Université de Rennes 1 | Licence MIEE, Première année
Analyse (S1 ANA) | année 2016-2017

Examen terminal

Documents, notes de cours ou de TD, calculatrices et téléphones portables sont interdits.
Une rédaction soignée est attendue. Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1 *Racines et division euclidienne*

a) Déterminer les racines du polynôme $Q(X) := X^3 + 5X^2 + 9X + 5$.
Indice : on pourra commencer par chercher une racine réelle évidente.

b) Effectuer la division euclidienne de $P(X) := X^5 + 5X^4 + 10X^3 + 10X^2 + 9X + 5$ par Q.

c) En déduire la factorisation sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$ du polynôme P.

Exercice 2 *Limites*
Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x} + e^x - 1}{x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{2x^3 - x^{5/2} - x}{(x+1)(x^2+1)}\right).$$

Exercice 3 *Étude de fonction*
L'objet de l'exercice est l'étude de la fonction f définie par la formule $f(x) := \sqrt{x^2 - 2\ln(x)}$.

a) Donner le domaine de définition de la fonction $g(x) := x^2 - 2\ln(x)$ puis dresser son tableau de variation.

b) En déduire le domaine de définition de la fonction f.

c) Calculer la dérivée f'. La fonction f admet-elle des tangentes horizontales ?

d) Déterminer la limite lorsque x tend vers plus l'infini du rapport $f(x)/x$.

e) Calculer la limite de $f(x) - x$ en l'infini et en déduire que f admet une asymptote oblique en l'infini dont on précisera l'équation.

Exercice 4 *Calcul d'aire*

a) Déterminer deux constantes a et b telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{\pm 2\}$

$$\frac{1}{4-x^2} = \frac{a}{2-x} + \frac{b}{2+x}.$$

b) En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{4-\cos(x)^2}dx.$$

Exercice 5 *Primitive et équation différentielle d'ordre 1*

a) Via une intégration par parties, déterminer une primitive de la fonction $f(x) = x\sin(x)$.

b) À l'aide de la méthode de variation de la constante, en déduire la solution de l'équation

$$y'(x) + x\,y(x) = x\sin(x)e^{-x^2/2}, \qquad (E)$$

telle que $y(0) = 1$.

Exercice 6 *Équation différentielle d'ordre 2*

a) Déterminer la forme générale des solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) + 4y'(x) + 5y(x) = 0. \qquad (E)$$

b) Déterminer la solution de (E) qui vérifie les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$.