Proposition 1.3 *Si f est dérivable en a alors f est continue en a.*

Définition 1.3 Si f est dérivable et si f' est dérivable en a alors $(f')'(a)$ est notée $f''(a)$ et s'appelle **dérivée seconde** de f en a. Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. Si on peut dériver n fois la fonction f on dit que f est n **fois dérivable** et on note $f' = f^{(1)}, f'' = f^{(2)}, f''' = f^{(3)}, ..., f^{(n)}$ les dérivées successives. La fonction $f^{(n)}$ s'appelle **dérivée n-ème** de f.

Remarque 1.2 En cinématique, la dérivée seconde s'appelle **accélération**.

Notation 1.1 Les dérivées $f' = f^{(1)}, f'' = f^{(2)}, f''' = f^{(3)}, ..., f^{(n)}$ sont aussi notées

$$\frac{df}{dx}, \frac{d^2f}{dx^2}, \frac{d^3f}{dx^3}, ..., \frac{d^nf}{dx^n}.$$

En appliquant la proposition précédente aux dérivées successives de f on obtient

Proposition 1.4 *Si f est n fois dérivable alors $f, f', ..., f^{(n-1)}$ sont continues.*

2 Droite tangente au graphe d'une fonction en un point

Définition 2.1 Si f est une fonction définie sur un intervalle qui contient les deux points a et b on appelle **sécante au graphe de f qui passe par** $(a, f(a))$ **et** $(b, f(b))$ la droite qui passe par ces deux points. C'est la droite d'équation

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Définition 2.2 Si f est une fonction dérivable en a on appelle **droite tangente au graphe de f en** $(a, f(a))$ la droite d'équation

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

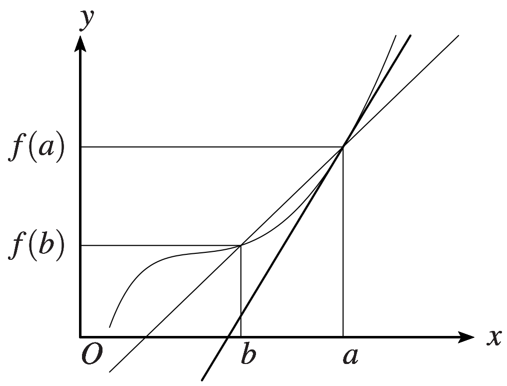


FIG. 29 – Tangente en $(a, f(a))$ et sécante au graphe de f entre les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$

La droite tangente est en un *certain sens* la limite des sécantes qui passent par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ lorsque b tend vers a. C'est aussi, parmi les droites qui passent par $(a, f(a))$ celle qui *s'approche le plus* du graphe de f.

3 Règles algébriques

Proposition 3.1 *Soient f et g deux fonctions définies sur A et $a \in A$. On suppose que f et g sont dérivables en a de dérivées $f'(a)$ et $g'(a)$. Alors*

- *la fonction $f+g$ est dérivable en a et*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$

- *la fonction fg est dérivable en a et*

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \text{ (\textbf{Règle de Leibniz}),}$$

- *si g ne s'annule pas la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

On déduit de ces règles le calcul de la dérivée d'un polynôme ou d'une fraction rationnelle.

Proposition 3.2 *Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. La dérivée du polynôme*

$$P = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

est le polynôme

$$P' = n a_n x^{n-1} + \ldots + a_1.$$

Proposition 3.3 *La dérivée de la fraction rationnelle*

$$R = \frac{P}{Q}$$

est la fraction rationnelle

$$R' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}.$$

Exemple 3.1 Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. La dérivée de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ est la fonction $x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$.

4 Dérivée d'une composée et dérivabilité de la réciproque

Proposition 4.1 *Soient $f : A \to B$ et $g : B \to \mathbf{R}$ deux fonctions et $a \in \mathbf{R}$. Si f est dérivable en a et g en $f(a)$ alors la composée $g \circ f$ est dérivable en a et*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Exemple 4.1 Si $n \in \mathbf{N}$, la dérivée de la fonction $x \mapsto (1+x^2)^n$ est la fonction $x \mapsto 2nx(1+x^2)^{n-1}$.

Remarque 4.1 On déduit de cette proposition que la réciproque d'une fonction dérivable dont la dérivée s'annule n'est pas dérivable. La proposition suivante indique que c'est la seule obstruction.

Proposition 4.2 *Soit $f : A \to B$ une fonction dérivable et bijective. On suppose que $f'(x) \neq 0$ en tout point $x \in A$. Alors la fonction réciproque de f, $f^{-1} : B \to A$, est dérivable et*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}, \text{ si } y \in B.$$

Exemples 4.2 Si $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ alors la fonction définie de $]0,+\infty)$ dans $]0,+\infty)$ par $f(x) = x^n$ est une bijection dérivable et sa dérivée ne s'annule pas. Par conséquent, sa réciproque, la fonction $y \mapsto \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$ est dérivable et si $y \in]0,+\infty)$ alors

$$(y^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n(y^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}.$$

Par le résultat de dérivation des composées on déduit alors que si $r \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$ alors la fonction définie de $]0,+\infty)$ dans $]0,+\infty)$ par $f(x) = x^r$ est dérivable et si $x \in]0,+\infty)$ alors

$$(x^r)' = ry^{r-1}.$$

5 Quelques exemples classiques

Proposition 5.1 *Les fonctions* sin, cos, tan, arcsin, arccos, *et* arctan *sont dérivables et*

$$\begin{array}{ccc} \sin' = \cos & \cos' = -sin & \tan' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2 \\ \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \end{array}.$$

Proposition 5.2 *Les fonctions* ln *et* exp *sont dérivables et*

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}, \exp' = \exp.$$

Proposition 5.3 *Si $\lambda \in \mathbf{R}$ alors la fonction définie de $]0,+\infty)$ dans $]0,+\infty)$ par $f(x) = x^\lambda$ est dérivable et*

$$(x^\lambda)' = \lambda y^{\lambda-1}.$$

Proposition 5.4 *Les fonctions* sinh, cosh, tanh, argsh, argch, argth *sont dérivables et*

$$\begin{array}{ccc} \sinh' = \cosh & \cosh' = \sinh & \tanh' = \frac{1}{\cosh^2} = 1 - \tanh^2 \\ \operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \operatorname{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} & \operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2} \end{array}.$$

6 Théorème des accroissements finis

Théorème 6.1 *(**Théorème des accroissements finis**) Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et soient $a < b$ deux points de I. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Remarque 6.1 La conclusion reste vraie en supposant seulement f *continue sur I et dérivable sur* $]a,b[$.

Ce théorème admet l'interprétation géométrique suivante. La sécante au graphe d'une fonction dérivable f entre deux points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ est parallèle à une tangente en un point *intermédiaire* $(c, f(c))$.

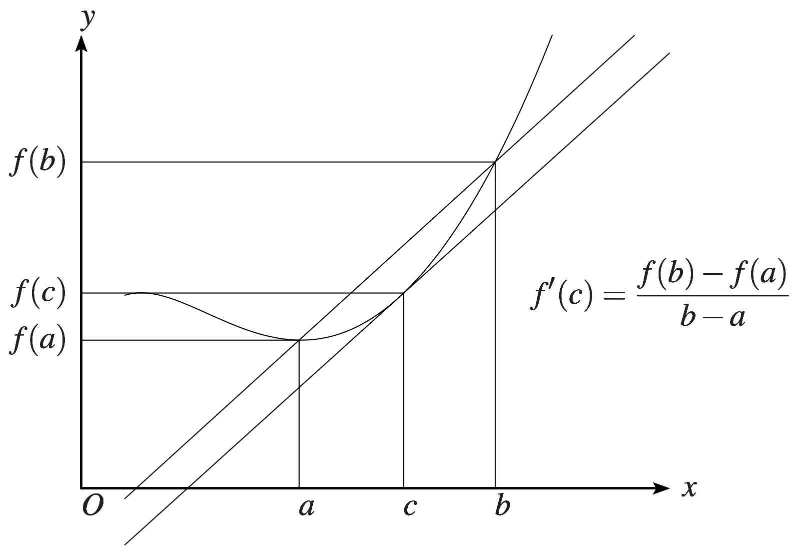


FIG. 30 – Sécante entre $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ et tangente en $(c, f(c))$ parallèles

Exemple 6.1 La fonction définie sur $]0, +\infty)$ par $f(x) = (\exp(x-2)-1)\ln(x)$ est dérivable et s'annule en 1 et en 2. Par conséquent, il existe c entre 1 et 2 tel que $f'(c) = 0$.

Ce théorème admet l'interprétation cinématique suivante. Lors d'un mouvement la vitesse moyenne entre les temps a et b coïncide au moins une fois avec la vitesse instantanée entre a et b.

Proposition 6.1 *Soit f dérivable. Si f est croissante (respectivement décroissante) alors f' est positive (respectivement négative).*

Proposition 6.2 *Soit f définie sur un intervalle I et dérivable. Si f' est strictement positive (respectivement strictement négative) alors f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante).*

Remarque 6.2 Ces deux propositions ne sont pas réciproques l'une de l'autre. Par exemple la fonction $x \mapsto x^3$ est dérivable, strictement croissante et sa dérivée s'annule en 0. Dans le second cas il est important de supposer que le domaine est un intervalle. Par exemple la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui est définie sur $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ n'est pas décroissante alors que sa dérivée est strictement négative.

Remarque 6.3 Il découle de ces propositions que les variations d'une fonction dérivable se déduisent du signe de sa dérivée.

Proposition 6.3 *Soit I un intervalle, $a \in I$ et f continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$. Si $\lim_{x \to a} f'(x)$ existe et est finie alors f est dérivable en a et*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} f'(x).$$

7 Extrema, points stationnaires, points d'inflexion, convexité et concavité

Définition 7.1 Soit $f : A \to \mathbf{R}$ dérivable en a. On dit que a est un **point stationnaire** si $f'(a) = 0$.

Définition 7.2 Soit $f : A \to \mathbf{R}$. On dit que f admet un **maximum global** en a (respectivement **minimum global**) si $f(x) \leq f(a)$ (respectivement $f(x) \geq f(a)$) pour tout $x \in A$.

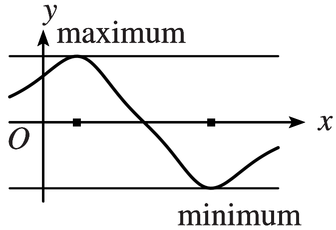


FIG. 31 – Maximum et minimun globaux

Définition 7.3 Soit $f : A \to \mathbf{R}$. On dit que f admet un **maximum local** en a (respectivement **minimum local**) s'il existe un intervalle I ouvert qui contient a tel que $f(x) \leq f(a)$ (respectivement $f(x) \geq f(a)$) pour tout $x \in I \cap A$.

Définition 7.4 On dit que f admet un **extremum global** (respectivement **local**) en a si elle admet un maximum ou un mininum global (respectivement local) en ce point .

Exemple 7.1 Soit f la fonction définie sur $[-2, +\infty)$ par $f(x) = x^3 - 3x$. Alors f admet un minimum global en -2 et 1 et elle admet en -1 un maximum local qui n'est pas un maximum global. La fonction f ne possède pas de maximum global.

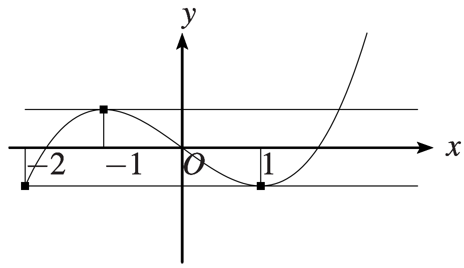


FIG. 32 – Extrema

Proposition 7.1 *Soit $f : A \to \mathbf{R}$ et $a \in A$. On suppose qu'il existe un intervalle ouvert inclus dans A et qui contient a et que f est dérivable en a. Si f admet un extremum local en a alors ce point est stationnaire : $f'(a) = 0$.*

Exemples 7.2 La fonction dérivable définie par $f(x) = 1 - x^2$ admet un extremum local en 0. Par conséquent $f'(0) = 0$: c'est un point stationnaire. En revanche 0 est un point stationnaire de la fonction dérivable x^3 qui ne possède aucun extrum local.

