Chapitre 5 : Intégration

Intégrale et aire

Exercice 5.1. Par un calcul d'aire, donner la valeur des intégrales suivantes :

(a) $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx$; (b) $\int_{-1}^3 |x-2| dx$.

Tableau de primitives

Exercice 5.2. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes.

(a) $(3x^2 + 4x - 2)$ (b) $\sqrt{3x-1}$ (c) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$
(d) $\frac{1}{\sqrt{2x+3}}$ (e) e^{2x+3} (f) 2^{-x} (g) $(e^x - 3x^2) \cdot \cos(e^x - x^3)$

Linéarisation

Exercice 5.3. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :

(a) $(x^3 - 2)^2$ (b) $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3}\right)^2$ (c) $\cos^2(x)$ (d) $\sin(2x) \cdot \sin(5x)$

Intégrales impropres

Exercice 5.4. Dans certains cas, on peut définir une intégrale $\int_a^b f(x) dx$ même si a et b n'appartiennent pas au domaine de définition de f ! Dans tous les cas suivants, décider si l'expression a un sens, et si oui, déterminer sa valeur numérique :

(a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$ (b) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ (c) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ (d) $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ (e) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

Intégration par parties

Exercice 5.5. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :

(a) $x \cdot \sin(x)$ (b) $x^2 \cdot \cos(3x)$ (c) $\arctan(x)$ (d) $e^x \sin(x)$

Exercice 5.6. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\int_0^2 x^2 \cdot e^x dx$ (b) $\int_1^e x \cdot (\ln(x))^2 dx$

Changement de variables

Exercice 5.7. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\int_3^4 x(x^2 - 6)^{\frac{4}{3}} dx$ (b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \sin^7(x) dx$ (c) $\int_2^3 x \cdot \exp(x^2 - 2) dx$

Exercice 5.8. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :

(a) $3x^2(x^3 + 4)^{20}$ (b) $\frac{x^2}{2x^3 + 5}$ (c) $x^2 \cos(2x^3)$
(d) $\frac{\cos(\ln(x))}{x}$ (e) $\frac{e^x}{\sqrt{e^x + 3}}$

Exercice 5.9. A l'aide d'un changement de variable approprié, calculer les intégrales suivantes

(a) $\int_0^2 x^2 \exp(x^3) dx$ (b) $\int_0^{\pi/2} \sin^3(x) \cdot \cos^2(x) dx$ (c) $\int_0^{\pi} \cos(x) \sqrt{\sin(x)} dx$
(d) $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{x^2 + 2} dx$

Intégration des fractions rationnelles

Exercice 5.10. (Comparer avec l'exercice 2.14) En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :

(a) $\frac{1}{x^2 - 4x + 3}$ (b) $\frac{3x - 11}{x^2 - 5x + 6}$; (c) $\frac{2x^3 - 9x^2 + 10x - 5}{x^2 - 5x + 6}$;

Primitives se ramenant à des primitives de fractions rationnelles

Exercice 5.11. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :

- (a) $\frac{1}{e^x + e^{-x}}$ (Indication : $u = e^x$.) (b) $\frac{1}{\tan(x)(\sin(x) + 1)}$ (Indication : $u = \sin(x)$.)
(c) $\frac{e^x}{e^{2x} + e^x - 2}$ (Indication : $u = e^x$.)

Resumé des techniques d'intégration

Exercice 5.12. Calculer les intégrales suivantes :

- (a) $\int_{-1}^1 x \cdot \arctan(x) dx$ (Indication : intégration par parties, et utiliser $\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$.)
(b) $\int_0^1 \arccos(x) dx$ (Indication : intégration par parties.)
(c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3(x) \cos^3(x) dx$.

Exercice 5.13. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :

- (a) $\cos(2x) \cos(3x)$ (b) $\frac{\ln^3 x}{x}$ (c) $\ln(x^2 - 1)$ (Indication : $v' = 1$.)
(d) $\frac{\sqrt{x} + \ln x}{x}$ (e) $\frac{x+1}{e^x}$ (f) $x^2 \sqrt{1+x^3}$

COMPLÉMENTS

Intégrale et aire

Exercice 5.14. Par un calcul d'aire, donner la valeur des intégrales suivantes :

$$(a) \int_{-3}^2 (3x - 2) dx; \quad (b) \int_{-4}^3 (|x - 2| - |x + 2|) dx.$$

Exercice 5.15. Calculer les intégrales ci-dessous, et en déduire la valeur de certaines aires.

