UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Mathématiques 1 pour ISTIC

Examen (durée 2 heures).
19 décembre 2017
Documents, téléphones et calculatrices sont interdits.
Le barême est donné à titre indicatif

Exercice 1 (3 pts)

Evaluer en justifiant les limites suivantes :

$$a) \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x-1},$$

Réponse : (1 pt)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|}{x} \frac{\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}{1-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}{1-\frac{1}{x}} = -1.$$

$$b) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x-1}$$

Réponse : (1 pt)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

$$c) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(2x)}{3x^2+1}.$$

Réponse : (1 pt)

$$\frac{-1}{3x^2+1} \le \frac{\sin(2x)}{3x^2+1} \le \frac{1}{3x^2+1}$$

avec

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{3x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3x^2+1} = 0.$$

D'après le théorème d'encadrement des gendarmes, la limite demandée existe et

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(2x)}{3x^2+1} = 0.$$

Exercice 2 (5 pts)

1. (a) *Montrer que*

$$\int_1^2 \frac{1}{(1-e^x)}dx = \int_e^{e^2} \frac{1}{y(1-y)}dy.$$

Réponse : (1 pt)
On fait le changement de variable : $y = e^x$, $dy = e^x dx$ avec $e^x > 0$, $\forall x \in [1,2]$. Alors : $dy = ydx$ et

$$\int_1^2 \frac{1}{(1-e^x)}dx = \int_e^{e^2} \frac{y^{-1}}{(1-y)}dy = \int_e^{e^2} \frac{1}{y(1-y)}dy.$$

(b) *Déterminer $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ pour avoir :*

$$\frac{1}{y(1-y)} = \frac{a}{y} + \frac{b}{1-y}.$$

Réponse : (1 pt)
Par identification :

$$\frac{a}{y} + \frac{b}{1-y} = \frac{(-a+b)y+a}{y(1-y)}$$

conduit au système : $-a+b=0$, $a=1$, i.e. :

$$a = b = 1.$$

(c) *Calculer :*

$$\int_1^2 \frac{1}{(1-e^x)}dx.$$

Réponse : (1 pt)
De (a) et (b) on déduit successivement :

$$\int_1^2 \frac{1}{(1-e^x)}dx = \int_e^{e^2} \frac{1}{y(1-y)}dy = \int_e^{e^2} \frac{1}{y}dy + \int_e^{e^2} \frac{1}{(1-y)}dy =$$

$$= [\ln|y| - \ln|1-y|]_e^{e^2} = 1 - \ln\frac{e^2-1}{e-1} = 1 - \ln(e+1)$$

2. *Calculer :*

$$\int_1^2 \ln(x)dx.$$

Indication : On pourra utiliser la méthode d'intégration par parties.
Réponse : (2 pts)
On intègre par parties en posant : (1 pt)

$$U = \ln(x), \quad V' = 1$$

$$U' = \frac{1}{x}, \qquad V = x$$

ce qui donne : (1 pt)

$$\int_1^2 \ln(x)dx = [x\ln(x)]_1^2 - \int_1^2 dx = 2\ln(2) - 1.$$

Exercice 3 (4pts)

1. *Effectuer la division euclidienne de* $A(X) = X^3 + X^2 + 2X - 4$ *par* $B(X) = X^2+2X+4$. *En déduire la factorisation de* $A(X)$ *dans* $\mathbb{R}[X]$.
Réponse : (2 pts)
La division euclidienne de $A(X)$ par $B(X)$ s'écrit : (1 pt)

$$A(X) = (X-1)B(X).$$

Comme $B(X)$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$, c'est aussi la factorisation de $A(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$. (1 pt)

2. *Calculer les racines de* $A(X)$ *dans* $\mathbb{C}$. *En déduire la factorisation de* $A(X)$ *dans* $\mathbb{C}[X]$.
Réponse : (2 pts)

Le discriminant de $B(X)$ est $\Delta = 4 - 16 = -12 < 0$. Donc les racines de $B(X)$ sont : $-1 \pm i\sqrt{3}$. On en déduit que les racines de $A(X)$ dans $\mathbb{C}$ sont : (1 pt)

$$1, \quad -1 \pm i\sqrt{3}$$

et que $A(X)$ se factorise dans $\mathbb{C}[X]$ sous la forme : (1 pt)

$$A(X) = (X-1)(X+1-i\sqrt{3})(X+1+i\sqrt{3})$$

Exercice 4 (10 pts)

