Chapitre 1 : Les nombres complexes

Forme algébrique et trigonométrique

Exercice 1.1. Donner la forme algébrique des complexes suivants

(a) $z_1 = (2+i)^4$; (b) $z_3 = \dfrac{1-3i}{1-i} - \dfrac{1-i}{1+2i}$.

Exercice 1.2. (a) Donner le module et un argument de $1+i$.

(b) Donner le module et un argument de $(1+i)^5$.

(c) En déduire la forme algébrique de $(1+i)^5$.

(d) Quelle est la forme algébrique de $(1-i)^5$?

Forme exponentielle d'un nombre complexe

Exercice 1.3. Donner la forme exponentielle de

(a) $z = 1 - i\sqrt{3}$; (b) $z = -\sqrt{3} + i$; (c) $z = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; (d) $z = \dfrac{2}{1-i}$;

Exercice 1.4. Donner la forme exponentielle des nombres complexes suivantes

(a) $(4+4i)^2$ (b) $(4+4i)(1-i\sqrt{3})$ (c) $\dfrac{4+4i}{1-i\sqrt{3}}$

Exercice 1.5. (Extrait du Contrôle continu du 30-10-2009)

(a) Donner la forme exponentielle de $1+i$ et de $i-1$.

(b) Donner la forme exponentielle de

$$z = \frac{(1+i)^{19}}{(i-1)^{11}}.$$

(c) Donner la forme algébrique de z.

Représentation graphique

Exercice 1.6. Représenter dans le plan complexe l'ensemble des points M, d'affixe z tel que

(a) $z = -2$, (b) $z = 5i$, (c) $z = 2+2i$, (d) $z = 2-2i$, (e) $z = -2-2i$,

et en déduire la forme exponentielle de z.

Exercice 1.7. (Extrait du contrôle continu 10 du 26/11/2008)
Soit $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

(a) Déterminer la forme exponentielle de $\bar{z}$, $\dfrac{1}{z}$ et de $-z$.

(b) Représenter dans le même graphique les points d'affixe z, $\bar{z}$, $-z$, iz et $\dfrac{1}{z}$

Exercice 1.8. Représenter dans le plan complexe, l'ensemble des points M, d'affixe z tels que :

(a) $|z| = 2$ (b) $\mathrm{Re}(z) = -1$ (c) $|z| = 2$ et $\arg(z) \in [\dfrac{9\pi}{4}, \dfrac{11\pi}{4}]$ (d) $|z| = 2$ et $\mathrm{Im}(z) = 1$

Exercice 1.9. Quel est l'ensemble des complexes z tels que z, $\frac{1}{z}$ et $1 - z$ ont le même module ?

Exercice 1.10. Représenter dans le plan complexe, l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la condition donnée :

(a) $|z - 1| = |z - 3 - 2i|$ (b) $|z - 3| = |z - 1 - i|$ (c) $|z - 2 + i| = \sqrt{5}$

(d) $|(1 + i)z - 2 - i| = 2$ (e) $|z + 3 - i| \leqslant 2$ (f) $|z + 3 - i| > |z|$

(g) $|z| < |z + 3 - i| < 2$

Linéarisation

Exercice 1.11. Linéariser :

(a) $\cos^5 x$; (b) $\cos^2(3x)\sin^2(5x)$.

Racines carrées

Exercice 1.12. Déterminer les racines carrées de $z = 1 + i\sqrt{3}$ de deux manières différentes :

(a) sous forme algébrique ;

(b) sous forme exponentielle après avoir cherché la forme exponentielle de z.

Exercice 1.13. Déterminer les racines carrées de

(a) $2 + 6i$; (b) $1 + 4\sqrt{5}i$.

Équations du second degré

Exercice 1.14. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

(a) $(z - 2 - i)(z - 3 + i) = 0$ (b) $2z^2 - 6z + 5 = 0$ (c) $5z^2 + (9 - 7i)z + 2 - 6i = 0$

(d) $z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0$

Cacul de racines n-ièmes

Exercice 1.15.

(a) Déterminer les racines 3-ièmes de $1 + i$.

(b) Déterminer les racines 4-ièmes de $4i$ et représentez-les dans le plan complexe.

(c) Déterminer les racines 6-ièmes de $\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}$.

COMPLÉMENTS

Forme algébrique et trigonométrique

Exercice 1.16. Pour tout complexe z, on pose

$$P(z) = z^3 + (-4+i)z^2 + (13-4i)z + 13i$$

Écrire la forme algébrique de $P(i)$, de $P(-i)$, de $P(2-3i)$.

Forme exponentielle d'un nombre complexe

Exercice 1.17. Donner la forme exponentielle de chaque complexe proposé.
(a) $z_1 = \sqrt{3} + 3i$ (b) $z_2 = (\sqrt{3} - 2)e^{i\frac{\pi}{3}}$

Exercice 1.18. (a) Déterminer la forme exponentielle de $\sqrt{3} - i$ et de $-1+i$.
(b) Déteminer la forme exponentielle de

$$z = \frac{(\sqrt{3}-i)^{13}}{(-1+i)^{18}}.$$

(c) Donner la forme algébrique de z.

Exercice 1.19. Sachant que

$$e^{\frac{i\pi}{12}} = \frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{e^{\frac{i\pi}{4}}},$$

calculer $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 1.20. Calculer les deux complexes :
(a) $z_1 = (1+i\sqrt{3})^5 + (1-i\sqrt{3})^5$
(b) $z_2 = (1+i\sqrt{3})^5 - (1-i\sqrt{3})^5$
Indication : pour (a) En posant $z = 1 + i\sqrt{3}$ on pourrait montrer que $z_1 = 2\,\mathrm{Re}(z^5)$.

Représentation graphique

Exercice 1.21. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct. Déterminer et représenter dans le plan complexe l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

(a) $-1 \le \mathrm{Im}(z) \le 2$. (b) $\dfrac{1}{2} \le |z-i| \le 3$.

(c) $|z| = 3$ et $\mathrm{Re}(z) > 0$. (d) $z = (1+i)w$ où $|w| = 1$ et $\mathrm{Im}(w) > 0$.

Linéarisation

Exercice 1.22. Linériser $\cos^2 x \sin^4 x$.

Équations du second degré

Exercice 1.23. Résoudre dans $\mathbb{C}$
(a) $5z^2 + (9-7i)z + 2 - 6i = 0$
(b) $z^2 + (2+i)z - 1 + 7i = 0$ (On rappelle que $\sqrt{625} = 25$.)

Cacul de racines n-ièmes

Exercice 1.24. (Extrait du Contrôle continu du 30-10-2009)
Donner sous forme exponentielle les racines huitièmes de $e^{4i\frac{\pi}{3}}$.

Exercice 1.25. Déterminer graphiquement les racines quatrièmes de $e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Nombres complexes et géométrie

Exercice 1.26. Soient les points du plan complexe $M_1(z)$, $M_2(z^2)$, $M_3(z^3)$.
Déterminer les complexes z tels que :

1) M_1, M_2, M_3 sont alignés.
2) Le triangle $M_1M_2M_3$ est rectangle en M_1
3) Le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral.

Exercice 1.27. Quel est l'ensemble des complexes z tels que le complexe

$$Z = 2z^2 - 3z + 1$$

est réel ?