Proposition 7.2 *Si f est deux fois dérivable en un point stationnaire a et si $f''(a) < 0$ (respectivement $f''(a) > 0$) alors f admet un maximum local en a (respectivement minimum local).*

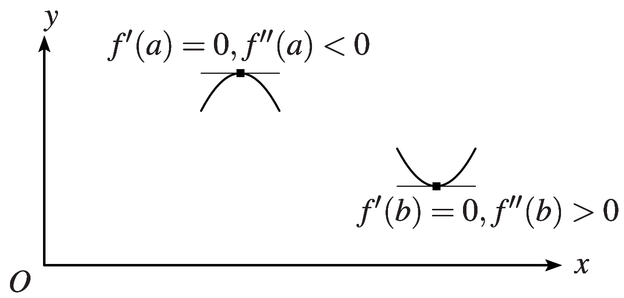


FIG. 33 – Nature de l'extremum local en fonction de la dérivée seconde

Définition 7.5 On dit que $(a, f(a))$ est **un point d'inflexion** du graphe de f si le graphe de f **coupe** sa tangente en ce point : la fonction $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ s'annule et change de signe en a.

Proposition 7.3 *Supposons que f soit trois fois dérivable en a et que $f''(a) = 0$ et $f^{(3)}(a) \neq 0$. Alors $(a, f(a))$ est un point d'inflexion du graphe de f : le graphe de f* **coupe** *sa tangente en ce point et la fonction $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ s'annule et change de signe en a. Si $f^{(3)}(a) > 0$ elle est négative pour $x < a$ et proche de a puis positive pour $x > a$ et proche de a. Si $f^{(3)}(a) < 0$ elle est positive pour $x < a$ et proche de a puis négative pour $x > a$ et proche de a.*

Exemple 7.3 Le point $(0,0)$ est un point d'inflexion du graphe du sinus car $\sin''(0) = 0$ quand $\sin'''(0) = -1$.

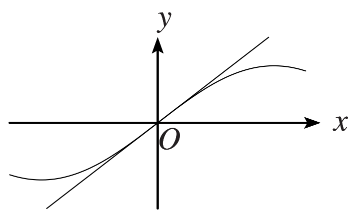


FIG. 34 – L'inflexion du graphe du sinus en $(0,0)$

Proposition 7.4 *Soit f une fonction définie et de classe C^2 sur un intervalle I. Si la dérivée seconde f'' ne s'annule pas alors elle est de signe constant sur I et pour tout $a \in I$ la tangente au graphe de f en $(a, f(a))$ ne coupe le graphe qu'en $(a, f(a))$. Si $f'' > 0$ alors le graphe de f est au dessus de ses tangentes et on dit que f est* **convexe**. *Si $f'' < 0$ alors le graphe de f est au dessous de ses tangentes et on dit que f est* **concave**.

8 Règle de L'hospital

Proposition 8.1 *Soient f et g deux fonctions dérivables définies sur un intervalle ouvert I et $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ une des extrémités de l'intervalle. On suppose que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ ou que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = +\infty$. Si de plus $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe alors $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe et*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Remarque 8.1 Puisque $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ est supposée exister c'est que le quotient $\frac{f'}{g'}$ est défini sur I et donc que g' ne s'annule pas sur I.

Remarque 8.2 Deux fonctions sont dites de **même ordre de grandeur en** a si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. D'après la règle de L'hospital, si f, g, f' et g' sont définies et continues en a et vérifie $f(a) = g(a) = 0$ alors f et g sont de même ordre de grandeur en a dès que f' et g' le sont.

Remarque 8.3 Supposons que f, g, f' et g' soient définies et continues en a, que que $f(a) = g(a) = 0$ et que $g'(a) \neq 0$. On a donc $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{x-a}$ et , $g'(a) = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{x-a} \neq 0$. De plus, puisque f' et g' sont supposées continues en a, on a $\lim_{x\to a} f'(x) = f(a)$ et $\lim_{x\to a} g'(x) = g'(a)$. Ainsi, par la règle de la limite d'un quotient on retrouve les conclusions de L'hospital :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemple 8.1 En appliquant la règle de L'hospital on montre que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin(x)} = 1.$$

Exemple 8.2 Soit f une fonction fonction n fois dérivable telle que $f^{(n)}$ est continue en 0. Si $f(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$ alors en appliquant $n-1$ fois la règle de L'hospital on montre que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

9 Plan d'étude d'une fonction numérique

Voici les étapes essentielles dans l'étude d'une fonction numérique d'une variable réelle.

- Recherche du domaine de f
- Réduction du domaine en fonction de la périodicite, de la parité ou d'autres symétries
- Continuité, dérivabilité de f
- Signe de la dérivée
- Limites de f aux bords du domaine de f
- Résumé sous forme d'un tableau de variation
- Recherche des asymptotes éventuelles
- Étude des points stationnaires et des points d'inflexion
- Représentation garphique de f

IV Intégration et primitives

1 Primitive

Définition 1.1 Une **primitive** d'une fonction f est une fonction dérivable F dont la dérivée est f.

D'un point de vue cinématique, la fonction f représente une vitesse en fonction du temps et la différence $F(b)-F(a)$ représente la distance comptée algébriquement entre les positions aux temps a et b.

Exemples 1.1 La fonction $x \mapsto x^2+4x-5$ est une primitive de $x \mapsto 2x+4$. La fonction ln est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty)$. La fonction $x \mapsto 2+\arcsin(x)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $[-1,1]$. La fonction $x \mapsto x|x|$ est une primitive de $x \mapsto 2|x|$.

Proposition 1.1 *Soit F une primitive de f sur un intervalle I, si G est une primitive de f sur I il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que $G = c+F$.*

2 Quelques primitives classiques

la fonction f	une primitive F
$x \mapsto x^\lambda,\ \lambda \neq -1$	$x \mapsto \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1}$
$x \mapsto \frac{1}{x} = x^{-1}$	$x \mapsto \ln(\lvert x\rvert)$
$x \mapsto \exp(\lambda x),\ \lambda \neq 0$	$x \mapsto \frac{1}{\lambda}\exp(\lambda x)$
cos	sin
sin	$-\cos$
tan	$-\ln(\lvert\cos\rvert)$
cosh	sinh
sinh	cosh
tanh	$\ln(\cosh)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	arcsin ou $-$arccos
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	arctan
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x \mapsto \operatorname{argch}(x)$ ou $\ln\lvert x+\sqrt{x^2-1}\rvert$ suivant le domaine
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$x \mapsto \operatorname{argsh}(x)$ ou $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$
$x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$	$x \mapsto \operatorname{argth}(x)$ ou $\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert$ suivant le domaine

L'existence d'une formule exacte à l'aide de fonctions usuelles et qui fournit une primitive d'une fonction donnée n'est pas possible en général. Cependant, quand la fonction de départ est assez simple on essaie par des manipulations algébriques de se ramener à des primitives de fonctions appartenant à la liste précédente.

Exemple 2.1 Considérons la fonction f donnée par $f(x) = \frac{2}{x(x-1)(x+1).}$ Pour trouver une primitive de f il suffit d'observer que $f(x) = \frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x}$. Sous cette forme on obtient que

$$F(x) = \ln(|x-1|)+\ln(|x+1|)-2\ln(|x|) = \ln\left(\left|\frac{(x-1)(x+1)}{x^2}\right|\right) = \ln\left(\left|1-\frac{1}{x^2}\right|\right)$$

est une primitive de f.

3 Intégrale

L'objet initial de la théorie de l'intégration est de fournir un cadre mathématique rigoureux au calculs des longueurs, des aires et des surfaces. On commence par s'intéresser à l'aire délimitée par la graphe d'une fonction définie sur un segment $[a,b]$. Pour la comprendre on va l'approximer (dans un sens à préciser) par une somme d'aires de rectangles de bases égales mais de hauteurs variables. Les bases de ces rectangles divisent régulièrement le segment $[a,b]$.

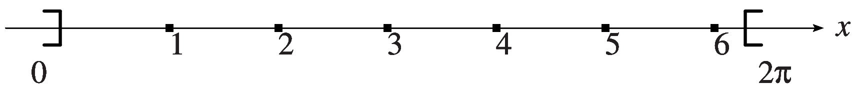


FIG. 35 – Division du segment $[0,\pi]$ en 7 intervalles de longueur $\frac{\pi}{7}$

Définition 3.1 Soient une fonction continue f et un segment $[a,b]$ inclus dans le domaine de f. Si $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ on pose

$$I_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + \frac{b-a}{n} k).$$

La somme I_n s'appelle **somme de Riemann** associée à f. Si la limite $\lim_{n \to +\infty} I_n$ existe et appartient à $\mathbf{R}$ alors on appelle cette limite **intégrale de f entre a et b** et on la note

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Théorème 3.1 *Dès que la fonction f est continue sur un intervalle borné et fermé I, si $a \in I$ et $b \in I$, alors l' intégrale de f entre a et b existe.*

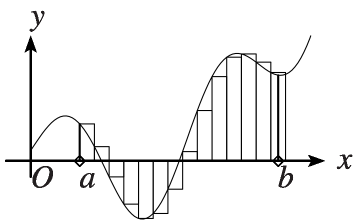


FIG. 36 – Une fonction continue f et une approximation en escaliers sur un segment $[a,b]$

L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ **représente l'aire comptée algébriquement** comprise entre la courbe représentative de f, l'axe des x et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. Pour définir mathématiquement cette aire on *approxime* la fonction f par une fonction **en escaliers** f_n qui vaut $f(a + \frac{b-a}{n}k)$ sur les intervalles $[a + \frac{b-a}{n}k, a + \frac{b-a}{n}(k+1)]$, $k = 0, ..., n-1$. L'aire associée à f_n est I_n :

$$I_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + \frac{b-a}{n} k) = \int_a^b f_n(x)dx.$$

On considère que I_n approxime l'aire associée à f.

Exemple 3.1 Soient $f(x) = x, a = 0, b = 1$. Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. On a

$$I_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} = \frac{1}{n^2} \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n})$$

et donc

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = \frac{1}{2} = \int_0^1 x dx.$$

Définition 3.2 Si $\int_a^b f(x)dx$ est définie on pose $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$

4 Premières propriétés

Proposition 4.1 *(***linéarité de l'intégrale***) Soient f et g continues sur un intervalle I, $a, b \in I$ et $\lambda \in \mathbf{R}$.*

- $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$

Proposition 4.2 *(***comparaison à** 0 *) Soit f continue sur un intervalle I et soit $[a,b] \subset I$.*

- *Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a,b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$*
- *Si $f(x) \leq 0$ pour tout $x \in [a,b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq 0$*

On déduit de cette proposition les inégalités suivantes.

Proposition 4.3 *Soient f et g continues sur un intervalle I, $[a,b] \subset I$ et $m \leq M \in \mathbf{R}$.*

- *Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ (***comparaison***)*
- *Si $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a,b]$ alors*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \quad \textbf{(Inégalité de la moyenne)}$$

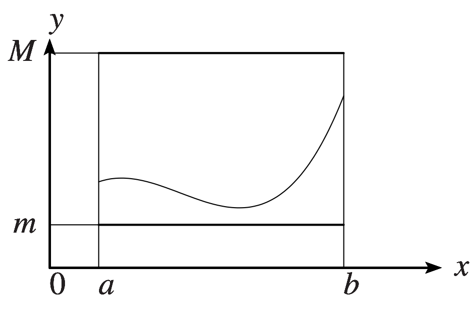


FIG. 37 – Les aires $m(b-a)$ et $M(b-a)$ encadrent l'aire $\int_a^b f(x)dx$

Définition 4.1 Le nombre $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ s'appelle **valeur moyenne de f sur le segment** $[a,b]$.

Si on applique le théorème des accroissements finis on obtient le résultat suivant.

Proposition 4.4 *(**propriété de la valeur moyenne**) Soient f continue sur un intervalle I et $a \neq b \in I$. Alors il existe c entre a et b tel que*

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

En d'autres termes la valeur moyenne de f sur $[a,b]$ est prise au moins une fois.