$$(a) \int_{-2}^2 \sinh(x) dx \quad (b) \int_0^\pi \sin(2x) dx$$

Linéarisation

Exercice 5.16. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :

$$(a) (\sqrt{x} + x^2)^3 \quad (b) \sin(x) \cos(x) \quad (c) \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 \quad (d) \sinh^2(x)$$

Intégration par parties

Exercice 5.17. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :

$$(a) x^2 \cdot \cos(x) \quad (b) x \cdot \cos^2(x) \quad (c) (x + 1) \cdot e^x \cdot \ln(x) \quad (d) \ln(x) \quad (e) e^{ax} \cos(bx)$$

Exercice 5.18. Soit

$$I_n := \int_1^e x \cdot (\ln(x))^n dx.$$

Etablir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n . Puis calculer $\int_1^e x \cdot (\ln(x))^4 dx$.

Exercice 5.19. Soit

$$I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx.$$

En écrivant $\cos^n(x) = \cos(x) \cdot \cos^{n-1}(x)$, démontrer que

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Calculer alors $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8(x) dx$.

Exercice 5.20. Calculer l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{2x} dx.$$

dans le cas où $n = 3$.

Changement de variables

Exercice 5.21. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes

$$(a) (x^2 + 1)\sqrt[3]{x^3 + 3x - 2} \quad (b) \frac{x^2}{4 + x^6} \quad (c) 2 \sin(x) \cos(x) e^{\cos(2x)}$$

Exercice 5.22. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes

$$(a) \sqrt{2 - x^2} \quad (b) \sqrt{1 + 2x - x^2} \quad (c) \sqrt{x^2 - 4} \\ (d) \sqrt{x^2 + 4x - 5} \quad (e) \sqrt{2x^2 + 32} \quad (f) \sqrt{2x^2 - 4x + 4}$$

Exercice 5.23. Calculer

$$\int_{\ln(7)}^{\ln(26)} e^x \sqrt[3]{1 + e^x} dx$$

Exercice 5.24. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes

$$(a) \frac{1}{\sqrt{-x^2 - 4x}} \quad (b) \frac{1}{(3 - x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (c) \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (d) \frac{1}{x^2 \sqrt{1 - 9x^2}} \\ (e) \frac{1}{\sqrt{4 + x^2}} \quad (f) \frac{x}{\sqrt{2x - x^2}} \quad (g) \frac{x^2}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (h) \sqrt{4x^2 - 8x + 24}$$

Exercice 5.25. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions données par les formules suivantes :

$$(a) \frac{\cos(x)}{\sqrt{2 + \sin(x) + \sin^2(x)}} \quad (b) \frac{e^x}{\sqrt{2 - e^{2x}}}$$

Intégration des fractions rationnelles

Exercice 5.26. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fractions rationnelles suivantes

$$(a) \frac{3x - 11}{x^2 - 5x + 6} \quad (b) \frac{3x - 1}{x^2 + 4x + 4}$$

Primitives se ramenant à des primitives de fractions rationnelles

En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fractions rationnelles suivantes

$$(c) \frac{1}{e^x + 2e^{-x}} \quad (\text{Indication : } u = e^x.) \quad (d) \frac{1}{1 + \sqrt{x}} \quad (\text{Indication : } u = 1 + \sqrt{x}.)$$
$$(e) \frac{\sin x \cdot \cos x}{(2 + \sin x)^2} \quad (\text{Indication : } u = 2 + \sin x.) \quad (f) \frac{1}{e^{2x} - e^x - 2}.$$

Exercice 5.27. En précisant sur quels intervalles elles sont définies, calculer les primitives des fonctions suivantes (on pourra utiliser le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$).

$$(a) \frac{1}{5 + 3 \cos(x)} \quad (b) \frac{1}{\cos(x) + \sin(x) + 2}$$

Exercice 5.28. Calculer les intégrales suivantes (on pourra utiliser le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$).

$$(a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2 + \cos(x)} dx \quad (b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3 + 3 \cos(x) - \sin(x)} dx$$

Fonction définie par une intégrale

Exercice 5.29.

1. Soit f une fonction continue sur un intervalle I , $a(t)$ et $b(t)$ des fonctions dérivables et F une primitive de f . Montrer que la dérivée par rapport à t de la fonction définie par

$$G(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x) dx$$

est $f(b(t))b'(t) - f(a(t))a'(t)$. Indication : Utiliser $G(t) = F(b(t)) - F(a(t))$.

2. Déterminer de deux façons la dérivée par rapport à t de la fonction définie par

$$G(t) = \int_{t^2}^{t^3} e^x dx.$$

- (a) Intégrer d'abord, puis dériver.
- (b) Utiliser la formule pour la dérivée vue en cours.