Université de Rennes 1 Année 2010–2011
UFR Mathématiques
Module VAR

Examen de Rattrapage
Durée : 2 heures

Aucun appareil électronique (calculatrice, téléphone portable...) et aucun document est autorisé. Toutes les réponses devront être justifiées, y compris dans les questions vrai/faux.

Exercice 1

(a) Énoncer le théorème de Schwarz.

Solution : Il ne fallait surtout pas oublier l'hypothèse que les dérivées partielles secondes doivent être continues !

(b) Est-ce que toute suite dans le disque ouvert $D\left(\binom{0}{0}, 1\right)$ possède une sous-suite qui converge vers un point $x \in D\left(\binom{0}{0}, 1\right)$?

Solution : Attention, ce disque n'est pas compacte. La réponse est "non" – par exemple la suite $(\frac{n}{n+1}, 0)$ converge vers $(1, 0)$ (qui n'est pas dans le disque) et n'a donc aucun autre point d'accumulation.

(c) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction. En cours vous avez vu plusieurs définitions équivalentes de la continuité de f. Donnez celle en termes de parties ouvertes.

(d) On considère la courbe dans le plan $\gamma(t) = (t, \sqrt{4-t^2})$ (pour $-2 < t < 2$). Cette courbe est-elle unitaire ?

Solution : Non, $||\gamma'(t)||^2 = ||(1, \frac{-t}{\sqrt{4-t^2}})|| > 1$ pour tout t dans le domaine de définition sauf $t = 0$.

(e) Determiner la courbure de la courbe en (d). Indication : cette question peut être résolue sans aucun calcul.

Solution : La courbe décrit un arc de cercle de rayon 2 (en fait la moitié supérieure du cercle, mais c'est sans importance). La courbure est donc $\frac{1}{2}$.

(f) On considère la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xe^y - ye^x$. On admet que $f((1, 0)) = 1$. Y a-t-il une fonction $g\colon\,]1-\epsilon, 1+\epsilon[\, \to \mathbb{R}$ avec $g(1) = 0$ et telle que $f(x, g(x)) = 1$? Si oui, calculer $g'(1)$.

Solution : On calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^y - ye^x$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^y - e^x$. En particulier $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 1 - e$. Comme $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) \neq 0$, la fonction implicite g existe, et sa dérivée est $g'(1) = -\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) \;/\; \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = \frac{1}{e-1}$, tout d'après le théorème des fonctions implicites.

Exercice 2 Polynômes de Taylor, points critiques, extrema

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x(y^2 - 1)$.

(a) Trouver les points critiques de f et déterminer leur nature (maximum, minimum, point de selle). Trouver l'approximation de Taylor à l'ordre 2 au point $(x_*, y_*) = (2, 0)$.

Solution : Points critiques $(0, \pm 1)$, tous les deux des point de selle. $f(2 + h_1, h_2) \simeq -2 - h_1 + 2h_2^2$.

(b) Déterminer le maximum et le minimum de la fonction f sur le carré $[-1, 0] \times [0, 1]$.

Solution : Minimum 0, atteint dans tous les points où $x = 0$ ou $y = 1$. Maximum 1, atteint en $(-1, 0)$.

Exercice 3 Extrema liés

Trouver les maxima globaux de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$, restreinte à l'ellipse $S = \{(x, y) \mid x^2 + 4y^2 = 8\}$. Utiliser la méthode de Lagrange.

Solution : Si l'on note $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) = x^2 + 4y^2$, alors $S = \{(x, y) \mid g(x, y) = 8\}$. On vérifie d'abord que pour $(x, y) \in S$ (et en fait pour tout (x, y) différent de $(0, 0)$), le gradient $\nabla g(x, y) = (2x, 8y)$ est différent de $(0, 0)$. On peut donc appliquer le critère de Lagrange pour chercher les maxima. Dans tout extremum $\binom{x}{y}$ il existe donc un nombre réel λ tel que $\nabla f(\binom{x}{y}) = \lambda \nabla g(\binom{x}{y})$, c.à.d. tel que $\binom{y}{x} = \lambda\binom{2x}{8y}$. Le cas $\lambda = 0$ est impossible, car il impliquerait $y = 0$ et $x = 0$, or le point $(0, 0)$ n'appartient pas à S. On applique l'astuce standard : on multiplie la première ligne par x et la seconde par y, et on obtient $2\lambda x^2 = xy = 8\lambda y^2$. Comme $\lambda \neq 0$, on peut en déduire que $x^2 = 4y^2$ et donc $x = \pm 2y$.