Proposition 4.5 *Soit f continue sur un intervalle I et soit $a,b,c \in I$. Alors*

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \text{ } (\textbf{Relation de Chasles}).$$

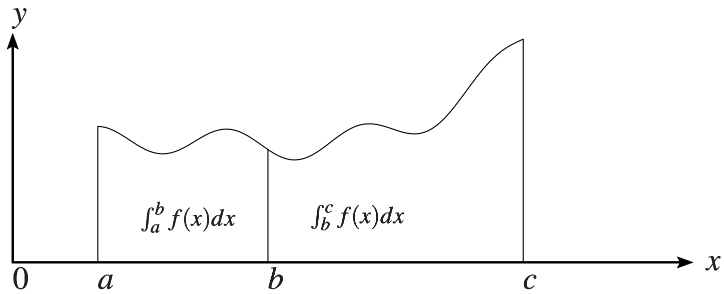


FIG. 38 – La relation de Chasles d'addition des aires

5 Intégrales et primitives

Théorème 5.1 *Soient f une fonction continue sur un intervalle I, $a \in I$ et $x \in I$, alors l'intégrale $\int_a^x f(t)dt := F(x)$ est une primitive de f sur I.*

De plus pour tout $b \in I$ et toute primitive G de f sur I on a $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b$.

Exemple 5.1 Soient $f(x) = x, a = 0, b = 1$. Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. On a vu précédemment que

$$I_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n} = \frac{1}{n^2}\frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{n})$$

et donc

$$\int_0^1 xdx = \lim_{n\mapsto+\infty} I_n = \frac{1}{2} = [\frac{x^2}{2}]_0^1.$$

Notation 5.1 Si F est une fonction et $[a,b]$ est inclus dans le domaine de F on pose $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$ et $F(a) - F(b) = [F(x)]_b^a$.

Définition 5.1 Soient f une fonction continue sur un intervalle I, $a \in I$ et $x \in I$ on appelle la primitive $\int_a^x f(t)dt$ qui s'annule en a **intégrale fonction de sa borne supérieure**.

6 Intégrales impropres

Définition 6.1 Soit f continue sur un intervalle ouvert $I =]A,B[$ (avec A et B dans $\mathbf{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$) et soit a dans I. Si la limite $\lim_{b\to B}\int_a^b f(x)d(x)$ existe et appartient à $\mathbf{R}$ on appelle cette limite **intégrale impropre de f sur** $[a,B[$ et on la note $\int_a^B f(x)d(x)$. De même si la limite $\lim_{b\to A}\int_b^a f(x)d(x)$ existe et appartient à $\mathbf{R}$ on appelle cette limite **intégrale impropre de f sur** $]A,a]$ et on la note $\int_A^a f(x)d(x)$. Enfin si les intégrales impropres $\int_a^B f(x)d(x)$ et $\int_A^a f(x)d(x)$ existent on pose $\int_A^B f(x)d(x) = \int_A^a f(x)d(x) + \int_a^B f(x)d(x)$ et ceci définit **l'intégrale impropre de f sur** $]A,B[$.

Exemple 6.1 On a $\int_1^b \frac{1}{x^2}dx = 1-\frac{1}{b}$ qui tend vers 1 quand b tend vers $+\infty$ mais qui tend vers $-\infty$ quand b tend vers 0. Par conséquent on a $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = 1$ mais l'intégrale impropre de $x\mapsto\frac{1}{x^2}$ sur $]0,1]$ n'est pas définie.

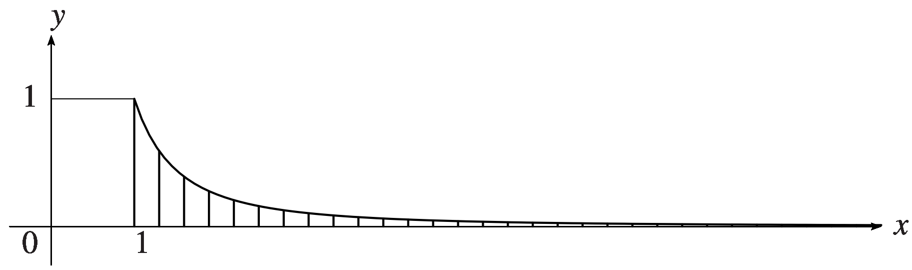


FIG. 39 – L'aire $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ est égale à 1

Théorème 6.1 *Soient f et g continues sur $]A,B[$ et $a\in]A,B[$. On suppose que $|f|\le g$. Si g possède une intégrale impropre sur $[a,B[$ (respectivement $]A,a]$) alors f en possède également et*

$$\left|\int_a^B f(x)d(x)\right| \le \int_a^B g(x)d(x)$$

(respectivement $\left|\int_A^a f(x)d(x)\right| \le \int_A^a g(x)d(x)$).

Exemple 6.2 La fonction $x\mapsto|\frac{\sin(x)}{x^2}|$ est majorée sur $[2\pi,+\infty)$ par la fonction $x\mapsto\frac{1}{x^2}$ et $\int_{2\pi}^\infty \frac{1}{x^2}dx$ existe et vaut $\frac{1}{2\pi}$. Par conséquent $\int_{2\pi}^\infty \frac{\sin(x)}{x^2}dx$ existe et est compris entre $-\frac{1}{2\pi}$ et $\frac{1}{2\pi}$.

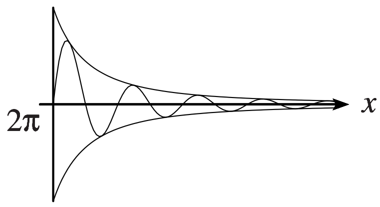


FIG. 40 – Les fonctions $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ et $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ sur $[2\pi, +\infty)$

La définition suivante généralise encore un peu plus la notion d'intégrale.

Définition 6.2 Soient $f$une fonction et $a = a_0, a_1, ..., a_n, a_{n+1} = b$ des réels. Si pour $i = 1, ..., n$ l'intégrale (éventuellement impropre) $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx$ est définie alors on définit $\int_a^b f(x)dx$ par

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx.$$

À l'exception de la propriété de la valeur moyenne et de l'existence de primitive, toutes les propriétés vues précédemment (linéarité, comparaison, inégalité de la moyenne, relation de Chasles) restent vraies pour cette généralisation des intégrales.

Exemple 6.3 La fonction *en escaliers* f définie sur $[0,2]$ par $f(x) = 1$ si $x \in [0,1[$ et $f(x) = 2$ si $x \in [1,2]$ vérifie

$$\int_0^2 f(x)dx = 3.$$

La fonction f n'a pas de primitive et la propriété de la valeur moyenne n'est pas vérifiée car $f(x) \neq \frac{3}{2}$ si $x \in [0,2]$.

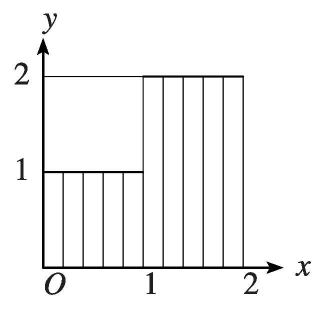


FIG. 41 – Intégrale d'une fonction en escalier (deux marches)

7 Trois méthodes d'intégration

Définition 7.1 Soit f une fonction définie sur un intervalle I, continue et dérivable. Si f ne s'annule pas sur I on appelle **dérivée logarithmique de** f la fonction $\frac{f'}{f}$.

Proposition 7.1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I, continue et dérivable. Si f ne s'annule pas sur I alors la fonction* $\ln(|f|)$ *est une primitive de la dérivée logarithmique* $\frac{f'}{f}$ *:*

$$(\ln(|f|))' = \frac{f'}{f}.$$

Exemple 7.1 La fonction $\ln(1+x^2+\sin(x))$ est une primitive de la fonction $\frac{2x+\cos(x)}{1+x^2+\sin(x)}$.

Proposition 7.2 **Intégration par parties** *Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et dont les dérivées f' et g' sont continues. Si $[a,b] \subset I$ alors*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

avec $[f(x)g(x)]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$.

Exemple 7.2 Le calcul de $\int_0^\pi x\sin(x)dx$ se fait par intégration par parties. On prend $f(x) = x$ et $g = -\cos$. On a donc $f' = 1$ et $g' = \sin$. Ceci donne

$$\int_0^\pi x\sin(x)dx = [-x\cos(x)]_0^\pi + \int_0^\pi x\cos(x) = [\sin(x) - x\cos(x)]_0^\pi = \pi.$$

Proposition 7.3 **Changement de variable** *Soient I et J deux intervalles de* $\mathbf{R}$, *$f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue et $\phi : J \to I$ une fonction dérivable et dont la dérivée est continue. Alors pour $\alpha, \beta \in J$ on a*

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\phi(u))\phi'(u)du.$$

Exemple 7.3 Le calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(u)\cos(u)du$ se fait par un changement de variable. On pose ici $f(t) = t^2$ et $\phi = \sin$. On a $\phi' = \cos$, $\phi(\frac{\pi}{2}) = 1$ et $\phi(0) = 0$. Par conséquent

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(u)\cos(u)du = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}.$$

Exemple 7.4 On veut calculer l'aire comprise entre le demi-cercle unité supérieur, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$. Or le demi-cercle supérieur est le graphe de la fonction $\sqrt{1-t^2}$.

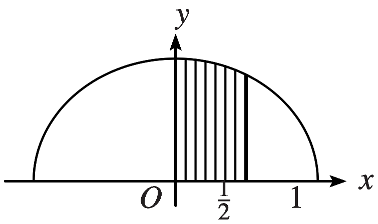


FIG. 42 – Aire d'une portion de disque

On doit donc calculer $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-t^2}dt$. Ce calcul se fait par un changement de variable. On pose ici $\phi = \cos$. On a $\phi' = -\sin$, $\phi(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ et $\phi(\frac{\pi}{2}) = 0$. Par conséquent, puisque $\sin(u) = \sqrt{1-\cos^2(u)}$ si $u \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$, on a

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-t^2}dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} -\sin^2(u)du = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(u)du = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2u)}{2}du = [\frac{u}{2} - \frac{\sin(2u)}{4}]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

8 Longueur d'une courbe, aire d'une surface de révolution

Longueur dune courbe Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I et dont la dérivée est continue. Soit $[a,b] \subset I$ et $t \in]0, b-a[$. On note N_t la partie entière de $\frac{b-a}{t}$ et si $k = 0, ..., N_t + 1$ on pose $a_k = a + kt$. Sur chaque intervalle $[a_k, a_{k+1}]$ (avec $k = 0, ..., N_t$) on approxime f par son approximation affine $x \mapsto f(a_k) + f'(a_k)(x - a_k)$. D'après le théorème de Pythagore, la longueur du segment de droite $x \in [a_k, a_{k+1}] \mapsto f(a_k) + f'(a_k)(x - a_k)$ est égale à $(a_{k+1} - a_k)\sqrt{1 + f'(a_k)^2}$ ou encore $t\sqrt{1 + f'(a_k)^2}$ car $(a_{k+1} - a_k) = t$. De plus la somme $L_t = t \sum_{k=0}^{N_t} \sqrt{1 + f'(a_k)^2}$ tend vers $\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$ lorsque t tend vers 0.

Définition 8.1 La **longueur de la courbe** $\gamma : t \in [a,b] \mapsto (t, f(t))$ est

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

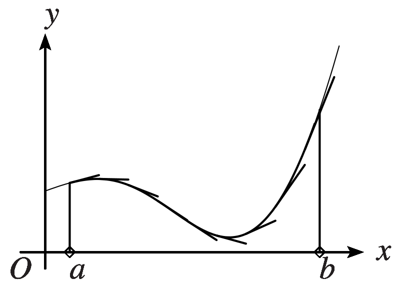


FIG. 43 – Approximation d'une courbe par des *segments de droites tangentes*

Exemple 8.1 Appliquons cette définition à la fonction définie par $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ avec $-r < a < b < r$. Puisque le graphe de cette fonction est le demi-cercle supérieur de rayon r centré à l'origine on va calculer la longueur de la portion du demi cercle comprise entre $x = a$ et $x = b$.

