Université de Rennes 1 — Année 2018-2019
ISTIC — MAT1 (Licence 1)

Chapitre 1 : Les nombres complexes

Forme algébrique, trigonométrique, et exponentielle

Exercice 1.1. Donner la forme algébrique des complexes suivants

$$\text{(a)}\ z_1 = (2+i)^4; \qquad \text{(b)}\ z_3 = \frac{1-3i}{1-i} - \frac{5-5i}{1+2i}$$

Exercice 1.2. (a) Donner le module et un argument de $1+i$.

(b) Donner le module et un argument de $(1+i)^5$.

(c) En déduire la forme algébrique de $(1+i)^5$.

(d) Quelle est la forme algébrique de $(1-i)^5$?

Exercice 1.3. Donner la forme exponentielle de

$$\text{(a)}\ z = 1 - i\sqrt{3}; \quad \text{(b)}\ z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{(c)}\ z = -\sqrt{3} + 3i;$$

Exercice 1.4. Donner la forme exponentielle des nombres complexes suivantes

$$\text{(a)}\ (4+4i)^2; \qquad \text{(b)}\ (4+4i)(1-i\sqrt{3}); \qquad \text{(c)}\ z = \frac{2}{1-i}; \qquad \text{(d)}\ \frac{4+4i}{1-i\sqrt{3}}$$

Exercice 1.5. (a) Donner la forme exponentielle de $1+i$ et de $i-1$.

(b) Donner la forme exponentielle de

$$z = \frac{(1+i)^{19}}{(i-1)^{11}}.$$

(c) Donner la forme algébrique de z.

Représentation graphique

Exercice 1.6. Représenter dans le plan complexe l'ensemble des points M, d'affixe z tel que

(a) $z = -2$, (b) $z = 5i$, (c) $z = 2+2i$, (d) $z = 2-2i$, (e) $z = -2-2i$,

et en déduire la forme exponentielle de z.

Exercice 1.7. Soit $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

(a) Déterminer la forme exponentielle de $\bar{z}$, $\frac{1}{z}$ et de $-z$.

(b) Représenter dans le même graphique les points d'affixe z, $\bar{z}$, $-z$, iz et $\frac{1}{z}$

Exercice 1.8. Représenter dans le plan complexe, l'ensemble des points M, d'affixe z tels que :

(a) $|z| = 2$ (b) $\mathrm{Re}(z) = -1$ (c) $|z| = 2$ et $\arg(z) \in [\frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}]$ (d) $|z| = 2$ et $\mathrm{Im}(z) = 1$

Exercice 1.9. Quel est l'ensemble des complexes z tels que z, $\frac{1}{z}$ et $1-z$ ont le même module ?

Exercice 1.10. Représenter dans le plan complexe, l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la condition donnée :

(a) $|z-3| = |z-(1+2i)|$ (b) $|z-3| < |z-(1+2i)|$ (c) $|z+3-i| \leqslant 2$ (d) $|z-2+i| = \sqrt{5}$

Linéarisation

Exercice 1.11. Linéariser :

(a) $\sin^3 x$; (b) $\cos^2(3x)\sin(5x)$.

Racines carrées

Exercice 1.12. Déterminer les racines carrées de $z = 1 + i\sqrt{3}$ de deux manières différentes :

(a) sous forme algébrique ;

(b) sous forme exponentielle après avoir cherché la forme exponentielle de z.

Exercice 1.13. Déterminer les racines carrées de

(a) $-11 + 60i$; (b) $1 + 4\sqrt{5}i$;

Équations du second degré

Exercice 1.14. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

(a) $(z-2-i)(z-3+i) = 0$; (b) $2z^2 - 6z + 5 = 0$;

(c) $z^2 - (3+4i)z - 1 + 5i = 0$; (d) $z^2 + (2+i)z - 1 + 7i$ (Rappel : $\sqrt{625} = 25$) ;

Calcul de racines n-ièmes

Exercice 1.15. Déterminer des racines sous forme exponentielle.

(a) Déterminer les racines 3-ièmes de $1+i$.

(b) Déterminer les racines 4-ièmes de $4i$ et représentez-les dans le plan complexe.

(c) Déterminer les racines 6-ièmes de $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$.

Applications en électronique

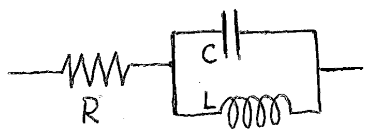


FIGURE 1

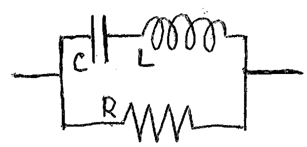


FIGURE 2

Exercice 1.16. L'*impédance électrique* mesure l'opposition d'un circuit électrique au passage d'un courant alternatif sinusoidal – c.à.d., à un courant de la forme $I(t) = \sin(2\pi\omega t)$, où ω s'appelle la *pulsation*, et $2\pi\omega$ s'appelle la *fréquence*. L'impédance est un nombre complexe. Nous considérons le circuit de la Figure 1 ci-dessus, alimenté par un courant sinusoïdal. Ici R désigne une résistance, C un condensateur et L une bobine.

