Université de Rennes 1
UFR Mathématiques

Année 2014-2015
MIEE L1, Module ANA

Chapitre 2 : Polynôme, fractions rationnelles et éléments simples.

Division euclidienne

Exercice 2.1. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne du polynôme P par le polynôme Q, dans chacun des cas suivants :

(a) $P(x) = x^4 + 2x^2 + 1, \quad Q(x) = x^4 - 2x^2 - 1$

(b) $P(x) = x^3 + 1, \quad Q(x) = x + 2$

(c) $P(x) = x^5 - x^3 + x - 1, \quad Q(x) = x^2 + x - 3$

(d) $P(x) = x^4 - 1, \quad Q(x) = x^2 + (1-i)x - i$

Résolution d'équations

Exercice 2.2. Soit $P(z) = z^5 + 9z^4 + 32z^3 + 56z^2 + 48z + 16$.

(a) Démontrer que -2 est une racine du polynôme P.

(b) Déterminer la multiplicité, disons m, de cette racine P.

(c) Effectuer la division euclidienne de P par $(z+2)^m$.

Exercice 2.3. Soit $P(z) = z^3 - (2+3i)z^2 + (-3+5i)z + 6 + 2i$.

(a) Trouver la racine réelle a de P et effectuer la division euclidienne de P par $z - a$.

(b) Déterminer toutes les racines de P.

Exercice 2.4. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

(a) $z^4 + z^2 - 20 = 0$; (b) $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$.

Exercice 2.5. Factoriser sur $\mathbb{C}$ les polynômes suivants

(a) $z^3 + z^2 - 4z - 4$ (b) $z^3 + 2z^2 - 23z - 60$ (c) $z^6 + z^3 + 1 = 0$.

Exercice 2.6. Factoriser sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ les polynômes :

(a) $z^6 - 1$; (b) $z^4 + 2z^2 + 4$;

Décomposition en éléments simples

Exercice 2.7. Décomposer sur $\mathbb{R}$ en éléments simples :

(a) $\dfrac{3x-11}{x^2-5x+6}$; (b) $\dfrac{2x^2-11}{x^2+6x+9}$; (c) $\dfrac{5x^2+4}{x^3-3x^2+3x-1}$;

(d) $\dfrac{4x}{(x-1)^2(x+1)}$. (e) $\dfrac{4x^7+2x^4-2}{x^4-1}$. (f) $\dfrac{1}{x^3-1}$. (g) $\dfrac{3x^2-x+11}{(4+x^2)^2}$.

COMPLÉMENTS

Exercice 2.8. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne du polynôme P par le polynôme Q, dans chacun des cas suivants :

(a) $P(x) = x^6 - 1, \quad Q(x) = x^2 - x - 2,$

(b) $P(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 7, \quad Q(x) = 2x^2 + 5,$

(c) $P(x) = x^5 - x^4 + 2x^3 + x, \quad Q(x) = x^3 + 2x^2 - 3.$

Exercice 2.9. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

(a) $2iz + 5 = 3 + 2i$ (b) $1 - 2iz + 4z = 3i(1 + 5i)$ (c) $(z + i)(z - 5) = z^2 - i$

(d) $(z - 3i)(2z - 1) = 1 - 4z^2$ (e) $z^2 = -1$ (f) $z^2 + 9 = 0$ (g) $z^4 + 2z^2 = 0$

Exercice 2.10.
(a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 - 1 = 0$.
(b) Développer le produit $(z - 1)(z^3 + z^2 + z + 1)$.
(c) Quelles sont les solutions dans $\mathbb{C}$, de l'équation $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$?

Exercice 2.11. Factoriser le polynôme $x^3 + x^2 - x - 1$

Exercice 2.12. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z - 2)^n + (z + 2)^n = 0$

Exercice 2.13. Résoudre dans $\mathbb{C}$

(a) $z = 2\overline{z} - 2 + 6i$ (b) $2z + i\overline{z} = 5 - 4i$

Exercice 2.14. Soit $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ avec $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.
Montrer que, si z_0 est racine de P, alors son conjugué $\bar{z}_0$ est aussi racine de P.

Exercice 2.15. On pose $P(z) = z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1$.

(a) Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est solution de l'équation $P(z) = 0$, il en est de même de $\overline{\alpha}$ et $\frac{1}{\alpha}$.

(b) Calculer $P(1 + i)$. Déduire alors la résolution de l'équation $P(z) = 0$.

(c) Écrire $P(z)$ sous forme d'un produit de deux polynômes du second degré, à coefficients réels.

Exercice 2.16. Décomposer sur $\mathbb{R}$ en éléments simples :

(a) $\dfrac{7}{x^2 - 5x - 6}$; (b) $\dfrac{x + 3}{(x + 1)(x + 2)}$. (c) $\dfrac{x + 1}{x^2 - 2x + 1}$. (d) $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^3}$.

(e) $\dfrac{x^2 - 2x}{x^2 + 4x + 3}$ (Extrait du contrôle 2 du 14/10/2009.)