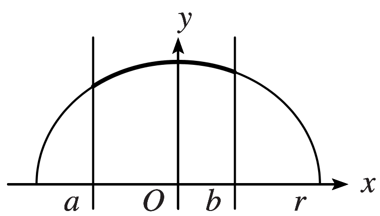


FIG. 44 – Portion de cercle

On a $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ et donc $\sqrt{1 + f'(x)^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$. Par conséquent on obtient

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \int_a^b \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = r(\arccos(\frac{a}{r}) - \arccos(\frac{b}{r})).$$

Ceci correspond bien à la longueur attendue de la portion du demi cercle comprise entre $x = a$ et $x = b$.

Exemple 8.2 La longueur $l(a,b)$ de l'arc de parabole d'équation $y = x^2$ avec $x \in [a,b]$ est

$$l(a,b) = \int_a^b \sqrt{1+4x^2}dx.$$

En posant $2x = \sinh(t)$ on obtient

$$l(a,b) = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{argsh}(2a)}^{\mathrm{argsh}(2b)} \cosh^2(t)dt = \frac{1}{4}\int_{\mathrm{argsh}(2a)}^{\mathrm{argsh}(2b)} \cosh(2t)+1dt = \left[\frac{\sinh(2t)+2t}{8}\right]_{\mathrm{argsh}(2a)}^{\mathrm{argsh}(2b)}.$$

Exemple 8.3 La longueur $l(a,b)$ de l'arc de *chaînette* $y = \cosh(x)$ avec $x \in [a,b]$ (c'est le nom du graphe du cosinus hyperbolique car on peut démontrer que c'est la forme d'une chaînette fixée en deux points sous l'action de la pesanteur) est

$$l(a,b) = \int_a^b \sqrt{1+\sinh^2(x)}dx = \int_a^b \cosh(x)dx = \sinh(b) - \sinh(a).$$

Aire d'une surface de révolution On conserve les notations précédentes ($f, [a,b], t$ et N_t) et on suppose la fonction f positive. Considérons la surface de révolution définie par

$$(h,\theta) \in [a,b] \times [0,2\pi] \mapsto (\cos(\theta)f(h), \sin(\theta)f(h), h).$$

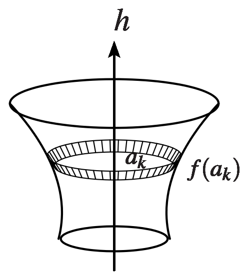


FIG. 45 – Surface de révolution

De la même façon qu'on approxime la longueur d'un petit morceau de courbe par la longueur d'un segment on peut approximer l'aire de la portion de surface de révolution comprise entre les hauteurs a_k et a_{k+1} par $2\pi f(a_k)t\sqrt{1+f'(a_k)^2}$. Or la somme $S_t = t\sum_{k=0}^{N_t} 2\pi f(a_k)\sqrt{1+f'(a_k)^2}$ tend vers $\int_a^b 2\pi f(h)\sqrt{1+f'(h)^2}dh$ lorsque t tend vers 0.

Définition 8.2 L'**aire de la surface de révolution** $(h,\theta) \in [a,b] \times [0,2\pi] \mapsto (\cos(\theta)f(h), \sin(\theta)f(h), h)$ est

$$\int_a^b 2\pi f(h)\sqrt{1+f'(h)^2}dh.$$

Exemple 8.4 Appliquons cette définition à la fonction donnée par $f(h) = \lambda h$ pour $h > 0$ avec $\lambda > 0$. Puisque le graphe de cette fonction est une demi-droite qui arrive à l'origine, par révolution il engendre un cône de révolution. On va donc pouvoir calculer l'aire de la portion de cône comprise entre $h = a > 0$ et $h = b > 0$ en appliquant la formule précédente.

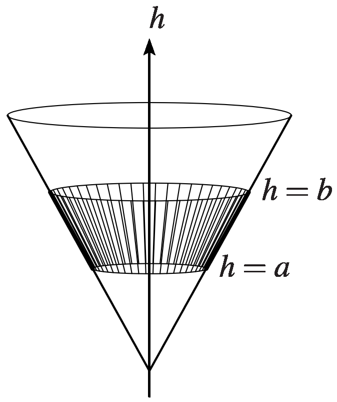


FIG. 46 – Portion de cône

On obtient

$$\int_a^b 2\pi f(h)\sqrt{1+f'(h)^2}dh = \int_a^b 2\pi\lambda h\sqrt{1+\lambda^2}dh = \pi\lambda\sqrt{1+\lambda^2}(b^2-a^2).$$

Ceci correspond bien à l'aire attendue de la portion de cône comprise entre $h = a$ et $h = b$.

Exemple 8.5 Appliquons cette définition à la fonction donnée par $f(h) = \sqrt{r^2-h^2}$ avec $-r < a < b < r$. Puisque le graphe de cette fonction est un demi-cercle de rayon r centré à l'origine, par révolution il engendre une sphère de rayon r. On va donc pouvoir calculer l'aire de la portion de sphère comprise entre $h = a$ et $h = b$ en appliquant la formule précédente.

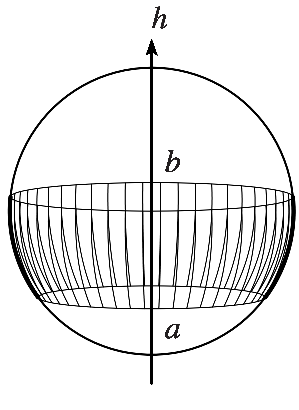


FIG. 47 – Portion de sphère

On obtient

$$\int_a^b 2\pi f(h)\sqrt{1+f'(h)^2}dh = \int_a^b 2\pi r dh = 2\pi r(b-a).$$

Ceci correspond bien à l'aire attendue de la portion de sphère comprise entre $h = a$ et $h = b$.

Exemple 8.6 Soient $0 < r < R$. Considérons un cercle vertical de rayon r dont le centre est à une distance R de l'axe Oh. En faisant tourner ce cercle autour de l'axe vertical, on engendre un tore. On obtient donc ce tore par révolution des graphes des fonctions données par $f(h) = R + \sqrt{r^2 - h^2}$ et $g(h) = R - \sqrt{r^2 - h^2}$ sur $[-r, r]$.

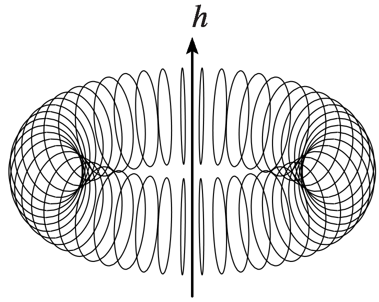


FIG. 48 – Tore

On a

$$f(h)\sqrt{1 + f'(h)^2} + g(h)\sqrt{1 + g'(h)^2} = \frac{2Rr}{\sqrt{r^2 - h^2}}.$$

Par conséquent en appliquant la formule précédente à ces deux fonctions on obtient que l'aire du tore est égale à

$$\int_{-r}^{r} 2\pi \left[f(h)\sqrt{1 + f'(h)^2} + g(h)\sqrt{1 + g'(h)^2} \right] dh = \int_{-r}^{r} 2\pi \frac{2Rr}{\sqrt{r^2 - h^2}} dh$$

c'est à dire $4\pi^2 Rr$.

9 Développement de Taylor avec reste intégral

Le théorème qui lie l'intégrale d'une fonction continue et la variation de sa primitive admet le corollaire suivant.

Théorème 9.1 *Soit $f : I \to$ une fonction dérivable définie sur un intervalle ouvert I. On suppose que f' est continue sur I. Si $b \in I$ et $a \in I$ alors*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx.$$

Ce théorème admet la généralisation suivante pour les fonctions qui sont n fois dérivables.

Théorème 9.2 *(**Formule de Taylor avec reste intégral**) Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $f : I \to$ une fonction n fois dérivable définie sur un intervalle ouvert I telle que $f^{(n)}$ soit continue sur I. Si $b \in I$ et $a \in I$ alors*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) dx.$$

On déduit de ce théorème et des critères de comparaison des intégrales le résultat suivant.

Corollaire 9.1 *Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction n fois dérivable telle que $f^{(n)}$ soit continue. Soit $[a,b] \subset I$. On suppose qu'il existe $m < M$ tels que pour tout $x \in [a,b]$ on a $m \leq f^{(n)}(x) \leq M$. Alors*

$$\frac{(b-a)^n}{n!}m \leq f(b) - f(a) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \leq \frac{(b-a)^n}{n!}M.$$

Exemple 9.1 Si $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$ alors

$$|\cos(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Exemple 9.2 Si $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$ alors

$$|\sin(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}.$$

Exemple 9.3 Si $n \in \mathbf{N}^*$, $x \in \mathbf{R}$, $0 \leq y$ et $x \leq y$ alors

$$|\exp(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} x^k| \leq \frac{|x|^n}{n!} \exp(y).$$

Exemple 9.4 Si $n \in \mathbf{N}^*$, $0 \leq x$ alors

$$|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k| \leq \frac{1}{n+1}.$$

V Les nombres complexes

1 Construction du corps des complexes, C

Définition 1.1 On note **C** et on appelle **corps des complexes** l'ensemble des couples de réels muni des trois lois suivantes : si (x,y) et (x',y') sont dans **C** et λ dans **R**

– **addition**
$$(x,y) +_{\mathbf{C}} (x',y') = (x+x', y+y')$$
– **multiplication**
$$(x,y) \times_{\mathbf{C}} (x',y') = (xx-yy', xy'+x'y)$$
– **multiplication par un réel**
$$\lambda \cdot (x,y) = (\lambda x, \lambda y)$$

Les éléments de **C** s'appellent **nombres complexes** ou **complexes**.

Notations 1.1 Le complexe $(0,0)$ est noté $0_{\mathbf{C}}$, le complexe $(1,0)$ est noté $1_{\mathbf{C}}$ et le complexe $(0,1)$ est noté i.

Proposition 1.1 *Soient $z=(x,y), z'=(x',y'), z''=(x'',y'')$ des complexes et λ, λ' des réels. Ils vérifient les proriétés suivantes.*

– $0_{\mathbf{C}} +_{\mathbf{C}} z = z +_{\mathbf{C}} 0_{\mathbf{C}} = z$ *($0_{\mathbf{C}}$ neutre pour $+_{\mathbf{C}}$)*
– $z +_{\mathbf{C}} (-x,-y) = (-x,-y) +_{\mathbf{C}} z = 0_{\mathbf{C}}$ *(tout élément admet un inverse pour $+_{\mathbf{C}}$)*
– $z +_{\mathbf{C}} (z' +_{\mathbf{C}} z'') = (z +_{\mathbf{C}} z') +_{\mathbf{C}} z''$ *($+_{\mathbf{C}}$ est associative)*
– $z +_{\mathbf{C}} z' = z' +_{\mathbf{C}} z$ *($+_{\mathbf{C}}$ est commutative)*

$(\mathbf{C}, +_{\mathbf{C}})$ *est un* **groupe commutatif**

– $\lambda \cdot (z+z') = \lambda \cdot z +_{\mathbf{C}} \lambda \cdot z'$
– $(\lambda+\lambda') \cdot z = \lambda \cdot z +_{\mathbf{C}} \lambda' \cdot z$
– $(\lambda\lambda') \cdot z = \lambda \cdot (\lambda' \cdot z)$

$(\mathbf{C}, +_{\mathbf{C}}, \cdot)$ *est un* **R-espace vectoriel**

– $1_{\mathbf{C}} \times_{\mathbf{C}} z = z \times_{\mathbf{C}} 1_{\mathbf{C}} = z_{\mathbf{C}}$ *($1_{\mathbf{C}}$ neutre pour $\times_{\mathbf{C}}$)*
– *Si $z \neq 0_{\mathbf{C}}$ alors $z \times_{\mathbf{C}} (\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}) = (\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}) \times_{\mathbf{C}} z = 1_{\mathbf{C}}$ (tout élément différent de $0_{\mathbf{C}}$ admet un inverse pour $\times_{\mathbf{C}}$)*
– $z \times_{\mathbf{C}} (z \times_{\mathbf{C}} z'') = (z \times_{\mathbf{C}} z') \times_{\mathbf{C}} z''$ *($\times_{\mathbf{C}}$ est associative)*
– $z \times_{\mathbf{C}} (z' +_{\mathbf{C}} z'') = (z \times_{\mathbf{C}} z') +_{\mathbf{C}} (z \times_{\mathbf{C}} z'')$ *($\times_{\mathbf{C}}$ est distributive par rapport à $+_{\mathbf{C}}$)*
– $z \times_{\mathbf{C}} z' = z' \times_{\mathbf{C}} z$ *($\times_{\mathbf{C}}$ est commutative)*

$(\mathbf{C} \setminus \{0\}, \times_{\mathbf{C}})$ *est un* **groupe commutatif** *et* $(\mathbf{C}, +_{\mathbf{C}}, \times_{\mathbf{C}})$ *est un* **corps commutatif**

– $\lambda \cdot z = (\lambda, 0) \times_{\mathbf{C}} z$

*Ceci permet d'***identifier** *les réels et les complexes de la forme $(x,0)$.*

Convention L'identification des réels avec les complexes de la forme $(x,0)$ conduit à identifier 0 et $0_{\mathbf{C}}$ ainsi que 1 et $1_{\mathbf{C}}$. Dans la suite on notera $+_{\mathbf{C}}$ et $\times_{\mathbf{C}}$ simplement $+$ et $\times$ et on adoptera pour les complexes les mêmes règles d'écriture des opérations et des parenthèses que pour les réels.

