Université de Rennes 1 — Année 2015–2016

Module ANA

Examen Terminal

17 décembre 2015, 14h – 16h

Documents, notes de cours ou de TD, calculatrices et téléphones portables sont interdits.
Une rédaction soignée est attendue. Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1 Trouver toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation

$$z^2 + (4+2i)z + 8i = 0$$

Exercice 2 Calculer les limites suivantes (si elles existent).

(a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+x\cdot\cos(x)}{2x^2+1}$.

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{\sin^2(x)}$.

Exercice 3 Dans cet exercice vous pouvez admettre sans démonstration que pour tout nombre réel x on a $\exp(x) - x > 0$. Soit f la fonction définie par la formule

$$f(x) = \ln(\exp(x) - x)$$

(a) Déterminer le domaine de définition de f.

(b) Calculer la dérivée f' de f, et étudier son signe.

(c) Déterminer la direction asymptotique de f pour $x \to -\infty$. Déterminer aussi la limite $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ (si elle existe).

(d) Démontrer qu'en $+\infty$ la fonction a une asymptote d'équation $y = x$.

(e) Résumer ces résultats dans un tableau de variations. Dessiner aussi le graphe de la fonction f.

Exercice 4

(a) En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives de la fonction donnée par la formule $x \cdot \cos(2x)$.

(b) Calculer l'intégrale

$$\int_1^e \frac{1}{x\cdot(1+\ln^2(x))}\,dx$$

Exercice 5 Regardons l'équation différentielle

$$u'' - 5u' + 6u = e^x$$

(a) Trouver toutes les solutions de cette équation différentielle.

(b) Exhiber une solution satisfaisant les conditions initiales $u(0) = \frac{1}{2}$ et $u'(0) = -\frac{1}{2}$. Y a-t-il unicité d'une telle solution ?