Université de Rennes 1 — Année 2017-2018
ISTIC — Mathématiques 1 (L1)

Chapitre 1 : Les nombres complexes

Forme algébrique, trigonométrique, et exponentielle

Exercice 1.1. Donner la forme algébrique des complexes suivants

$$\text{(a)}\ z_1 = (2+i)^4; \qquad \text{(b)}\ z_3 = \frac{1-3i}{1-i} - \frac{5-5i}{1+2i}$$

Exercice 1.2. (a) Donner le module et un argument de $1+i$.

(b) Donner le module et un argument de $(1+i)^5$.

(c) En déduire la forme algébrique de $(1+i)^5$.

(d) Quelle est la forme algébrique de $(1-i)^5$?

Exercice 1.3. Donner la forme exponentielle de

$$\text{(a)}\ z = 1 - i\sqrt{3}; \quad \text{(b)}\ z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{(c)}\ z = -\sqrt{3} + 3i;$$

Exercice 1.4. Donner la forme exponentielle des nombres complexes suivantes

$$\text{(a)}\ (4+4i)^2; \qquad \text{(b)}\ (4+4i)(1-i\sqrt{3}); \qquad \text{(c)}\ z = \frac{2}{1-i}; \qquad \text{(d)}\ \frac{4+4i}{1-i\sqrt{3}}$$

Exercice 1.5. (a) Donner la forme exponentielle de $1+i$ et de $i-1$.

(b) Donner la forme exponentielle de

$$z = \frac{(1+i)^{19}}{(i-1)^{11}}.$$

(c) Donner la forme algébrique de z.

Représentation graphique

Exercice 1.6. Représenter dans le plan complexe l'ensemble des points M, d'affixe z tel que

(a) $z = -2$, (b) $z = 5i$, (c) $z = 2+2i$, (d) $z = 2-2i$, (e) $z = -2-2i$,

et en déduire la forme exponentielle de z.

Exercice 1.7. Soit $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

(a) Déterminer la forme exponentielle de $\bar{z}$, $\frac{1}{z}$ et de $-z$.

(b) Représenter dans le même graphique les points d'affixe z, $\bar{z}$, $-z$, iz et $\frac{1}{z}$

Exercice 1.8. Représenter dans le plan complexe, l'ensemble des points M, d'affixe z tels que :

(a) $|z| = 2$ (b) $\mathrm{Re}(z) = -1$ (c) $|z| = 2$ et $\arg(z) \in [\frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}]$ (d) $|z| = 2$ et $\mathrm{Im}(z) = 1$

Exercice 1.9. Quel est l'ensemble des complexes z tels que z, $\frac{1}{z}$ et $1 - z$ ont le même module ?

Exercice 1.10. Représenter dans le plan complexe, l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la condition donnée :

(a) $|z-3| = |z-(1+2i)|$ (b) $|z-3| < |z-(1+2i)|$ (c) $|z+3-i| \leqslant 2$ (d) $|z-2+i| = \sqrt{5}$

Linéarisation

Exercice 1.11. Linéariser :

(a) $\sin^3 x$; (b) $\cos^2(3x)\sin(5x)$.

Racines carrées

Exercice 1.12. Déterminer les racines carrées de $z = 1 + i\sqrt{3}$ de deux manières différentes :

(a) sous forme algébrique ;

(b) sous forme exponentielle après avoir cherché la forme exponentielle de z.

Exercice 1.13. Déterminer les racines carrées de

(a) $-11 + 60i$; (b) $1 + 4\sqrt{5}i$;

Équations du second degré

Exercice 1.14. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

(a) $(z - 2 - i)(z - 3 + i) = 0$; (b) $2z^2 - 6z + 5 = 0$;

(c) $z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0$; (d) $z^2 + (2 + i)z - 1 + 7i$ (Rappel : $\sqrt{625} = 25$) ;

Calcul de racines n-ièmes

Exercice 1.15. Déterminer des racines sous forme exponentielle.

(a) Déterminer les racines 3-ièmes de $1 + i$.

(b) Déterminer les racines 4-ièmes de $4i$ et représentez-les dans le plan complexe.

(c) Déterminer les racines 6-ièmes de $\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}$.

Applications en électronique

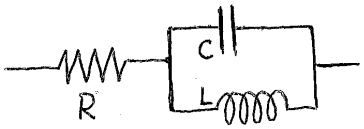

FIGURE 1

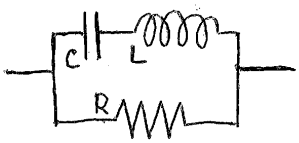

FIGURE 2

Exercice 1.16. L'*impédance électrique* mesure l'opposition d'un circuit électrique au passage d'un courant alternatif sinusoidal – c.à.d., à un courant de la forme $I(t) = \sin(2\pi\omega t)$, où ω s'appelle la *pulsation*, et $2\pi\omega$ s'appelle la *fréquence*. L'impédance est un nombre complexe. Nous considérons le circuit de la Figure 1 ci-dessus, alimenté par un courant sinusoïdal. Ici R désigne une résistance, C un condensateur et L une bobine.