Notations 1.2 Soit $z=(x,y)$.

– On pose $-z = (-x,-y)$. C'est l'**opposé de** z, c'est à dire l'**inverse** pour $+$.
– Si $z \neq 0$ on pose $z^{-1} = \frac{1}{z} = (\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2})$. C'est l'**inverse de** z, c'est à dire l'**inverse** pour $\times$.

Définition 1.2 Si $z=(x,y)$ on appelle **partie réelle de** z et on note $\mathrm{Re}(z)$ le nombre x et on appelle **partie imaginaire de** z et on note $\mathrm{Im}(z)$ le nombre y.

Notation 1.3 Le complexe $z=(x,y)$ s'écrit aussi de manière unique $z=x+iy=\mathrm{Re}(z)+i\mathrm{Im}(z)$ avec $x\in\mathbf{R}$ et $y\in\mathbf{R}$. Ceci signifie que le couple $\{1,i\}$ est **une base** du **R**-espace vectoriel **C** qui est de **dimension** 2.

Définition 1.3 Un complexe z est dit **imaginaire pur** si sa partie réelle est 0. L'ensemble des imaginaires purs est $i\mathbf{R}$ et on a $\mathbf{C}=\mathbf{R}+i\mathbf{R}$.

Proposition 1.2

$$i^2=-1$$

Ainsi, alors que l'équation $x^2=-1$ n'a pas de solution dans **R** elle en possède deux dans **C** qui sont i et $-i$.

Proposition 1.3 *Soient $z\in\mathbf{C}\setminus\{1\}$ et $n\in\mathbf{N}$. Alors*

$$\sum_{n=0}^{n-1} z^k = 1+\ldots+z^k+\ldots z^{n-1}=\frac{1-z^n}{1-z}.$$

Proposition 1.4 *Soient $a,b\in\mathbf{C}$ et $n\in\mathbf{N}$. Alors*

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}a^k b^{n-k}.$$

2 Conjugué, module et argument d'un nombre complexe

Définition 2.1 On appelle **conjugué du nombre complexe** $z=x+iy$ (avec $x\in\mathbf{R}$ et $y\in\mathbf{R}$) et on note $\bar{z}$ le nombre complexe $\bar{z}=x-iy$.

Proposition 2.1 *Soient $z,z'\in\mathbf{C}$.*
- $\bar{\bar{z}}=z$ *(la conjugaison est une* **involution***)*
- $\overline{-z}=-\bar{z}$
- $\overline{\frac{1}{z}}=\frac{1}{\bar{z}}$ *si* $z\neq 0$
- $z\bar{z}=\mathrm{Re}^2(z)+\mathrm{Im}^2(z)$
- $\bar{z}=z$ *si et seulement si z est réel*
- $\bar{z}=-z$ *si et seulement si z est imaginaire pur*
- $\overline{z+z'}=\bar{z}+\overline{z'}$
- $\overline{zz'}=\bar{z}\overline{z'}$

Définition 2.2 On appelle **module de** z et on note $|z|$ la racine carrée de $z\bar{z}=\mathrm{Re}^2(z)+\mathrm{Im}^2(z)$.

Proposition 2.2 *Si $z\in\mathbf{C}\setminus\{0\}$ alors* $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Proposition 2.3 *Soient $z,z'\in\mathbf{C}$ et $\lambda\in\mathbf{R}$.*
- $|z|=0$ *si et seulement si* $z=0$

- $|z| = |-z|$
- $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$ *si* $z \neq 0$
- $||z| - |z'|| \leq |z+z'| \leq |z| + |z'|$ *(***inégalité triangulaire** *)*
- $|\lambda z| = |\lambda||z|$
- $|zz'| = |z||z'|$

Ainsi le module est une **norme***.*

On déduit de cette proposition le résultat suivant.

Proposition 2.4 *Les ensembles* $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ *et* $S = \{z \in \mathbf{C}, |z| = 1\}$ *munis de la multiplication sont des groupes commutatifs : ils contiennent le neutre pour la multiplication,* 1, *et si* $z, z', z'' \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ *(respectivement* $z, z', z'' \in S$*) alors* $zz' = z'z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ *(respectivement* $zz' = z'z \in S$*),* $\frac{1}{z} \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ *(respectivement* $\frac{1}{z} \in S$*) et* $z(z'z'') = (zz')z''$*.*

Définition 2.3 L'ensemble $S = \{z \in \mathbf{C}, |z| = 1\}$ s'appelle le **cercle unité**.

Définition 2.4 Soit $z \neq 0$. Puisque $\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} + i\frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|} = \frac{z}{|z|}$ est de module 1 il existe un θ dans $\mathbf{R}$ tel que $\cos(\theta) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}$ et $\sin(\theta) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$. Ce nombre θ est un **argument** de z. Les nombres r et θ associés à z s'appellent **coordonnées polaires de** z.

Proposition 2.5 *Soit* $z \neq 0$ *et* θ *un argument de* z*. Alors les arguments de* z *sont les réels de la forme* $\theta + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Proposition 2.6 *Tout complexe non nul* z *est déterminé par son module* r *et un de ses arguments* θ *:* $z = r(cos(\theta) + i\sin(\theta))$.

Proposition 2.7 *Si* z *et* z' *sont deux complexes non nuls de modules* r *et* r' *et d'arguments* θ *et* θ' *alors* zz' *est de module* rr' *et d'argument* $\theta + \theta'$ *:*

$$[r(cos(\theta) + i\sin(\theta))][r'(cos(\theta') + i\sin(\theta'))] = (rr')(cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')).$$

3 Les racines d'un polynôme d'ordre 2 à coefficients complexes

Proposition 3.1 *Soient* $a, b, c \in \mathbf{C}$ *avec* $a \neq 0$*. On note* δ *une racine carrée de* $\Delta = b^2 - 4ac$*. Alors*

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \quad \textbf{et} \quad z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$$

sont les solutions de l'équation

$$az^2 + bz + c = 0.$$

Proposition 3.2 *Soit* $\Delta = X + iY$ *un complexe non nul. L'équation* $\delta^2 = \Delta$ *posède exactement deux solutions* $\delta_1 = x + iy$ *et* $\delta_2 = -\delta_1$*. On a* $x^2 + y^2 = \sqrt{X^2+Y^2}$, $x^2 - y^2 = X$ *et* $2xy = Y$*. Par conséquent* x^2 *et* $-y^2$ *sont solution de l'équation*

$$Z^2 - XZ - \frac{Y^2}{4} = 0.$$

On a

$$x^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{X^2+Y^2} + X), \;\; y^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{X^2+Y^2} - X).$$

De plus x *et* y *sont de même signe si* $Y \geq 0$ *et ils sont de signes opposés si* $Y < 0$*.*

4 Exponentielle complexe

Définition 4.1 L'**exponentielle complexe** est l'application de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ qui à $z = x + iy$ associe le complexe $\exp(z) = e^z$ de module $\exp(x) = e^x$ et d'argument y :

$$\exp(z) = \exp(x+iy) = \exp(x)(\cos(y) + i\sin(y))$$

qu'on écrit aussi

$$e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y)).$$

Cette application prolonge à $\mathbf{C}$ l'exponentielle définie sur $\mathbf{R}$.

Proposition 4.1 *Si $z = x+iy$ alors*

$$\exp(z) = \exp(x)\exp(iy)$$

qu'on écrit aussi

$$e^{(x+iy)} = e^x e^{iy}.$$

En particulier

$$\cos(y) + i\sin(y) = \exp(iy) = e^{iy}.$$

Proposition 4.2 *Si a et $b \in \mathbf{C}$, la fonctoin de la variable réelle définie par $t \mapsto b\exp(at)$ est dérivable (ceci signifie que ses deux fonctions coordonnées sont dérivables) et sa dérivée est la fonction $t \in \mathbf{R} \mapsto ab\exp(at)$.*

Proposition 4.3 *(***Identité d'Euler***)*

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Proposition 4.4 *L'exponentielle est une surjection de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. Plus précisément si $Z = X + iY \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ alors les antécédents de Z par l'exponentielle complexe sont les complexes de la forme $z = x + iy$ avec $x = \ln(|Z|)$ et $y = \theta + 2k\pi$ où θ est un argument de Z et k un entier relatif.*

Proposition 4.5 *Si $z, z' \in \mathbf{C}$ alors*

$$\exp(z+z') = \exp(z)\exp(z')$$

qu'on écrit aussi

$$e^{(z+z')} = e^z e^{z'}.$$

Proposition 4.6 *Si $t \in \mathbf{R}$ alors*

$$\begin{aligned}
\cos(t) &= \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \cosh(it) \\
\sin(t) &= \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{\sinh(it)}{i} \\
\tan(t) &= \frac{e^{it} - e^{-it}}{i(e^{it} + e^{-it})} = \frac{\tanh(it)}{i}.
\end{aligned}$$

Proposition 4.7 Linéarisation *Si $n \in \mathbf{N}$ alors*

$$\begin{aligned}
\cos^n(t) &= \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{2^n}e^{i(2k-n)t} \\
& &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{2^n}\cos\left((2k-n)t\right) \\
\sin^n(t) &= \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{2^n}e^{i(2k-n)(t-\frac{\pi}{2})} \\
& &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{2^n}\cos\left((2k-n)(t-\frac{\pi}{2})\right).
\end{aligned}$$

Exemple 4.1

$$\begin{aligned}
\cos^3(t) &= \frac{1}{2^3}\cos(-3t)+\frac{3}{2^3}\cos(-t)+\frac{3}{2^3}\cos(t)+\frac{1}{2^3}\cos(3t) \\
&= \frac{1}{4}\cos(3t)+\frac{3}{4}\cos(t) \\
\sin^3(t) &= \frac{1}{2^3}\cos(-3(t-\frac{\pi}{2}))+\frac{3}{2^3}\cos(-(t-\frac{\pi}{2}))+\frac{3}{2^3}\cos(t-\frac{\pi}{2})+\frac{1}{2^3}\cos(3(t-\frac{\pi}{2})) \\
&= -\frac{1}{4}\sin(3t)+\frac{3}{4}\sin(t).
\end{aligned}$$

Proposition 4.8 *(***Formule de Moivre***) Si $t \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$ alors*

$$\cos(nt)+i\sin(nt) = (\cos(t)+i\sin(t))^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\cos^k(t)\sin^{n-k}(t)i^{n-k}.$$