- Si $x = 2y$, alors $x^2 + 4y^2 = 8$ implique $y = \pm 1$ et $x = \pm 2$. Dans un tel point on a $f(x, y) = 2$.
- Si $x = -2y$, alors $x^2 + 4y^2 = 8$ implique $y = \pm 1$ et $x = \mp 2$. Dans un tel point on a $f(x, y) = -2$.

Donc les points $(2, 1)$ et $(-2, -1)$ sont des maxima globaux, et $(2, -1)$ et $(-2, 1)$ sont des minima globaux de f sur S.

Exercice 4 Intégration en coordonnés polaires, intégrale curviligne.

Le but de cette question est de calculer l'aire d'une certaine région A du plan de deux manières différentes. La région A est donnée, en coordonnées polaires, par

$$A = \left\{ \binom{r}{\theta} \mid -\tfrac{\pi}{6} < \theta < \tfrac{\pi}{6},\ 0 \leqslant r \leqslant 2\cos(3\theta) \right\}$$

(a) Calculer l'aire de A.

Solution : On doit donc calculer l'intégrale $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{2\cos(3\theta)} r\ dr\ d\theta = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2}(2\cos(3\theta))^2\ d\theta = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 2\cos^2(3\theta)\ d\theta = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos(6\theta) + 1\ d\theta = [\frac{1}{6}\sin(6\theta) + \theta]|_{\theta=-\pi/6}^{\theta=\pi/6} = \frac{\pi}{3}$

(b) On va admettre que le bord de ce domaine peut être paramétré, en coordonnées euclidiennes, par

$$\gamma(t) = \binom{\sin(t)-\cos(2t)}{\cos(t)-\sin(2t)} \qquad (\tfrac{\pi}{6} \leqslant t \leqslant \tfrac{5\pi}{6})$$

Calculer l'intégrale curviligne du champ de vecteurs $\vec{F}(\binom{x}{y}) = \frac{1}{2}\binom{-y}{x}$ sur la courbe γ. Indication : vous pouvez admettre la formule $\sin(t)\cos(2t) + \cos(t)\sin(2t) = \sin(3t)$.

Solution : $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \binom{-\cos(t)+\sin(2t)}{\sin(t)-\cos(2t)}\cdot\binom{\cos(t)+2\sin(2t)}{-\sin(t)-2\cos(2t)}\,dt = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} -\cos^2(t)-\sin^2(t)+2\cos^2(2t)+2\sin^2(2t)+3\left(\sin(t)\cos(2t)+\cos(t)\sin(2t)\right)\,dt = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} 1+3\sin(3t)\,dt = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}[\cos(3t)]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = \frac{\pi}{3}$

(c) Déduire du résultat de (b) l'aire de la région A.

Solution : selon un théorème du cours (corollaire du théorème de Green-Riemann) l'aire d'une région du plan est donnée par l'intégrale curviligne du champ de vecteurs $\frac{1}{2}\binom{-y}{x}$ sur le bord du domaine, dans le sens trigonométrique. En l'occurrence, on trouve que l'aire de A est $\frac{\pi}{3}$

Dessin ici

$\boxed{\textbf{Exercice 5}}$ Les champs de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ suivants sont-ils intégrables (c.à.d., sont-ils le champ gradient d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$) ? Si non, expliquer pourquoi pas. Si oui, calculer la fonction f.

(a) Dans $\mathbb{R}^3$, le champ de vecteurs $\vec{F}(x,y,z) = (x-y,\ y,\ z)$.

Solution : $\mathrm{rot}(\vec{F}) = (0,0,1)$. Or d'après un résultat du cours, un champ de vecteurs $\vec{F}$ dans $\mathbb{R}^3$ est intégrable si et seulement si le champ $\mathrm{rot}(\vec{F})$ est constant nul. Donc $\vec{F}$ n'est pas intégrable.

(b) Dans $\mathbb{R}^4$, le champ de vecteurs $\vec{F}(w,x,y,z) = (0,-z,0,x)$

Solution : Non, parce que déjà le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$ $\vec{G}(x,z) = (-z,x)$ n'est pas intégrable...