- Si deux éléments d'un circuit sont d'impédance Z_A et Z_B, et je veux calculer l'impédance totale Z du circuit. Si les deux éléments sont en série, alors les impédances complexes s'additionnent
$$Z = Z_A + Z_B.$$
En revanche, s'ils sont en parallèle, alors ce sont les *admittances* qui s'additionnent : $\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B}$, donc
$$Z = \frac{1}{\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B}}.$$
- L'impédance d'un condensateur est donnée par $Z_C = \frac{1}{iC\omega}$, où C est la capacité (en Farad) du condensateur.
- L'impédance d'une bobine est donnée par $Z_L = iL\omega$, où L est l'inductance (en Henry) de la bobine.
- L'impédance d'une résistance est donnée par $Z_R = R$ où R est la résistance (en Ohm).

(a) Montrer que l'impédance complexe du circuit ci-dessus est de $Z_{circuit} = R - i\frac{L\omega}{LC\omega^2-1}$

(b) Pour quelle pulsation ω le courant I est-il nul ? (Intuitivement, ceci arrive quand $|Z_{circuit}|$ est "infiniment grand".)

Exercice 1.17. Regardons le circuit de la Figure 2, alimenté par un courant sinusoidal.

(a) Montrer que l'impédance complexe de ce circuit est de $\frac{R(LC\omega^2-1)}{(LC\omega^2-1)-iRC\omega}$.

(b) Pour quelle pulsation ω l'impédance est-elle nulle ?

COMPLÉMENTS

Forme algébrique et trigonométrique

Exercice 1.18. Pour tout complexe z, on pose
$$P(z) = z^3 + (-4+i)z^2 + (13-4i)z + 13i$$
Écrire la forme algébrique de $P(i)$, de $P(-i)$, de $P(2-3i)$.

Forme exponentielle d'un nombre complexe

Exercice 1.19. (a) Déterminer la forme exponentielle de $\sqrt{3}-i$ et de $-1+i$.

(b) Déteminer la forme exponentielle de

$$z = \frac{(\sqrt{3}-i)^{13}}{(-1+i)^{18}}.$$

(c) Donner la forme algébrique de z.

Exercice 1.20. Sachant que

$$e^{\frac{i\pi}{12}} = \frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{e^{\frac{i\pi}{4}}},$$

calculer $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 1.21. Calculer les deux complexes :
(a) $z_1 = (1+i\sqrt{3})^5 + (1-i\sqrt{3})^5$
(b) $z_2 = (1+i\sqrt{3})^5 - (1-i\sqrt{3})^5$
Indication : pour (a) En posant $z = 1+i\sqrt{3}$ on pourrait montrer que $z_1 = 2\,\mathrm{Re}(z^5)$.

Représentation graphique

Exercice 1.22. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct. Déterminer et représenter dans le plan complexe l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

(a) $-1 \le \mathrm{Im}(z) \le 2$. (b) $\frac{1}{2} \le |z-i| \le 3$.

(c) $|z| = 3$ et $\mathrm{Re}(z) > 0$. (d) $z = (1+i)w$ où $|w| = 1$ et $\mathrm{Im}(w) > 0$.

Linéarisation

Exercice 1.23. Linériser $\cos^2(x)\cdot\sin^4(x)$.

Équations du second degré

Exercice 1.24. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $5z^2 + (9-7i)z + 2 - 6i = 0$

Exercice 1.25. Résoudre dans $\mathbb{C}$:
(a) $z^4 + z^2 - 20 = 0$; (b) $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$.

Calcul de racines n-ièmes

Exercice 1.26. Donner sous forme exponentielle les racines huitièmes de $e^{4i\frac{\pi}{3}}$.

Exercice 1.27. Déterminer graphiquement les racines quatrièmes de $-i$

Nombres complexes et géométrie

Exercice 1.28. Soient les points du plan complexe $M_1(z)$, $M_2(z^2)$, $M_3(z^3)$.
Déterminer les complexes z tels que :

1) M_1, M_2, M_3 sont alignés.
2) Le triangle $M_1M_2M_3$ est rectangle en M_1
3) Le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral.

Exercice 1.29. Quel est l'ensemble des complexes z tels que le complexe

$$Z = 2z^2 - 3z + 1$$

est réel ?

Chapitre 2 : Fonctions classiques réelles

Domaine de définition

Exercice 2.1. Trouver le domaine de définition des fonctions numériques d'une variable réelle données par les formules suivantes :

(a) $\tan(2x)$, (b) $\ln(1-x)$, (c) $\ln(1-x^2)$ (d) $\sqrt{x^2-3x-4}$ (e) $\dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}}$.

Composées de fonctions

Exercice 2.2. Soit f et g deux fonctions numériques d'une variable réelle données par

$$f(x) = \frac{3}{x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{2-x}{2+x}.$$

(a) Trouver le domaine de définition ainsi que l'image de f et de g.
(b) Déterminer les antécédents de 0 et -2 par f et de 0 et -2 par g.

Soient f_1, f_2, f_3 et f_4 les fonctions numériques d'une variable réelle donées par

$$f_1(x) = f(f(x)), \quad f_2(x) = f(g(x)), \quad f_3(x) = g(f(x)) \quad \text{et} \quad f_4(x) = g(g(x)).$$

(c) Déterminer le domaine de définition de f_i, $i = 1, \ldots, 4$.
(d) Trouver une expression simplifiée de f_i, $i = 1, \ldots, 4$.