L'objectif de cet exercice est l'étude de la fonction f définie par la formule :

$$f(x) = \sqrt{(x+1)|x-3|} = \begin{cases} \sqrt{(x+1)(-x+3)} & \text{si} \quad x \leq 3 \\ \sqrt{(x+1)(x-3)} & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

1. *Calculer $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$.*
   Réponse : (2 pts)
$$f(-1) = 0, \quad (0,5 \text{ pt})$$
$$f(0) = \sqrt{|-3|} = \sqrt{3}, \quad (0,5 \text{ pt})$$
$$f(1) = \sqrt{2 \times |-2|} = \sqrt{2 \times 2} = 2, \quad (0,5 \text{ pt})$$
$$f(3) = 0. \quad (0,5 \text{ pt})$$

2. *Déterminer le domaine de définition de f.*
   Réponse : (1 pt)
$$x \in \mathcal{D}_f \iff x+1 \geq 0 \iff x \geq -1 \quad (0,5 \text{ pt})$$
   i.e. :
$$\mathcal{D}_f = [-1, +\infty[. \quad (0,5 \text{ pt})$$

3. *Etudier le signe de $f'(x)$ sur $]-1,3[\cup]3,+\infty[$. On distinguera les cas $x < 3$ et $x > 3$.*
   Réponse : (1 pt)

Le calcul donne :

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-x+1}{\sqrt{-x^2+2x+3}} & \text{si} \quad x < 3, \\ \\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases} \qquad (0,5 \text{ pt})$$

Donc $f'(x)$ est du signe de $-x+1$ si $x < 3$, du signe de $x-1$ si $x > 3$, i.e :

$$f'(x) < 0 \iff -1 < x < 1.$$

$$f'(x) > 0 \iff x < -1 \quad \text{ou} \quad x > 1. \quad (0,5 \text{ pt})$$

4. *Montrer que f admet une tangente horizontale en un point dont on précisera les coordonnées.*
   Réponse : (1 pt)
   D'après 3),
   $$f'(x) = 0 \iff x = 1 \quad (0,5 \text{ pt})$$
   donc f admet une tangente horizontale au point de coordonnées $(1, 2)$. $\quad (0,5$ pt$)$
5. *Dresser le tableau de variations de f.*
   Réponse : (1 pt)
   $$0 \nearrow 2 \searrow 0 \nearrow +\infty$$
   dans
   $$[-1, 1], \quad [1, 3], \quad [3, +\infty[\quad \text{resp.}$$
6. *Déterminer les limites de f au bord de son domaine de définition.*
   Réponse : (1 pt)

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1) = 0 \quad \text{car } f \text{ est continue à droite de } -1 \quad (0,5 \text{ pt})$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} |x| \sqrt{1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty. \quad (0,5 \text{ pt})$$

7. *Montrer que*
$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x+1)=0.$$
Réponse : (1 pt)
On a : $\forall x>0$,
$$f(x)-x+1=\frac{(x^2-2x-3)-(x-1)^2}{\sqrt{x^2-2x-3}+x-1}=\frac{-4}{\sqrt{x^2-2x-3}+x-1}\ (0,5\text{ pt})$$
donc
$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x+1)=\frac{-4}{+\infty}=0.\quad(0,5\text{ pt})$$
8. *En déduire que f admet une asymptote oblique quand $x\to+\infty$ dont on précisera l'équation.*
Réponse : (1 pt)
On en déduit que f admet la droite d'équation
$$y=x-1$$
pour asymptote oblique quand $x\to+\infty$.
9. *Tracer le graphe de f en y plaçant la tangente horizontale de la question 5. Sur la même figure tracer l'asymptote oblique de la question 9.* (1 pt)

Exercice 5 (3 pts)

On tire simultanément 12 cartes d'un jeu de 32 cartes.

1. *Combien y a-t-il de mains de 12 cartes dans un jeu de 32 cartes ?*
Réponse : (1 pt)
$$C_{32}^{12}$$
2. (a) *Combien de ces mains contiennent exactement une dame ?*
Réponse : (1 pt)
$$4C_{28}^{11}$$
(b) *Quelle est la probabilité de tirer exactement une dame ?*
Réponse : (1 pt)
$$\frac{4C_{28}^{11}}{C_{32}^{12}}$$

3. *Quelle est la probabilité de tirer les 4 dames ?*
   Réponse : (1 pt)

$$\frac{C_{28}^{8}}{C_{32}^{12}}$$