Université de Rennes 1 | Année 2017-2018
ISTIC | Mathématiques 1 (L1)

Chapitre 3 : Limites, dérivées, étude de fonction

Limite

Exercice 3.1. Décrivez le comportement limite des fonctions numériques d'une variable réelle, données par les formules suivantes, de chaque côté de la valeur de x indiquée.

$$\text{(a)}\ \exp\left(\frac{1}{x}\right), \quad x=0 \qquad \text{(b)}\ \exp\left(\frac{|x|}{x}\right), \quad x=0 \qquad \text{(c)}\ \frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}, \quad x=1.$$

Exercice 3.2. Prouvez par encadrement (théorème des gendarmes) que la valeur de chacune des limites suivantes est zéro.

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0}|x|\sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad \text{(b)}\ \lim_{x\to+\infty}e^{-x}\cos(x), \quad \text{(c)}\ \lim_{x\to 1}|x-1|\cos\left(\frac{1}{x-1}\right), \quad \text{(d)}\ \lim_{x\to+\infty}\exp(\sin(x)-x).$$

Exercice 3.3. Évaluez les limites suivantes

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}, \qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\exp(2x)-1}{\exp(x)-1}, \qquad \text{(c)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x^2}-\sqrt{1+2x^2}}{x^2},$$

$$\text{(d)}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1-x^2}, \qquad \text{(e)}\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+3x+5}}{x-4}, \qquad \text{(f)}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x^2\ln x}$$

$$\text{(g)}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\sqrt{x}}}{x+2} \qquad \text{(h)}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+2)}{\sqrt{x}} \qquad \text{(i)}\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x$$

Exercice 3.4. Utilisez un changement de variable pour évaluer les limites suivantes :

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 1}\frac{\sin(\ln(x))}{\ln(x)}, \qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 0_+}\frac{\sqrt{2x}}{\sin(\sqrt{2x})}, \qquad \text{(c)}\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin(x)}, \qquad \text{(d)}\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\arcsin(\exp(x))}{\exp(x)}.$$

Définition de la dérivée

Exercice 3.5. Utiliser directement la définition de la dérivée (en tant que limite) pour calculer la dérivée de la fonction $f(x)=\sqrt{x}$.

Opérations algébriques de la dérivée

Exercice 3.6. Pour chacune des fonctions données par les formules suivantes :

$$\text{(a)}\ 8x^{3/4} \qquad \text{(b)}\ xe^{\frac{1}{x}} \qquad \text{(c)}\ \mathrm{e}^x\sin(x) \qquad \text{(d)}\ \frac{1-4x}{x^{2/3}} \qquad \text{(e)}\ 3^x\sin(x)$$

(i) donner un sous-ensemble du domaine de définition ou la fonction en question est dérivable et (ii) utiliser les règles concernant la dérivée d'une somme, d'un produit, et d'un quotient pour trouver la dérivée.

Exercice 3.7. En utilisant toutes les règles à votre disposition, trouver la dérivée de chacune des fonctions données par les formules suivantes :

(a) $\cos(\sqrt{x})$ (b) $\sqrt{x+e^x}$ (c) $\cos(x \cdot \ln(x))$ (d) 2^{-x}

(e) $\ln(\ln(\ln(x)))$ (f) $\ln(x\sin(x))$ (g) $2^{x\cdot\sin(x)}$

Règle de l'Hôpital

Exercice 3.8. Utilisez la règle de l'Hôpital pour trouver les valeurs des limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{\tan(x)}\right)$, (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}}$, (c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x}\right)$,

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(a\,x)}{x^2}$, (e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)-x+\frac{x^3}{6}}{x^5}$, (f) $\lim_{x\to 0}\frac{\left((1+x)^{12}-1\right)\sin x}{1-\cos x}$.

Extrémum

Exercice 3.9. Soit $f(x) = |x^2-4|$.

(a) Déterminer les points critiques de f (c.à.d. les points où f' est définie et vaut 0).

(b) Déterminer les minima, maxima locaux et globaux de $f(x)$.

Exercice 3.10. Déterminer (s'ils existent) les minima, maxima locaux et globaux de

(a) $(x^2-1)^2$ (b) $x^2\exp\left(-x^2\right)$

Exercice 3.11. Pour chacune des fonctions numériques données par les formules et les domaines de définitions ci-dessous, trouver les maxima et minima locaux et globaux.

(a) $x^2+2x-3, \quad -2 \leqslant x \leqslant 2$ (b) $\dfrac{2x+1}{x^2+2}, \quad -3 \leqslant x \leqslant 3$

Accroissements finis

Exercice 3.12. Pour $n \geq 0$ un entier, on considère $f(x) = x^n$. Soient a,b deux réels avec $a < b$.

(a) On suppose que $n = 2$. Déterminer l'ensemble des $c \in]a,b[$ tels que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. .

(b) Traiter le cas n quelconque.

Exercice 3.13. Soit $f(x) = \arctan(x)$, $a = 0$, $b = 1$. Déterminer si il existe $c \in]a,b[$ (et le cas échéant le déterminer) tel que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Fonctions convexes, fonctions concaves, inégalités

Exercice 3.14. Que dire d'une fonction à la fois convexe et concave sur un intervalle ?

Exercice 3.15. Après avoir déterminé son ensemble de définition, montrez que $f(x) = \ln(1 + e^x)$ est convexe, puis déterminez ses éventuelles asymptotes avant de tracer son graphe.

Exercice 3.16. (a) Montrez, à l'aide d'une propriété de convexité, que

$$\forall x \geqslant 0, \quad e^x \geqslant 1 + x.$$

(b) Démontrez que la fonction $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$ est convexe, et tracez l'allure de son graphe.

Exercice 3.17. Démontrer l'inégalité suivante :

$$\forall x \geqslant 0, \quad \ln(1 + x) \geqslant x - \frac{x^2}{2}$$

Etude complète de fonction

Exercice 3.18. Etudier et tracer le graphe des fonctions données par les formules :

(a) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ (b) $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$ (c) $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{2x}{1 + x^2}\right)$

(d) $f(x) = \arctan\left(\dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{x}\right)$ (e) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$

Asymptotes

Exercice 3.19. Etudier l'existence d'une asymptote oblique en $+\infty$ des graphes des fonctions données par les formules

(a) $f_1(x) = 2x + \sqrt{x}$ (b) $f_2(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ (c) $f_4(x) = x \cdot \sin(x)$

(d) $f_5(x) = 3x + \sin(x)$ (e) $f_6(x) = x + \dfrac{\sin(x)}{x}$ (f) $\sqrt{x^2 + x}$