Symétrie

Exercice 2.3. Parmi les fonctions numériques d'une variable réelle données par les formules suivantes, lesquelles sont paires ou impaires ?

(a) $5x^4 - 3x^2$, (b) $2x^4 - x^3 + 1$, (c) $\sin(x^3)$, (d) $\sin^2(x^3)$, (e) $\mathrm{e}^{|x|}$,

(f) $\ln(|x|)$, (g) $\tan(\sin(x))$, (h) $\mathrm{e}^{\sin(x)}$ (i) $\sin(\ln(x))$. (j) $\cos(x) + e^{x^2} - x^4$.

Exercice 2.4.

(a) Montrer que le graphe de la fonction donnée par la formule $f(x) = x^2 + 2x + 3$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = -1$.

(b) Montrer que le graphe de la fonction donnée par la formule $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ est symétrique par rapport au point $M(1{,}3)$.

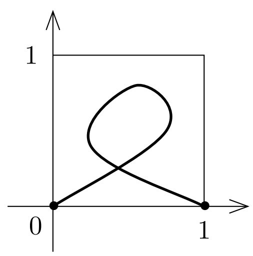
Exercice 2.5. Soient f et g deux fonctions numériques d'une variable réelle.

(a) Montrer : si f et g sont impaires alors la composition $f \circ g$ est impaire.

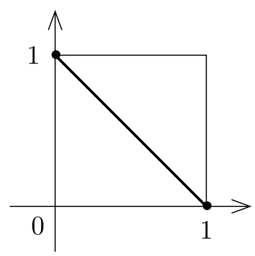
(b) Montrer : si g est paire alors $f \circ g$ est paire.

(c) Montrer : si f est paire et g est impaire alors $f \circ g$ est paire.

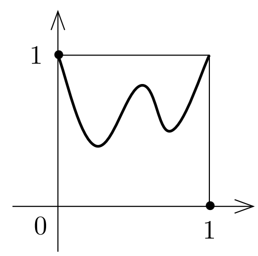
Applications, injections, surjections, bijections



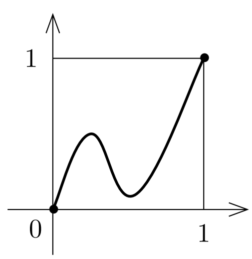
(d)



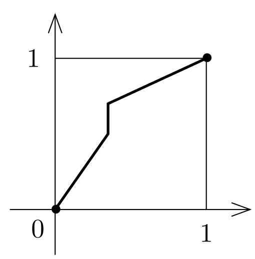
(e)



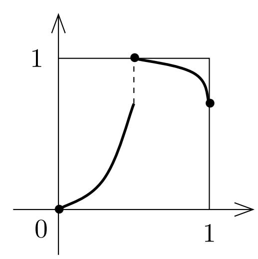
(f)



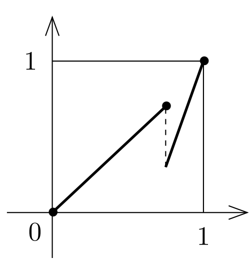
(g)



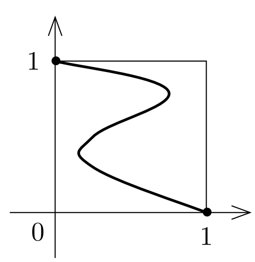
(h)



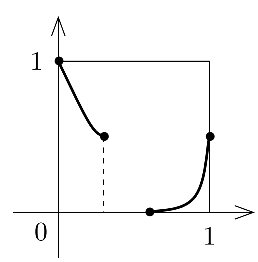
(i)



(j)



(k)



(l)

Exercice 2.6. Dans chacun des cas précédents indiquer s'il s'agit du graphe d'une application, injection, surjection, bijection de [0,1] dans [0,1]. Si c'est une bijection, dessiner le graphe de la fonction réciproque.

Exercice 2.7. Soit f la fonction donnée par la formule

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+3}}.$$

On admet que f est une bijection $f : \mathbb{R} \longrightarrow]-2{,}2[$. Trouver l'expression de la fonction réciproque.

Inéquations, valeur absolue

Exercice 2.8. Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

(a) $|2x-5| = 4$, (b) $|2x+4| < 3$, (c) $|x^2 - x - 1| \leqslant 1$.

Polynômes : division euclidienne

Exercice 2.9. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne du polynôme A par le polynôme B, dans chacun des cas suivants :

(a) $A(x) = x^4 + 2x^2 + 1, \quad B(x) = x^4 - 2x^2 - 1$
(b) $A(x) = x^3 + 1, \quad B(x) = x + 2$
(c) $A(x) = x^5 - x^3 + x - 1, \quad B(x) = x^2 + x - 3$
(d) $A(x) = x^4 - 1, \quad B(x) = x^2 + (1-i)x - i$

Polynômes : résolution d'équations

Exercice 2.10. Soit $P(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2$. Trouver une racine en essayant plusieurs valeurs "évidentes". Soit r_1 la racine ainsi trouvée. Effectuer une division euclidienee de P par $(x - r_1)$. Soit Q le polynôme ainsi obtenu. Trouver les racines r_2 et r_3 de Q. En déduire la factorisation du polynôme P.

Exercice 2.11. Soit $P(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4$.