Exemple 4.2 La formule de Moivre permet de calculer rapidement $\cos(3t)$ et $\sin(3t)$. On a

$$\cos(3t)+i\sin(3t) = \cos^3(t)+3i\cos^2(t)\sin(t)-3\cos(t)\sin^2(t)-i\sin^3(t)$$

et en séparant les parties réelles et imaginaires on trouve

$$\cos(3t) = \cos^3(t)-3\cos(t)\sin^2(t),\ \sin(3t) = 3\cos^2(t)\sin(t)-\sin^3(t)$$

puis en utilisant l'identité $\cos^2+\sin^2 = 1$ on obtient

$$\cos(3t) = 4\cos^3(t)-3\cos(t),\ \sin(3t) = 3\sin(t)-4\sin^3(t) = 4\cos^2(t)\sin(t)-\sin(t).$$

Proposition 4.9 *Soit $z = r\exp(it) \in \mathbf{C}\setminus\{0\}$ et $n \in \mathbf{N}\setminus\{0\}$. L'équation $Z^n = z$ a exactement n solutions complexes, les nombres*

$$z_0 = r^{\frac{1}{n}}e^{\frac{it}{n}},\ldots,z_k = r^{\frac{1}{n}}e^{\frac{i(t+2k\pi)}{n}},\ldots,z_{n-1} = r^{\frac{1}{n}}e^{\frac{i(t+2(n-1)\pi)}{n}}.$$

En particulier l'équation $Z^n = 1$ a exactement n solutions complexes appelées **racines n-èmes de l'unité***. Ceux sont les nombres*

$$u_0 = 1,\ldots,u_k = e^{\frac{i2k\pi}{n}},\ldots,u_{n-1} = e^{\frac{i2(n-1)\pi}{n}}.$$

Proposition 4.10 *L'ensemble $U_n = \{u_0, ..., u_{n-1}\}$ des racines n-èmes de l'unité muni de la multiplication est un groupe commutatif.*

Proposition 4.11 *Les racines n-èmes de l'unité différentes de* 1 *sont les solutions de l'équation*

$$1 + ... + z^k + ... + z^{n-1} = 0.$$

Proposition 4.12

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{i2k\pi}{n}} = 0.$$

Exemples 4.3
- 1 et -1 sont les racines carrées de 1
- $1, j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont les racines cubiques de 1
- $1, i, -1$ et $-i$ sont les racines quatrièmes de 1
- $1, 1 + j = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, j, -1, j^2$ et $1 + j^2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont les racines sixièmes de 1
- $1, \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), i, \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i), -1, \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i), -i$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$ sont les racines huitièmes de 1
- $1, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}, 1 + j, i, j, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}, -1, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}, j^2, -i, -j$ et $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$ sont les racines douzièmes 1

5 Interprétation géométrique

Considérons un **plan affine euclidien et orienté $\mathcal{P}$ muni du repère orthormé direct** $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Au point M de coordonnées (x, y) dans ce repère correspond le complexe $z = x + iy$ qui est appelé **affixe de** M. La **norme** du vecteur $\overrightarrow{OM}$ est égale au module de z : $||\overrightarrow{OM}|| = |z|$. La **mesure algébrique de l'angle orienté** $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$ est égale à un argument de z (si $M \neq O$, ce qui est équivalent à dire si $z \neq 0$). L'identification point/affixe qu'on opère permet de visualiser les complexes ou inversement de résoudre des problèmes de géométrie plane à l'aide de ces nombres.

Le plan $\mathcal{P}$ ainsi indentifié à **C** est appelé **plan complexe**. Le complexe 0 est identifié à l'origine O, le complexe 1 est identifié au point de coordonnées $(1, 0)$ et le complexe i au point $(0, 1)$. L'axe des abscisses est identifié à **R** et celui des ordonnés à i**R**. Enfin, si A et B sont deux points de $\mathcal{P}$ d'affixes a et b on identifie le vecteur $\overrightarrow{AB}$ au complexe $b - a$. La norme $||\overrightarrow{AB}||$ est égale au module $|b - a|$.

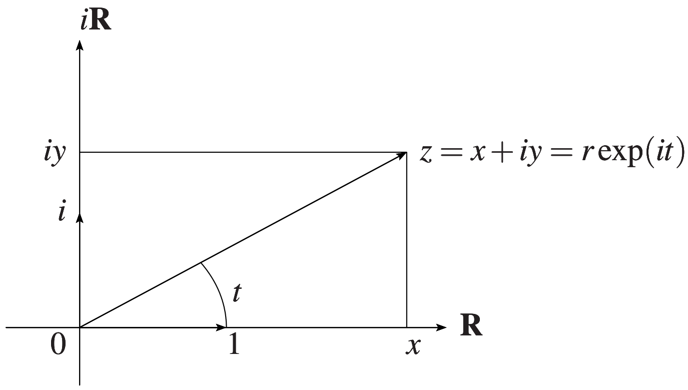


FIG. 49 – Représentation graphique de **C**.

Proposition 5.1 *Si A, B et C sont trois points distincts du plan affine euclidien d'affixes respectifs a, b et c alors la mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ est égale à l'argument du complexe $\dfrac{b-c}{a-c}$.*

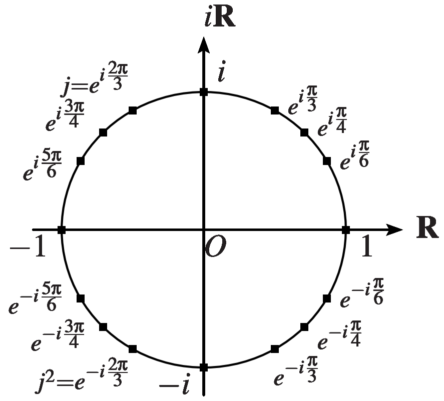


FIG. 50 – Des racines de l'unité.

6 Droites et cercles

Proposition 6.1 *Soit δ une droite du plan $\mathcal{P}$ identifié avec $\mathbf{C}$.*

- *Si $0 \in \delta$ et $r_0 e^{it_0} \in \delta \setminus \{0\}$ alors*
$$\delta = \{z = re^{it_0} | r \in \mathbf{R}\}.$$
- *Si $0 \notin \delta$ il existe $r_0 > 0$ et $t_0 \in \mathbf{R}$ tels que*
$$\delta = \{z = \frac{r_0}{\cos(t)} e^{i(t_0+t)} | t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\} = r_0 e^{it_0} + \mathbf{R} e^{i(t_0+\frac{\pi}{2})}.$$

Le point $z_0 = r_0 e^{it_0}$ est le point de δ le plus proche de l'origine.

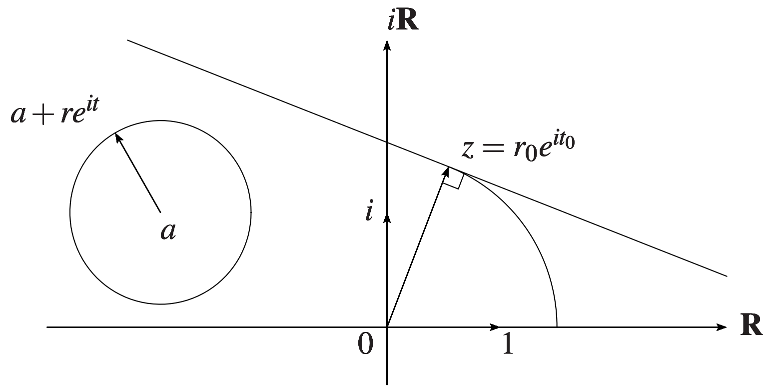


FIG. 51 – Une droite et un cercle dans $\mathbf{C}$

Proposition 6.2 *Soit C un cercle du plan $\mathcal{P}$ identifié avec* $\mathbf{C}$. *Si a est son centre et r son rayon alors*

$$C = \{z \in \mathbf{C} | z - a = r\exp(it), t \in \mathbf{R}\}.$$

Proposition 6.3 *Soit $z_0 = r_0 e^{it_0} \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ et C le cercle qui passe par 0 et z_0 et de centre $\frac{z_0}{2}$. Alors*

$$C = \{z = (r_0 \cos(t)) \exp(i(t_0 + t)) | t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}.$$

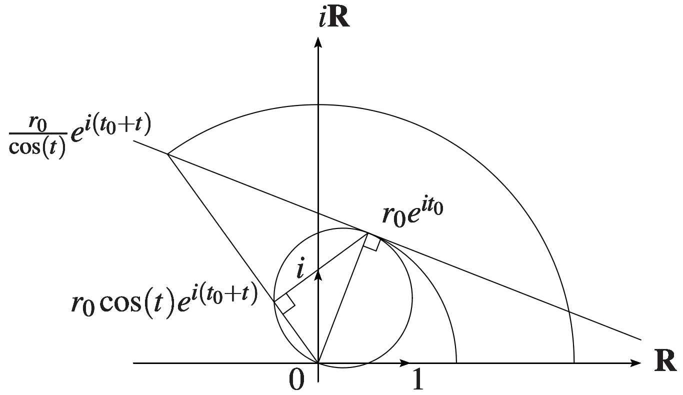


FIG. 52 – Cercle qui passe par 0 et $z_0 = r_0 e^{it_0}$.

Proposition 6.4 *L'image de la droite $x + i\mathbf{R}$ par l'exponentielle est le cercle de centre l'origine et de rayon e^x.*

7 Similitudes planes directes et indirectes, isométries et rotations

Proposition 7.1 *L'ensemble $\mathcal{S}^+$ des applications de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ de la forme $z \mapsto az + b$ avec $a \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ et $c \in \mathbf{C}$ muni de la loi de composition est un groupe. C'est le* **groupe des similitudes planes directes**.

Proposition 7.2 *Les applications de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ de la forme $z \mapsto a\bar{z} + b$ avec $a \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ et $c \in \mathbf{C}$ sont les* **similitudes planes indirectes**. *La composée de deux similitudes planes indirectes est une similitudes plane directe.*

Proposition 7.3 *L'ensemble $\mathcal{S}$ formé de toutes les similitudes planes, directes et indirectes, muni de la la loi de composition des applications, est un groupe,* **le groupe des similitudes planes**.

Proposition 7.4 *Soit $t \in \mathbf{R}, r \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ et $b \in \mathbf{C}$. Alors*
- *L'application $z \mapsto \exp(it)z$ est* **la rotation** *de centre l'origine et d'angle t.*
- *L'application $z \mapsto rz$ est* **l'homothétie** *de centre l'origine et de rapport r.*
- *L'application $z \mapsto b + z$ est* **la translation** *de vecteur b.*
- *Si $t \notin 2\pi\mathbf{Z}$ alors l'application $z \mapsto b + \exp(it)z$ est la rotation de centre $\frac{b}{1-\exp(it)}$ et d'angle t.*
- *Si $r \neq 1$ alors l'application de $z \mapsto b + rz$ est l'homothétie de centre $\frac{b}{1-r}$ et de rapport r.*

Exemple 7.1 Les multiplications par i, j, $1+j$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ correspondent aux rotations d'angles $\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{4}$.