— Si deux éléments d'un circuit sont d'impédance Z_A et Z_B, et je veux calculer l'impédance totale Z du circuit. Si les deux éléments sont en série, alors les impédances complexes s'additionnent

$$Z = Z_A + Z_B.$$

En revanche, s'ils sont en parallèle, alors ce sont les *admittances* qui s'additionnent : $\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B}$, donc

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B}}.$$

— L'impédance d'un condensateur est donnée par $Z_C = \frac{1}{iC\omega}$, où C est la capacité (en Farad) du condensateur.

— L'impédance d'une bobine est donnée par $Z_L = iL\omega$, où L est l'inductance (en Henry) de la bobine.

— L'impédance d'une résistance est donnée par $Z_R = R$ où R est la résistance (en Ohm).

(a) Montrer que l'impédance complexe du circuit ci-dessus est de $Z_{circuit} = R - i\frac{L\omega}{LC\omega^2-1}$

(b) Pour quelle pulsation ω le courant I est-il nul ? (Intuitivement, ceci arrive quand $|Z_{circuit}|$ est "infiniment grand".)

Exercice 1.17. Regardons le circuit de la Figure 2, alimenté par un courant sinusoidal.

(a) Montrer que l'impédance complexe de ce circuit est de $\frac{R(LC\omega^2-1)}{(LC\omega^2-1)-iRC\omega}$.

(b) Pour quelle pulsation ω l'impédance est-elle nulle ?

COMPLÉMENTS

Forme algébrique et trigonométrique

Exercice 1.18. Pour tout complexe z, on pose

$$P(z) = z^3 + (-4+i)z^2 + (13-4i)z + 13i$$

Écrire la forme algébrique de $P(i)$, de $P(-i)$, de $P(2-3i)$.

Forme exponentielle d'un nombre complexe

Exercice 1.19. (a) Déterminer la forme exponentielle de $\sqrt{3}-i$ et de $-1+i$.

(b) Déteminer la forme exponentielle de

$$z = \frac{(\sqrt{3}-i)^{13}}{(-1+i)^{18}}.$$

(c) Donner la forme algébrique de z.

Exercice 1.20. Sachant que

$$e^{\frac{i\pi}{12}} = \frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{e^{\frac{i\pi}{4}}},$$

calculer $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 1.21. Calculer les deux complexes :
(a) $z_1 = (1+i\sqrt{3})^5 + (1-i\sqrt{3})^5$
(b) $z_2 = (1+i\sqrt{3})^5 - (1-i\sqrt{3})^5$
Indication : pour (a) En posant $z = 1+i\sqrt{3}$ on pourrait montrer que $z_1 = 2\,\mathrm{Re}(z^5)$.

Représentation graphique

Exercice 1.22. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct. Déterminer et représenter dans le plan complexe l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

(a) $-1 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 2$. (b) $\dfrac{1}{2} \leq |z-i| \leq 3$.

(c) $|z| = 3$ et $\mathrm{Re}(z) > 0$. (d) $z = (1+i)w$ où $|w| = 1$ et $\mathrm{Im}(w) > 0$.

Linéarisation

Exercice 1.23. Linériser $\cos^2(x)\cdot\sin^4(x)$.

Équations du second degré

Exercice 1.24. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $5z^2 + (9-7i)z + 2 - 6i = 0$

Exercice 1.25. Résoudre dans $\mathbb{C}$:
(a) $z^4 + z^2 - 20 = 0$; (b) $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$.

Calcul de racines n-ièmes

Exercice 1.26. Donner sous forme exponentielle les racines huitièmes de $e^{4i\frac{\pi}{3}}$.

Exercice 1.27. Déterminer graphiquement les racines quatrièmes de $-i$

Nombres complexes et géométrie

Exercice 1.28. Soient les points du plan complexe $M_1(z)$, $M_2(z^2)$, $M_3(z^3)$.
Déterminer les complexes z tels que :

1) M_1, M_2, M_3 sont alignés.
2) Le triangle $M_1M_2M_3$ est rectangle en M_1
3) Le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral.

Exercice 1.29. Quel est l'ensemble des complexes z tels que le complexe

$$Z = 2z^2 - 3z + 1$$

est réel ?