(a) Démontrer que -2 est une racine du polynôme P.
(b) Factoriser le polynôme P en facteurs linéaires. Quelle est la multiplicité de la racine -2 ?
(c) Esquisser le graphe de P.

Exercice 2.12. Soit $P(z) = x^3 - (2+3i)x^2 + (-3+5i)x + 6 + 2i$.

(a) Trouver la racine réelle a de P et effectuer la division euclidienne de P par $x - a$.
(b) Déterminer toutes les racines de P.

Exercice 2.13. Un exemple d'un polynôme réel qui ne peut pas être décomposé en facteurs linéaires dans $\mathbb{R}[x]$: soit $P(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 5$.

(a) Trouver une racine réelle a de P et effectuer la division euclidienne de P par $x - a$.
(b) Montrer que P n'a pas d'autres racines réelles.
(c) Décomposer P en facteurs linéaires dans $\mathbb{C}[x]$.

Fonctions rationnelles : décomposition en éléments simples

Exercice 2.14. Décomposer sur $\mathbb{R}$ en éléments simples :
(a) $\dfrac{1}{x^2-4x+3}$ (b) $\dfrac{3x-11}{x^2-5x+6}$; (c) $\dfrac{2x^3-9x^2+10x-5}{x^2-5x+6}$;

Fonction logarithme, exponentielle, puissance

Exercice 2.15. Simplifier les expressions suivantes autant que possible :

(a) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x 9^{\frac{x}{2}}$, (b) $\log_9\left(\dfrac{1}{27}\right)$ (c) $\ln(1+\cos(x))+\ln(1-\cos(x))-2\ln(\sin(x))$.

Exercice 2.16. Résoudre l'inéquation

$$\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)>0.$$

Exercice 2.17. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

(a) $\ln\left(\dfrac{e^x-1}{(x-1)(x+2)}\right)$ (b) $\left(\dfrac{x(x-2)}{(x+1)(x+3)}\right)^\alpha$, pour $\alpha\in]0,1[$.

Fonctions trigonométriques réciproques

Exercice 2.18. Simplifier les expressions suivantes :
(a) $\cos(\arccos(x))$, $x\in[-1,1]$; (b) $\arccos(\cos(x))$, $x\in[0,\pi]$;
(c) $\arccos(\cos(x))$, $x\in[-\pi,0]$; (d) $\sin(\arccos(x))$ $x\in[-1,1]$

COMPLÉMENTS

Domaine de définition

Exercice 2.19. Trouver le domaine de définition des fonctions numériques d'une variable réelle données par les formules suivantes :
(a) x^5-3x^2+2x-7, (b) $\dfrac{1}{x^2-5x+6}$, (c) $|\ln(x)|$, (d) $\dfrac{1}{\sin(2x)}$, (e) $\dfrac{1}{x\cdot\cos(x)}$, (f) $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}$.

Composées de fonctions

Exercice 2.20. Soit f et g deux fonctions numériques d'une variable réelle.
On suppose que $f(x)=\mathrm{e}^x$ et $(f\circ g)(x)=3x-4$. Déterminer $g(x)$.

Exercice 2.21. Soit f et g deux fonctions numériques d'une variable réelle.
On suppose que $(f\circ g)(x)=\dfrac{1}{x^2}$ et $g(x)=2x+1$. Déterminer f.

Inéquations, valeur absolue

Exercice 2.22. Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

$$\text{(a)}\ |x^2 - 2x - 5| = 1, \qquad \text{(b)}\ |x^3 - 1| = 7, \qquad \text{(c)}\ |2x^2 - 5x - 4| \leq 3.$$

Exercice 2.23. Tracer le graphe des fonctions numériques d'une variable réelle données par les formules suivantes :

$$\text{(a)}\ |x^2 - 5x + 6|, \qquad \text{(b)}\ |\sin(2x)|.$$

Exercice 2.24. Tracer le graphe de la fonction numérique d'une variable réelle donnée par : $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$

Fonction réciproque

Exercice 2.25. Soit f la fonction donnée par la formule $f(x) = \frac{2x}{3x-1}$. Déterminez le domaine de définition et l'image de f et décider si f est injective ou non.
Lorsque f est bijective, trouvez l'expression de la fonction réciproque et déterminez le domaine de définition et l'image de cette dernière. Puis tracez la fonction et sa réciproque dans un même repère.

Exercice 2.26. Trouver une formule pour l'inverse de la fonction f donné par :

$$x \mapsto f(x) = 5 - 12x - 2x^2, \quad \text{si} \quad x > -3.$$

Esquisser le graphe de f et le graphe de son inverse sur un même graphique.