Proposition 7.5
- *La conjugaison $z \mapsto \bar{z}$ est* **la symétrie orthogonale** *(ou* **réflexion***) par rapport à $i\mathbf{R}$.*
- *Soit $t \in \mathbf{R}$, $r \in \mathbf{R}$ et $b = r\exp(i(\frac{t+\pi}{2}))$. L'application $z \mapsto b + \exp(it)\bar{z}$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\frac{b}{2} + \mathbf{R}\exp(i\frac{t}{2})$.*

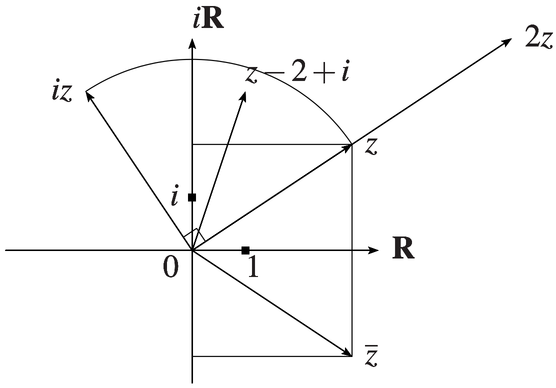


FIG. 53 – $z, 2z, iz, z-2+i$ et $\bar{z}$

Proposition 7.6 *Soient $a = r\exp(it) \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ et $b \in \mathbf{C}$. Alors*
- *La similitude plane directe $z \mapsto b + az = f(z)$ est la composée de la rotation $z \mapsto \exp(it)z = g(z)$ avec l'homothétie $z \mapsto rz = h(z)$ et avec la translation $z \mapsto b + z = t(z)$: $f = t \circ (h \circ g)$. Elle conserve les angles orientés et dilate les distances dans le rapport r.*
- *La similitude plane indirecte $z \mapsto b + a\bar{z} = f(z)$ est la composée de la symétrie orthogonale par rapport l'axe réel $z \mapsto \bar{z} = g(z)$ avec la similitude plane directe $z \mapsto b + az = h(z)$: $f = h \circ g$. Elle change l'orientation, conserve les angles géométriques et dilate les distances dans le rapport r.*

Proposition 7.7
- *Une similitude plane directe qui admet plus de deux points fixes est l'identité. Si elle admet un unique point fixe a elle est de la forme $z \mapsto a + r\exp(it)(z-a)$ avec $r > 0$. Si elle n'admet pas de point fixe c'est une translation.*
- *Une similitude plane indirecte qui possède au moins deux points fixes est une symétrie orthogonale par rapport à une droite. Elle est de la forme $z \mapsto a + \exp(it)\overline{z-a}$. Si elle admet un unique point fixe a elle est de la forme $z \mapsto a + r\exp(it)\overline{z-a}$ avec $r > 0$ et $r \neq 1$. Une similitude plane indirecte qui n'admet pas de point fixe est une* **symétrie glissée**. *Elle est de la forme $z \mapsto a + r\exp(i\frac{t}{2}) + \exp(it)\overline{z-a}$.*

Proposition 7.8
- *La composée $s_{a,t_2} \circ s_{a,t_1}$ des deux réflexions par rapport aux droites concourantes $a + \mathbf{R}\exp(it_1)$ et $a + \mathbf{R}\exp(it_2)$ est la rotation $z \mapsto a + \exp(2i(t_2 - t_1))(z-a)$. La composée $s_{b,t} \circ s_{a,t}$ des deux réflexions par rapport aux droites parallèles $a + \mathbf{R}\exp(it)$ et $b + \mathbf{R}\exp(it)$ est la translation $z \mapsto \mathrm{Re}\left((b-a)\exp(-i(t-\frac{\pi}{2}))\right)\exp(i(t-\frac{\pi}{2})) + z$.*
- *La translation $z \mapsto r\exp(i\frac{t}{2}) + z$ et la réflexion $z \mapsto a + \exp(it)\overline{z-a}$ commutent et leur composée est la symétrie glissée $z \mapsto a + r\exp(i\frac{t}{2}) + \exp(it)\overline{z-a}$.*

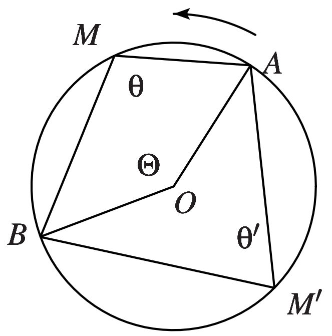
8 Cocyclicité

Proposition 8.1 *Soit $A = \exp(i\alpha), B = \exp(i\beta)$ et $M = \exp(i\mu)$ trois complexes distincts du cercle unité. Alors*

$$\frac{\exp(i\mu) - \exp(i\beta)}{\exp(i\mu) - \exp(i\alpha)} = \frac{\sin(\frac{\mu-\beta}{2})}{\sin(\frac{\mu-\alpha}{2})} \exp\left(i\frac{\beta-\alpha}{2}\right).$$

La version angulaire de cette proposition est le critère de cocyclicité suivant.

Proposition 8.2 *Soit $A = \exp(i\alpha), B = \exp(i\beta)$ et $M = \exp(i\mu)$ trois complexes distincts du cercle unité. Alors le double de la mesure θ de l'angle orienté $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ est indépendante du point M sur le cercle unité et est égale à la mesure Θ de l'angle orienté $(\overrightarrow{0A}, \overrightarrow{0B})$ c'est à dire $\beta - \alpha$.*



$\Theta = 2\theta = 2\theta'$ modulo 2π

FIG. 54 – Points cocycliques

Cet énoncé admet lui même une version complexe :

Proposition 8.3 *Quatre points disnctincts A, B, C et D d'affixes a, b, c et d sont alignés ou sur un même cercle si et seulement si*

$$\frac{c-b}{c-a}\frac{d-a}{d-b} \in \mathbf{R}.$$

Proposition 8.4 *L'image d'une droite (respectivement d'un cercle) par une similitude est une droite (respectivement un cercle).*

Proposition 8.5 *Soient s, u, v, w quatre complexes tels que $sw - uv \neq 0$ et $v \neq 0$. Alors l'application $z \mapsto h(z) = \frac{sz+u}{vz+w}$ (appelée homographie) est une bijection de $\mathbf{C} \setminus \{-\frac{w}{v}\}$ sur $\mathbf{C} \setminus \{\frac{s}{v}\}$. De plus si a, b, c et d sont quatre complexes distincts et appartenant à $\mathbf{C} \setminus \{-\frac{w}{v}\}$ alors*

$$\frac{c-b}{c-a}\frac{d-a}{d-b} = \frac{h(c)-h(b)}{h(c)-h(a)}\frac{h(d)-h(a)}{h(d)-h(b)}$$

Proposition 8.6 *L'image d'un cercle ou d'une droite par une homographie est un cercle ou une droite.*

VI Équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2

1 Position du problème

Certains phénomènes qui dépendent du temps sont modélisés par des relations simples (linéaires ou affines) entre une fonction deux fois dérivable, et ses dérivées. En voici quelques exemples historiques.

Considérons un objet de masse m qui se déplace sur un rail. Sa position en fonction du temps est une fonction $t \mapsto f(t)$. L'hypothèse géniale de Newton (1687) est que l'accélération de cet objet, c'est à dire la dérivée seconde f'', multipliée par la masse de l'objet est égale à la somme F des forces exercées sur l'objet :

$$mf'' = F.$$

FIG. 55 – La loi de Newton

Supposons que le rail soit vertical. La fonction $f(t)$ sera l'altitude de l'objet. Supposons aussi que la seule force qui s'exerce soit le poids $P =$ qui résulte de l'attraction terrestre. Le poids P est proportionnel à m. On a $P = -mg$ où g est une constante qui ne dépend que de la terre, mais pas du temps ni de l'objet. L'équation de Newton devient alors

$$(1) \quad f'' = -g.$$

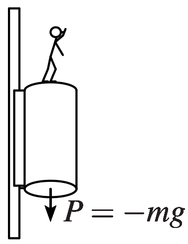


FIG. 56 – Chute d'un corps

On en déduit que si à l'instant $t = 0$ l'objet est en $f(0) = a$ et qu'il a une vitesse de départ égale à $f'(t) = v$, alors $f'(t) = v - gt$ et $f(t) = a + vt - \frac{1}{2}gt^2$.

Supposons maintenant que le rail soit horizontal et que la seule force qui s'exerce soit une force de rappel d'un ressort, proportionnelle à la distance à la position du ressort au repos. Il existe donc une constante $K >$ telle que si on prend comme origine de la droite la position de repos alors

$$(2) \quad Kf + mf'' = 0.$$

C'est le modèle physique de l'oscillateur harmonique.

FIG. 57 – Oscillateur harmonique

Le démographe et économiste Malthus (1798) considère que l'évolution en fonction du temps d'une population qui se développe se modélise de la façon suivante. La population est représentée par une fonction dérivable du temps $t \mapsto f(t)$. La dérivée f' représente la vitesse d'évolution de cette population. L'hypothèse de Malthus est qu'il existe une constante $k > 0$ telle que

$$(3) \quad kf - f' = 0.$$

Ceci signifie que la vitesse de croissance de la population est supposée proportionnelle à la taille de la population.

Selon les physiciens Rutherford et Soddy (1902) la vitesse à laquelle les atomes se désintègrent est aussi proportionnelle à la quantité d'atomes non désintégrés. Il existe une constante $\lambda > 0$ tel que si $t \mapsto f(t)$ représente les atomes non désintégrés en fonction du temps alors

$$(4) \quad \lambda f + f' = 0.$$

Un circuit RLC est un circuit éléctrique fermé constitué d'une résistance parfaite R, d'une bobine parfaite L et d'un condensateur parfait C, le tout monté en série aux bornes d'un générateur de tension E. On suppose que les éléments caractéristiques R, L et C ne dépendent pas du temps mais que $t \mapsto E(t)$ est une fonction du temps. On désigne par $t \mapsto I(t)$ l'intensité électrique du circuit en fonction du temps.

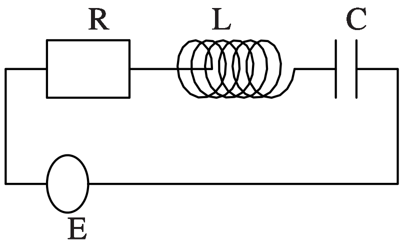


FIG. 58 – Un circuit RLC

Selon Ohm (1825), la tension aux bornes de la résistance est $U_R(t) = RI(t)$. Selon Faraday (1831), la tension aux bornes de la bobine est $U_L = LI'(t)$. La charge du condensateur est égale à $CU_C(t)$ où $U_C(t)$ désigne la tension à ces bornes et selon Ampère (1827) l'intensité du circuit est égale à la dérivée de la charge du condensateur : $I(t) = CU_C'(t)$ et donc $I'(t) = CU_C''(t)$. Enfin d'apès la loi de Kirchhoff (1845), la somme des tensions des trois composants est égale à la tension du générateur. Ainsi si on pose $U_C = f$ on obtient :

$$(5) \quad f(t) + RCf'(t) + LCf''(t) = E(t).$$

Les cinq exemples ci-dessus ont une certaine unité formelle. Ils rentrent tous dans la famille des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2. Ils admettent des traitements mathématiques similaires.

Définition 1.1 – Soient a, b, c trois réels non tous nuls et soit $g : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur un intervalle I. **Résoudre l'équation différentielle linéaire à coefficients constants**

$$(*) \quad af'' + bf' + cf = g$$

consiste à rechercher toutes les fonctions $f : I \to \mathbf{R}$ et deux fois dérivables qui vérifient $(*)$. De telles fonctions sont appelées **solutions de** $(*)$.

– Si $a \neq 0$ l'équation différentielle $(*)$ est dite **du second ordre** et l'équation algébrique

$$az^2 + bz + c = 0$$

s'appelle **équation caractéristque** de $(*)$.

– Si $a = 0$ et $b \neq 0$ elle est dite **du premier ordre**. Enfin si $a = b = 0$ l'équation différentielle $(*)$ est dite **d'ordre** 0.

– Si $g = 0$ l'équation différentielle $(*)$ est dite **homogène**, sinon elle est dite **avec second membre**.

– L'équation différentielle

$$(*)^h \quad af'' + bf' + cf = 0$$

est appelée **équation différentielle homogène associée à** $(*)$**.**

– Fixons $t_0 \in I$. Les **conditions initiales** vérifiées par une solution f de $(*)$ à t_0 sont la position $f(t_0)$ en t_0 si $(*)$ est du premier ordre et le couple (position, vitesse) à t_0 c'est à dire $(f(t_0), f'(t_0))$ si $(*)$ est du deuxième ordre.

Proposition 1.1 *Soit*

$$(*) \quad cf = g$$

d'odre 0. *La solution de* $(*)$ *est* $\frac{g}{c}$.

Proposition 1.2 *Soit*

$$(*) \quad bf' = g$$

d'odre 1. *Les solutions de* $(*)$ *sont les primitives de* $\frac{g}{b}$.

Ceci ramenène la résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 1 dans lesquelles seule la dérivée de f intervient à la recherche de primitives.

Proposition 1.3 *Si* $(*)$ *est homogène et si* f_1, f_2 *sont des solutions de* $(*)$ *et* $\lambda \in \mathbf{R}$ *alors* λf_1 *et* $f_1 + f_2$ *sont encore solutions. De plus la fonction nulle est solution de* $(*)$.

