UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Mathématiques 1 pour ISTIC

Controle continu (durée deux heures)
(le 08/11/2018)

Nom : **Prénom** : **Groupe** :

Sauf mention contraire, on ne demande pas de justification.

Documents, téléphones et calculatrices sont interdits.

Répondre directement sur la feuille.

Exercice 1. Soit z le nombre complexe de module 2 et d'argument $2\pi/3$.

1.1 (1 pt) Ecrire z et z^{-1} sous leur forme exponentielle. $z =$ $z^{-1} =$

1.2 (1 pt) Ecrire z et z^{-1} sous leur forme algébrique. $z =$ $z^{-1} =$

1.3 (1 pt) Que vaut z^3 ? $z^3 =$

1.4 (1 pt) Que vaut $z^2/\bar{z}$? $z^2/\bar{z} =$

1.5 (1 pt) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 3iz - 2 = 0$.

Exercice 2. On considère la fonction $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \ln(1+x)$. On admet que cette fonction f est bijective de $\mathcal{D}(f) =]-1, +\infty[$ à valeurs dans $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.

2.1 (1 pt) Donner le domaine de définition et l'image de l'application réciproque f^{-1}.

$\mathcal{D}\,(f^{-1}) =$ $\mathrm{Im}\,(f^{-1}) =$

2.2 (1 pt) Déterminer l'expression de $f^{-1}(y)$.

$f^{-1}(y) =$

2.3 (1 pt) Représenter ci-dessous sur un même dessin le graphe de f et de f^{-1}.

$\Longrightarrow$ T. S. V. P.

Exercice 3. (2 pts) A l'aide des formules d'Euler, linéariser l'expression suivante en expliquant le calcul.

$\cos x \, \sin(2x) =$

Exercice 4. On considère le polynôme $P(X) = X^4 - 4$.

4.1) (1 pt) Donner les quatre racines x_1, x_2, x_3 et x_4 de P dans $\mathbb{C}$.

$x_1 =$ $\qquad$ $x_2 =$ $\qquad$ $x_3 =$ $\qquad$ $x_4 =$

4.2) (1 pt) Factoriser le polynôme P dans $\mathbb{C}[X]$. $\quad P(X) =$

4.3) (1 pt) Factoriser le polynôme P dans $\mathbb{R}[X]$. $\quad P(X) =$

Exercice 5.

5.1) (1 pt) Que signifie "$A(X)$ est divisible par $B(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$" ?

5.2) (2 pts) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. En effectuant la division euclidienne du polynôme $A(X) = X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2$ par $B(X) = X^2 + 2$, déterminer le quotient $Q(X)$ et le reste $R(X)$.

$Q(X) =$ $\qquad$ $R(X) =$

5.3) (1 pt) Déterminer a et b de façon à ce que $A(X)$ soit divisible par $B(X)$.

$a =$ $\qquad$ $b =$

Exercice 6. On considère les fonctions f, g et h qui sont définies sur leurs domaines respectifs $\mathcal{D}(f)$, $\mathcal{D}(g)$ et $\mathcal{D}(h)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sqrt{x(x^2 + x + 1)}\,, \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt{|x| - 3}}\,, \qquad h(x) = x\sqrt{x^4 + 1}\,.$$

6.1) (2 pts) Quels sont les domaines de définition $\mathcal{D}(f)$ et $\mathcal{D}(g)$ des fonctions f et g ?

$\mathcal{D}(f) =$ $\qquad$ $\mathcal{D}(g) =$

6.2) (1 pt) On admet que $\mathcal{D}(h) = \mathbb{R}$. Est-ce que la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire ? impaire ? ou ni l'un ni l'autre ?

6.3) (1 pt) Est-ce que la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est injective ? surjective ? ou bijective ?