Fonctions trigonométriques réciproques

Exercice 2.27. Trouvez des exemples numériques pour montrer qu'en général

$$\arctan(x) \neq \frac{\arcsin(x)}{\arccos(x)}.$$

Chapitre 3 : Limites, dérivées, étude locale de fonctions

Limite

Exercice 3.1. Décrivez le comportement limite des fonctions numériques d'une variable réelle, données par les formules suivantes, de chaque côté de la valeur de x indiquée.

$$\text{(a)}\ \exp\left(\frac{1}{x}\right), \quad x = 0 \qquad \text{(b)}\ \exp\left(\frac{|x|}{x}\right), \quad x = 0 \qquad \text{(c)}\ \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}, \quad x = 1.$$

Exercice 3.2. Prouvez par encadrement (théorème des gendarmes) que la valeur de chacune des limites suivantes est zéro.

$$\text{(a)}\ \lim_{x \to 0} |x| \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad \text{(b)}\ \lim_{x \to +\infty} e^{-x}\cos(x), \quad \text{(c)}\ \lim_{x \to 1} |x - 1| \cos\left(\frac{1}{x-1}\right), \quad \text{(d)}\ \lim_{x \to +\infty} \exp(\sin(x) - x).$$

Exercice 3.3. Évaluez les limites suivantes

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp(2x)-1}{\exp(x)-1}$, (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-2x^2}-\sqrt{1+2x^2}}{x^2}$,

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1-x^2}$, (e) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+3x+5}}{x-4}$, (f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x+2}{x^2\ln x}$

(g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x+2}$ (h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x+2)}{\sqrt{x}}$ (i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^x$

Exercice 3.4. Utilisez un changement de variable pour évaluer les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(\ln(x))}{\ln(x)}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{\sqrt{2x}}{\sin(\sqrt{2x})}$, (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\arcsin(x)}$, (d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\arcsin(\exp(x))}{\exp(x)}$.

Définition de la dérivée

Exercice 3.5. Utiliser directement la définition de la dérivée (en tant que limite) pour calculer la dérivée de la fonction $f(x)=\sqrt{x}$.

Opérations algébriques de la dérivée

Exercice 3.6. Pour chacune des fonctions données par les formules suivantes :

(a) $8x^{3/4}$ (b) $xe^{\frac{1}{x}}$ (c) $\mathrm{e}^x\sin(x)$ (d) $\dfrac{1-4x}{x^{2/3}}$ (e) $3^x\sin(x)$

(i) donner un sous-ensemble du domaine de définition ou la fonction en question est dérivable et
(ii) utiliser les règles concernant la dérivée d'une somme, d'un produit, et d'un quotient pour trouver la dérivée.

Exercice 3.7. En utilisant toutes les règles à votre disposition, trouver la dérivée de chacune des fonctions données par les formules suivantes :

(a) $\cos(\sqrt{x})$ (b) $\sqrt{x+\mathrm{e}^x}$ (c) $\cos(x\cdot\ln(x))$ (d) 2^{-x}

(e) $\ln(\ln(\ln(x)))$ (f) $\ln(x\sin(x))$ (g) $2^{x\cdot\sin(x)}$

Règle de l'Hôpital

Exercice 3.8. Utilisez la règle de l'Hôpital pour trouver les valeurs des limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin(x)}-\dfrac{1}{\tan(x)}\right)$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}}$, (c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin(x)}-\dfrac{1}{x}\right)$,

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(a\,x)}{x^2}$, (e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)-x+\frac{x^3}{6}}{x^5}$, (f) $\lim_{x\to 0} \frac{\left((1+x)^{12}-1\right)\sin x}{1-\cos x}$.

Chapitre 4 : Étude globale de fonctions

Extrémum

Exercice 4.1. Soit $f(x) = |x^2 - 4|$.
(a) Déterminer les points critiques de f (c.à.d. les points où f' est définie et vaut 0).
(b) Déterminer les minima, maxima locaux et globaux de $f(x)$.

Exercice 4.2. Déterminer (s'ils existent) les minima, maxima locaux et globaux de

(a) $(x^2 - 1)^2$ (b) $x^2 \exp\left(-x^2\right)$

Exercice 4.3. Pour chacune des fonctions numériques données par les formules et les domaines de définitions ci-dessous, trouver les maxima et minima locaux et globaux.
(a) $x^2 + 2x - 3, \quad -2 \leqslant x \leqslant 2$ (b) $\dfrac{2x+1}{x^2+2}, \quad -3 \leqslant x \leqslant 3$

Accroissements finis

Exercice 4.4. (a) Soit $f(x) = x^2$, et soient a,b deux réels avec $a < b$. Déterminer l'ensemble des $c \in]a,b[$ tels que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. .
(b) Soit $f(x) = x^n$, et soient a,b deux réels avec $0 \leqslant a < b$. Déterminer l'ensemble des $c \in]a,b[$ tels que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Exercice 4.5. Soit $f(x) = \arctan(x)$, $a = 0$, $b = 1$. Déterminer si il existe $c \in]a,b[$ (et le cas échéant le déterminer) tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Fonctions convexes, fonctions concaves, inégalités

Exercice 4.6. Que dire d'une fonction à la fois convexe et concave sur un intervalle ?

Exercice 4.7. (a) Montrez, à l'aide d'une propriété de convexité, que

$$\forall x \geqslant 0, \quad e^x \geqslant 1 + x.$$

(b) Démontrez que la fonction $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$ est convexe, et tracez l'allure de son graphe.