Proposition 1.4 *Si* f_1 *et* f_2 *sont solutions d'une équation différentielle linéaire avec second membre alors la différence* $f_1 - f_2$ *est solution de l'équation homogène associée.*

2 Résolution de l'équation homogène

Lemme 2.1 *Soit $t_0 \in \mathbf{R}$. L'équation différentielle $bf' + cf = 0$, homogène d'ordre 1, admet une seule solution qui s'annule en t_0 : la fonction nulle.*

Proposition 2.1 (**équation homogène d'ordre 1**) *Les solutions de l'équation différentielle*

$$bf' + cf = 0$$

sont les fonctions

$$t \mapsto \lambda \exp(-\frac{c}{b}t) \text{ avec } \lambda \in \mathbf{R}.$$

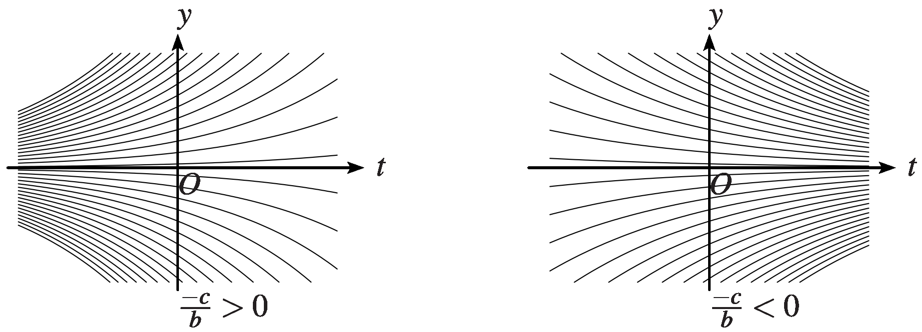


FIG. 59 – Comportement des solutions de $bf' + cf = 0$ suivant le signe de $-c/b$

On déduit de cette proposition le résultat suivant.

Proposition 2.2 *Soit t_0 et $x_0 \in \mathbf{R}$. Il existe une et une seule solution f de l'équation différentielle $bf' + cf = 0$ qui vérifie $f(t_0) = x_0$.*

Ce résultat est vrai aussi dans le cas où $b = 1$ et c est une fonction continue de t :

Proposition 2.3 *Soit t_0 et $x_0 \in \mathbf{R}$, $c(t)$ une fonction continue sur $\mathbf{R}$. Il existe une et une seule solution f de l'équation différentielle $f'(t) + c(t)f(t) = 0$ qui vérifie $f(t_0) = x_0$.*
Cette solution est la fonction

$$t \mapsto x_0 \exp(-\int_{t_0}^{t} c(s)ds).$$

Supposons $(*)$ homogène d'ordre 2. Pour résoudre cette équation différentielle on discute en fonction du nombre et de la nature des racines de l'**équation caractéristque**

$$az^2 + bz + c = 0.$$

On considère donc le signe de son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

Lemme 2.2 *Soit $t_0 \in \mathbf{R}$. L'équation différentielle $af'' + bf' + cf = 0$, homogène d'ordre 2, admet une seule solution qui s'annule ainsi que sa dérivée en t_0 : la fonction nulle.*

Proposition 2.4 *(***équation homogène d'ordre 2 avec** $\Delta > 0$*) Supposons que* $(*)$ *soit homogène d'ordre* 2 *et que les racines* u_1 *et* u_2 *de l'équation caractéristique* $az^2 + bz + c = 0$ *soient deux réels distincts. Alors les solutions de*

$$(*) \quad af'' + bf' + cf = 0$$

sont les fonctions

$$t \mapsto \lambda_1 \exp(u_1 t) + \lambda_2 \exp(u_2 t) \text{ avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}.$$

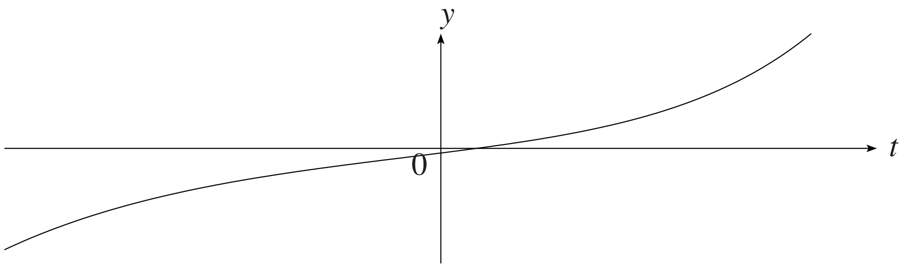


FIG. 60 – Une solution de l'équation différentielle $f'' - f' - 2f = 0$

Proposition 2.5 *(***équation homogène d'ordre 2 avec** $\Delta = 0$*) Supposons que* $(*)$ *soit homogène d'ordre* 2 *et que l'équation caractéristique* $az^2 + bz + c$ *possède une racine double réelle* u*. Alors les solutions de*

$$(*) \quad af'' + bf' + cf = 0$$

sont les fonctions

$$t \mapsto \lambda_1 \exp(ut) + \lambda_2 t \exp(ut) \text{ avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}.$$

Proposition 2.6 *(***équation homogène d'ordre 2 avec** $\Delta < 0$*) Supposons que* $(*)$ *soit homogène d'ordre* 2 *et que les racines* u_1 *et* u_2 *de l'équation caractéristique* $az^2 + bz + c$ *ne soient pas réelles : il existe* $r \in \mathbf{R}$ *et* $\omega \in \mathbf{R}$ *tels que* $u_1 = r + i\omega$ *et* $u_2 = r - i\omega$*. Alors les solutions de*

$$(*) \quad af'' + bf' + cf = 0$$

sont les fonctions

$$t \mapsto \lambda_1 \exp(rt) \cos(\omega t) + \lambda_2 \exp(rt) \sin(\omega t) \text{ avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}.$$

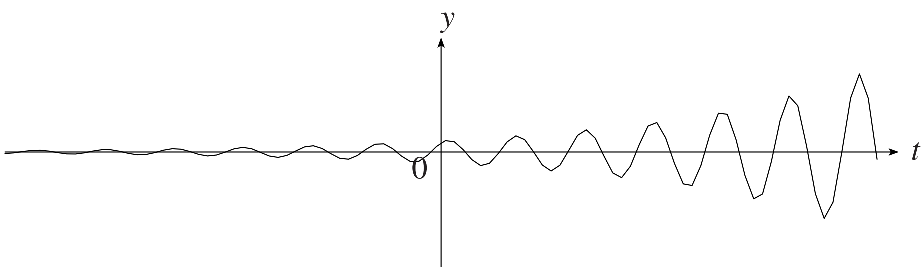


FIG. 61 – Une solution de l'équation différentielle $f'' - 2f' + 2f = 0$

On déduit de ces propositions le résultat suivant.

Proposition 2.7 *Soit t_0, x_0 et $v_0 \in \mathbf{R}$. Il existe une et une seule solution f de l'équation différentielle $af'' + bf' + cf = 0$ qui vérifie $f(t_0) = x_0$ et $f'(t_0) = v_0$.*

3 Recherche d'une solution particulière

Il reste à trouver une solution **particulière** de l'équation différentielle $(*)$. Les autres s'en déduisent par addition de solutions de l'équation homogène. Nous le ferons en toute généralité seulement pour les équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1.

Proposition 3.1 (**équation différentielle d'ordre 1**) *Une solution particulière de l'équation différentielle*

$$bf' + cf = g$$

est la fonction

$$t \mapsto \exp\left(-\frac{c}{b}t\right) \int_{t_0}^{t} \frac{1}{b} g(u) \exp\left(\frac{c}{b}u\right) du \ \text{ avec } \ t_0 \ \text{ dans l'intervalle } \ I.$$

Exemples 3.1 – Les solutions de $f' + f = 0$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda \exp(-t)$.

– Une solution particulière de l'équation $f' + f = t$ est la fonction

$$t \mapsto \exp(-t) \int_0^t u \exp(u) du,$$

c'est à dire la fonction $t - 1 + \exp(-t)$.

– L'équation différentielle $f' + f = \frac{1}{t}$ s'appelle équation d'Euler. Une solution particulière de cette équation définie sur $]0, +\infty)$ est la fonction

$$t \mapsto \exp(-t) \int_1^t \frac{1}{u} \exp(u) du.$$

Proposition 3.2 (**équation différentielle d'ordre 2 avec second membre particulier**) *On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 2*

$$(*) \quad af'' + bf' + cf = g$$

où g est une fonction de la forme

$$g(t) = P(t) \exp(vt) \cos(wt + \phi)$$

où P est un polynôme de degré p. Alors $(*)$ admet une solution particulière sous la forme

$$t \mapsto Q(t) \exp(vt) \cos(wt + \psi)$$

où Q est un polynôme de degré au plus $p + 2$. Plus précisément et on note u_1 et u_2 les racines de l'équation caractéristique $az^2 + bz + c = 0$.

– *Si $v + iw$ est différent des racines u_1 et u_2 alors le degré de Q peut être choisi égal à p.*
– *Si $v + iw = u_1$ et $u_1 \neq u_2$ le degré de Q peut-être choisi égal à $p + 1$.*
– *Si $v + iw = u_1 = u_2$ le degré de Q peut-être choisi égal à $p + 2$.*

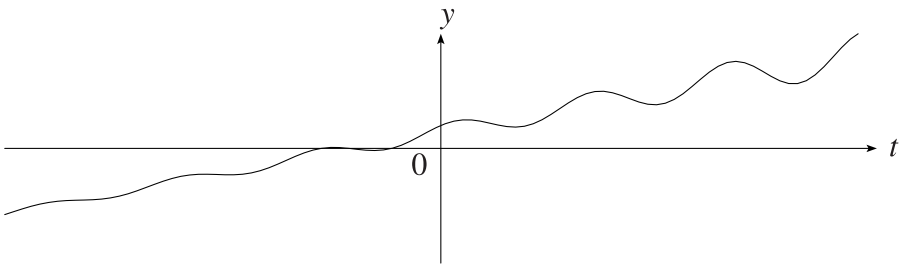


FIG. 62 – Une solution de l'équation différentielle $f'' - 2f' + 2f = t + 1$

Exemples 3.2 – Les solutions de $f'' - 2f' + f = 0$ sont les combinaisons linéaires des fonctions $\exp(t)$ et $t\exp(t)$. Le polynôme $t^2 + 4t + 6$ est une solution particulière de $f'' - 2f' + f = t^2$, $\cos(t)$ est solution particulière de $f'' - 2f' + f = 2\sin(t)$, $\exp(2t)$ est une solution particulière de $f'' - 2f' + f = \exp(2t)$ et $t^2\exp(t)$ est solution particulière de $f'' - 2f' + f = 2\exp(t)$.

– Les solutions $f'' - 2f' + 2f = 0$ sont les combinaisons linéaires des fonctions $\exp(t)\cos(t)$ et $\exp(t)\sin(t)$. La fonction $\frac{t}{2} + 1$ est une solution particulière de l'équation différentielle $f'' - 2f' + 2f = t + 1$. La fonction $\frac{t}{2} + 1 + \exp(t)\sin(t)$ en est une autre.

Proposition 3.3 Superposition des solutions *On considère deux équations différentielles linéaires d'ordre au plus 2*

$$(*_1) \quad af'' + bf' + cf = g_1$$

et

$$(*_2) \quad af'' + bf' + cf = g_2$$

associées à la même équation homogène

$$(*)^h \quad af'' + bf' + cf = 0$$

mais avec des seconds membres g_1 et g_2 qui peuvent être différents. Si f_1 est une solution de $(*_1)$ et f_2 une soultion de $(*_2)$ alors $f_1 + f_2$ est une solution de l'équation différentielle

$$af'' + bf' + cf = g_1 + g_2.$$

Exemple 3.3 Puisque $\cos(t)$ est solution particulière de $f'' - 2f' + f = 2\sin(t)$ et que et $t^2\exp(t)$ est solution particulière de $f'' - 2f' + f = 2\exp(t)$ on en déduit que $\cos(t) + t^2\exp(t)$ est une solution particulière de $f'' - 2f' + f = 2\sin(t) + 2\exp(t)$.