Examen : session principale

Durée : 2 heures

1. On considère le polynôme

$$P(z) = z^3 - (i+2)z^2 + (2+2i)z - 2i.$$

1. Trouver la racine imaginaire pur de P (de la forme $z = ia, a \in \mathbb{R}$).
2. Effectuer la division euclidienne de P par $z - i$.
3. En déduire toutes les racines de P et sa factorisation dans $\mathbb{C}$.
4. Mettre toutes les racines sous formes trigonométrique et exponentielle.

2. On définit la fonction f par

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 5}{(x+1)^2}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Calculer les limites de f quand $x \to (-1)^+$ et quand $x \to (-1)^-$. Déterminer alors l'équation de l'asymptote à la courbe de f en $x = -1$.
3. Calculer les limites de f en $\pm\infty$.
4. Montrer alors que la droite d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$.
5. Déterminer le domaine de dérivabilité de f et montrer que
$$f'(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + x - 5}{(x+1)^3}.$$
6. Soit $Q(x) = x^3 + 3x^2 + x - 5$. Vérifier que $Q(1) = 0$ et effectuer la division euclidienne de Q par $x - 1$.
7. En déduire f' a le même signe que
$$\frac{(x-1)}{(x+1)},$$
et tracer le tableau de variation de f.
8. Calculer l'intégrale
$$\int_0^1 f(x)dx.$$

3.

1. Trouver une primitive sur $]1, \infty[$ de la fonction
$$x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$$
2. Résoudre sur $]1, \infty[$ l'équation différentielle
$$x\ln(x)y' - y = \ln(x), \quad y(e) = 1.$$
3. Trouver la solution de l'équation différentielle
$$y'' - 6y' + 9 = 0, \quad y'(1) = 1, y''(1) = 0.$$