Exercice 4.8. Démontrer l'inégalité suivante :

$$\forall x \geqslant 0, \quad \ln(1+x) \geqslant x - \frac{x^2}{2}$$

Asymptotes

Exercice 4.9. Etudier l'existence d'une asymptote oblique en $+\infty$ des graphes des fonctions données par les formules

(a) $f_1(x) = 2x + \sqrt{x}$ (b) $f_2(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ (c) $f_4(x) = x \cdot \sin(x)$

(d) $f_5(x) = 3x + \sin(x)$ (e) $f_6(x) = x + \dfrac{\sin(x)}{x}$ (f) $\sqrt{x^2 + x}$

Etude complète de fonction

Exercice 4.10. Etudier et tracer le graphe des fonctions données par les formules :

(a) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ (b) $f(x) = \ln(1 + e^x)$ (c) $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$

(d) $f(x) = \arctan\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$ (e) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$

Chapitre 5 : Intégration

Intégrale et aire

Exercice 5.1. Par un calcul d'aire, donner la valeur des intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx$; (b) $\displaystyle\int_{-1}^{3} |x - 2|\, dx.$

Tableau de primitives

Exercice 5.2. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes.

(a) $(3x^2 + 4x - 2)$ (b) $\sqrt{3x - 1}$ (c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

(d) $\dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}$ (e) e^{2x+3} (f) 2^{-x} (g) $(e^x - 3x^2) \cdot \cos(e^x - x^3)$

Linéarisation

Exercice 5.3. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :

(a) $\left(x^3 - 2\right)^2$ (b) $\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{4}{x^3}\right)^2$ (c) $\cos^2(x)$ (d) $\sin(2x) \cdot \sin(5x)$

Intégrales impropres

Exercice 5.4. Dans certains cas, on peut définir une intégrale $\int_a^b f(x)\ dx$ même si a et b n'appartiennent pas au domaine de définition de f ! Dans tous les cas suivants, décider si l'expression a un sens, et si oui, déterminer sa valeur numérique :

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\ dx$ (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\ dx$ (c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx$ (d) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x}\ dx$ (e) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx$

Intégration par parties

Exercice 5.5. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :

(a) $x \cdot \sin(x)$ (b) $x \cdot \ln(x)$ (c) $x^2 \cdot \cos(3x)$ (d) $\arctan(x)$ (e) $e^x \sin(x)$

Exercice 5.6. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^2 x^2 \cdot e^x\ dx$ (b) $\displaystyle\int_1^e x \cdot (\ln(x))^2\ dx$

Changement de variables

Exercice 5.7. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_3^4 x(x^2-6)^{\frac{4}{3}}\ dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\sin^7(x)\ dx$ (c) $\displaystyle\int_2^3 x \cdot \exp(x^2-2)\ dx$

Exercice 5.8. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :

(a) $3x^2(x^3+4)^{20}$ (b) $\dfrac{x^2}{2x^3+5}$ (c) $x^2\cos(2x^3)$

(d) $\dfrac{\cos(\ln(x))}{x}$ (e) $\dfrac{e^x}{\sqrt{e^x+3}}$

Exercice 5.9. A l'aide d'un changement de variable approprié, calculer les intégrales suivantes

(a) $\displaystyle\int_0^2 x^2\exp(x^3)\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3(x)\cdot\cos^2(x)\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x)\sqrt{\sin(x)}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{x^2+2}\,\mathrm{d}x$

Intégration des fractions rationnelles

Exercice 5.10. (Comparer avec l'exercice 2.14) En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :

(a) $\dfrac{1}{x^2-4x+3}$ (b) $\dfrac{3x-11}{x^2-5x+6}$; (c) $\dfrac{2x^3-9x^2+10x-5}{x^2-5x+6}$;

Primitives se ramenant à des primitives de fractions rationnelles

Exercice 5.11. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :

(a) $\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$ (Indication : $u = e^x$.) (b) $\dfrac{1}{\tan(x)(\sin(x)+1)}$ (Indication : $u = \sin(x)$.)

(c) $\dfrac{e^x}{e^{2x}+e^x-2}$ (Indication : $u = e^x$.)

Resumé des techniques d'intégration

Exercice 5.12. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x \cdot \arctan(x)\ dx$ (Indication : intégration par parties, et utiliser $\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$.)

(b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \arccos(x)\ dx$ (Indication : intégration par parties.)

(c) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin^3(x)\cos^3(x)\ \mathrm{d}x.$

Exercice 5.13. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :

(a) $\cos(2x)\cos(3x)$ (b) $\dfrac{\ln^3 x}{x}$ (c) $\ln(x^2-1)$ (Indication : $v' = 1$.)

(d) $\dfrac{\sqrt{x}+\ln x}{x}$ (e) $\dfrac{x+1}{e^x}$ (f) $x^2\sqrt{1+x^3}$

COMPLÉMENTS

Intégrale et aire

Exercice 5.14. Par un calcul d'aire, donner la valeur des intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_{-3}^{2} (3x-2)\ dx$; (b) $\displaystyle\int_{-4}^{3} |(|x-2|-|x+2|)|\ dx.$

Exercice 5.15. Calculer les intégrales ci-dessous, et en déduire la valeur de certaines aires.

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sinh(x)\ dx$ (b) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin(2x)\ dx$

Linéarisation

Exercice 5.16. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :

(a) $\left(\sqrt{x}+x^2\right)^3$ (b) $\sin(x)\cos(x)$ (c) $\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2$. (d) $\sinh^2(x)$

Intégration par parties

Exercice 5.17. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :
(a) $x^2 \cdot \cos(x)$ (b) $x \cdot \cos^2(x)$ (c) $(x+1)\cdot e^x \cdot \ln(x)$ (d) $\ln(x)$ (e) $e^{ax}\cos(bx)$

Exercice 5.18. Soit

$$I_n := \int_1^e x \cdot (\ln(x))^n \; dx.$$

Etablir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n. Puis calculer $\displaystyle\int_1^e x \cdot (\ln(x))^4 \; dx$.

Exercice 5.19. Soit

$$I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) \; dx.$$

En écrivant $\cos^n(x) = \cos(x) \cdot \cos^{n-1}(x)$, démontrer que

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Calculer alors $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8(x) \; dx$.

Exercice 5.20. Calculer l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{2x} \; dx.$$

dans le cas où $n = 3$.

Changement de variables

Exercice 5.21. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes

(a) $(x^2+1)\sqrt[3]{x^3+3x-2}$ (b) $\dfrac{x^2}{4+x^6}$ (c) $2\sin(x)\cos(x)e^{\cos(2x)}$

Exercice 5.22. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes

(a) $\sqrt{2-x^2}$ (b) $\sqrt{1+2x-x^2}$ (c) $\sqrt{x^2-4}$

(d) $\sqrt{x^2+4x-5}$ (e) $\sqrt{2x^2+32}$ (f) $\sqrt{2x^2-4x+4}$

Exercice 5.23. Calculer

$$\int_{\ln(7)}^{\ln(26)} e^x \sqrt[3]{1+e^x}\ dx$$

Exercice 5.24. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{-x^2-4x}}$ (b) $\dfrac{1}{(3-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ (c) $\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ (d) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{1-9x^2}}$

(e) $\dfrac{1}{\sqrt{4+x^2}}$ (f) $\dfrac{x}{\sqrt{2x-x^2}}$ (g) $\dfrac{x^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ (h) $\sqrt{4x^2-8x+24}$

Exercice 5.25. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :

(a) $\dfrac{\cos(x)}{\sqrt{2+\sin(x)+\sin^2(x)}}$ (b) $\dfrac{e^x}{\sqrt{2-e^{2x}}}$

Intégration des fractions rationnelles

Exercice 5.26. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fractions rationnelles suivantes

(a) $\dfrac{3x-11}{x^2-5x+6}$ (b) $\dfrac{3x-1}{x^2+4x+4}$

Primitives se ramenant à des primitives de fractions rationnelles

En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fractions rationnelles suivantes

(c) $\dfrac{1}{e^x+2e^{-x}}$ (Indication : $u=e^x$.) (d) $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$ (Indication : $u=1+\sqrt{x}$.)

(e) $\dfrac{\sin x\cdot\cos x}{(2+\sin x)^2}$ (Indication : $u=2+\sin x$.) (f) $\dfrac{1}{e^{2x}-e^x-2}$.

Exercice 5.27. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions suivantes (on pourra utiliser le changement de variable $t=\tan\frac{x}{2}$).

(a) $\dfrac{1}{5+3\cos(x)}$ (b) $\dfrac{1}{\cos(x)+\sin(x)+2}$

Exercice 5.28. Calculer les intégrales suivantes (on pourra utiliser le changement de variable $t=\tan\frac{x}{2}$).

$$(a)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\cos(x)}\ dx \qquad (b)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3+3\cos(x)-\sin(x)}\ dx$$

Fonction définie par une intégrale

Exercice 5.29.

1. Soit f une fonction continue sur un intervale I, $a(t)$ et $b(t)$ des fonctions dérivables et F une primitive de f. Montrer que la dérivée par rapport à t de la fonction définie par

$$G(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x)\ dx$$

est $f(b(t))b'(t) - f(a(t))a'(t)$. Indication : Utiliser $G(t) = F(b(t)) - F(a(t))$.

2. Déterminer de deux façons la dérivée par rapport à t de la fonction définie par

$$G(t) = \int_{t^2}^{t^3} e^x\ dx.$$

(a) Intégrer d'abord, puis dériver.
(b) Utiliser la formule pour la dérivée vue en cours.

Chapitre 6 : Probabilités

Combinatoire

Exercice 6.1. J'ai 7 invités, que je veux arranger à une table avec 7 places.

(a) Combien de possibilités y a-t-il ?

(b) Supposons que ma table est circulaire, et que parmi les invités il y a une famille de 4 personnes qui veut être ensemble. Combien de dispositions de places possibles y a-t-il ?

(c) Si l'on place les invités aléatoirement, quelle est la probabilité que la famille soit assise ensemble ?

Exercice 6.2. (a) Combien de séries de résultats possibles (tenant compte de l'ordre) y a-t-il si l'on jette un dé quatre fois ?

(b) Et combien de séries contenant au moins un 6 ?

(c) Si l'on jette un dé quatre fois, quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6 ?

Exercice 6.3. Dans cet exercice on va étudier les coefficients binomiaux $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$.

(a) Montrer que pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (symétrie)

(b) Démontrer la formule récursive $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

(c) Montrer $k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$

(d) Montrer par récurrence la formule du binôme de Newton : si $a,b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \text{ (exemple : } (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4)$$

(e) Déduire de la formule de Newton que $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

(f) Déduire de la formule de Newton que $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$.

(g) Pour les questions (a), (b) et (e), donner aussi une interprétation combinatoire (faisant intervenir le nombre de sous-ensembles).

Exercice 6.4. (a) Écrire tous les sous-ensembles avec 2 éléments de l'ensemble $\{A,B,C,D,E\}$. Vérifier qu'il y en a $\binom{5}{2}$.

(b) Si l'on choisit deux lettres parmi $\{A,B,C,D,E\}$ au hasard, quelle est la probabilité qu'une des deux lettres est un "A" ?

Exercice 6.5. Il y a 9 Rennais et 7 Brestois qui veulent former un comité de 6 personnes avec 3 personnes de chaque ville.

(a) Combien de possibilités y a-t-il ?

(b) Quid s'il y a un des Rennais et un des Brestois qui se détestent et ne veulent pas siéger ensemble ?

(c) Si les Rennais et Brestois choisissent aléatoirement et indépendamment leurs 3 représentants, quel est la probabilité que les deux ennemis se retrouvent dans le comité ?

Exercice 6.6. On considère un jeu avec 32 cartes.

(a) Combien y a-t-il de mains de 4 cartes ?

(b) Combien y a-t-il de mains de 4 cartes contenant exactement deux rois ?

(c) Quelle est la probabilité qu'une donne de 4 cartes contienne exactement deux rois ?

Exercice 6.7. Dans une loterie, le joueur doit choisir 8 nombres entre 1 et 40. Le tirage sélectionne 8 nombres parmi les 40. En admettant que le tirage est équiprobable pour les $\binom{40}{8}$ combinaisons, quelle est la probabilité que le joueur ait

(a) les 8 bons nombres ?

(b) 7 parmi les 8 bons nombres ?

(c) aucun bon nombre ?

Exercice 6.8. Dans une boulangerie il y 4 types de viennoiserie : croissant, pain au chocolat, pain aux raisins, brioche au sucre. J'y suis avec un groupe de 7 enfants, et chaque enfant a le droit de choisir une viennoiserie. Combien de commandes différentes possibles y a-t-il ? (Une commande serait, par exemple, 2 croissants, 2 pains au chocolat, 3 pains au raisins, aucune brioche au sucre.)

Exercice 6.9. Dans un jeu de cartes standard (32 cartes, dont 8 coeurs) on tire trois fois (sans remise).

(a) Combien de séries de résultats y a-t-il ?

(b) Combien d'entre eux contiennent aucune carte coeur ?

(c) Combien d'entre eux contiennent exactement un coeur ?

(d) Quelle est la probabilité d'obtenir aucun coeur ? Exactement un coeur ?

Exercice 6.10. (Le paradoxe des anniversaires) Pour cet exercice on suppose pour simplifier que chaque année a 365 jours, et que les anniversaires des gens sont équitablement repartis dans l'année.

(a) Si l'on choisit 23 personnes au hasard, quelle est la probabilité qu'ils ont tous des anniversaires différents ? Écrivez la formule.

(b) Utilisez un ordinateur ou une calculatrice programmable pour calculer numériquement la probabilité dans (a). (Solution : 0,4927)

(c) Si on choisit 23 personnes au hasard, quelle est la probabilité qu'il y a au moins un couple de personnes parmi les 23 qui partagent le même anniversaire ? Êtes-vous surpris par ce résultat ?

Exercice 6.11. Combien de fois faut il lancer un dé pour avoir au moins une chance sur deux d'obtenir un 6 ? Et neuf chances sur dix ?

Exercice 6.12. Trois chasseurs tirent simultanément sur un canard. Leurs probabilités de tuer le canard sont $p_1 = 10\%$, $p_2 = 20\%$ et $p_3 = 25\%$. Quelle est la probabilité que le canard soit encore vivant après ce triple tir ?

Variables aléatoires, lois de probabilité

Exercice 6.13. On jette un dé deux fois.

(a) Quel est l'ensemble Ω dans ce cas, et combien d'éléments a-t-il ?

(b) $\mathbb{P}(\text{deux fois le même résultat}) = ?$

(c) Regardons la variable aléatoire "max" – par exemple $\max((4,2)) = 4$. Quelle est la loi de cette v.a. ? Autrement dit, pour $k \in \{1, \ldots ,6\}$, déterminer $\mathbb{P}(\max(a_1,a_2) = k)$, où a_1 et a_2 sont des nombres obtenus en jetant un dé.

(d) Regardons la variable aléatoire "somme des deux résultats". Quelle est la loi de cette variable aléatoire ?

Exercice 6.14. 6% de la population possède le groupe sanguin O– (les "donneurs universels"). Quelle est la probabilité que, dans un groupe de 100 personnes choisies au hasard, il y a exactement 5 de groupe sanguin O– ?

Exercice 6.15. Prenons une pièce qui donne Pile dans 60% des cas et Face dans 40% des cas. On joue au jeu suivant : on lance la pièce de façon répétée, jusqu'à la première apparition de Pile. Quand on obtient un Pile, on arrête le jeu. Soit X le nombre de jets faits dans le jeu.

(a) Quelles sont les valeurs possibles de X ?

(b) Calculez la loi de X, c.à.d. déterminez $\mathbb{P}(X = k)$ pour toutes les valeurs k possibles.

Commentaire : Cette loi est très importante, elle s'appelle la *loi géométrique de paramètre p* (avec, ici, $p = 0{,}6$).