Cours de LICENCE 2
VAR : Fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples, courbes paramétrées
Ce polycopié, y compris le recueil d'exercices, a été écrit par Jacques Rolland (revisé par Bert Wiest)
Première partie : Calcul différentiel

Chapitre 1 : Géométrie de $\mathbb{R}^n$

1 – Produit scalaire, norme et distance dans $\mathbb{R}^n$

Définition
Si $X = (x_1 \dots x_n)$ et $Y = (y_1 \dots y_n)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on définit leur **produit scalaire** par :

$$X \cdot Y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

Définition
On appelle **norme** de X (ou longueur) $\|X\| = (X \cdot X)^{1/2}$ et la **distance** entre deux vecteurs $d(X\,,\,Y) = \|X - Y\|$.

Proposition
On a les propriétés suivantes :
(1) $X \cdot Y = Y \cdot X$
(2) $X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + XZ$
(3) $(\alpha\, X) \cdot Y = \alpha(X \cdot Y)$
(4) $X \cdot X \geqslant 0$ avec $X \cdot X = 0$ si et seulement si $X = 0$

Théorème
Le produit scalaire vérifie l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** $(X \cdot Y)^2 \leqslant \|X\|^2\, \|Y\|^2$ avec égalité si et seulement si X et Y sont colinéaires.

Théorème
La norme définie précédemment s'appelle **norme euclidienne** et vérifie :
(i) $\|X\| = 0$ si et seulement si $X = 0$
(ii) $\|X\| > 0$ si $X \neq 0$
(iii) $\|\alpha\, X\| = |\alpha|\ \|X\|$
(iv) $\|X + Y\| \leqslant \|X\| + \|Y\|$

Définition
L'**angle** entre deux vecteurs non nuls est $\theta \in [0\,,\,\pi]$ vérifiant $\cos\theta = \dfrac{X \cdot Y}{\|X\|\ \|Y\|}$.

Définition
X et Y de $\mathbb{R}^n$ sont **orthogonaux** si et seulement si $X \cdot Y = 0$.

Définition (plan dans $\mathbb{R}^3$)
Soient $A = (x_0\,,\,y_0\,,\,z_0)$ un point de $\mathbb{R}^3$ et $N = (a\,,\,b\,,\,c)$ un vecteur non nul.
Le plan passant par A et orthogonal à N est $P = \{X \in \mathbb{R}^3 / (X - A) \cdot N = 0\}$.

2 – Produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$

Définition
Si $X = (x_1\,,\,x_2\,,\,x_3)$ et $Y = (y_1\,,\,y_2\,,\,y_3)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on définit le **produit vectoriel** de X et de Y par : $X \wedge Y = (x_2\,y_3 - x_3\,y_2\,,\,x_3\,y_1 - x_1\,y_3\,,\,x_1\,y_2 - y_1\,x_2)$.

Aide mémoire : cela "vaut" $\det \begin{pmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$.

Théorème
On a les propriétés suivantes :
(1) $X \wedge Y = -\,Y \wedge X$
(2) $X \wedge (Y + Z) = X \wedge Y + X \wedge Z$
(3) $\alpha\,X \wedge Y = X \wedge \alpha\,Y = \alpha(X \wedge Y)$
(4) $X \cdot (X \wedge Y) = 0$ et $Y \cdot (X \wedge Y) = 0$
(5) $\|X \wedge Y\|^2 = \|X\|^2\,\|Y\|^2 - (X \cdot Y)^2$ (identité de Lagrange)

Interprétation géométrique de $X \wedge Y$
$\|X \wedge Y\| = \|X\|\;\|Y\|\;\sin\theta$ est l'**aire du parallélogramme** engendré par X et Y.

Chapitre 2 : Courbes paramétrées

1 – Définition
Une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ s'appelle fonction vectorielle ou **courbe paramétrée**.
On exprime $F(t)$ à l'aide des fonctions coordonnées $F(t) = (f_1(t)\,,\, \ldots\,,\, f_n(t))$.

Exemples

(1) $F(t) = (x_0 + ta\,,\, y_0 + tb\,,\, z_0 + tc)$

(2) $F(t) = (R\cos t\,,\, R\sin t)$

2 – Limite – Continuité – Dérivation

Définition
Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

(1) $\lim\limits_{t\to p} F(t) = \left(\lim\limits_{t\to p} f_1(t)\,,\, \ldots\,,\, \lim\limits_{t\to p} f_n(t)\right)$

(2) $F'(t) = (f_1'(t)\,,\, \ldots\,,\, f_n'(t))$

(3) $\displaystyle\int_a^b F(t)\,dt = \left(\int_a^b f_1(t)\,dt\,,\, \ldots\,,\, \int_a^b f_n(t)\,dt\right)$

Théorème
Si $F\,,\, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ et $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont dérivables alors :

(i) $(F+G)'(t) = F'(t) + G'(t)$

(ii) $(uF)'(t) = u'(t)F(t) + u(t)F'(t)$

(iii) $(F\cdot G)'(t) = F'(t)\cdot G(t) + F(t)\cdot G'(t)$

(iv) $(F\wedge G)'(t) = F'(t)\wedge G(t) + F(t)\wedge G'(t)$ si $n = 3$

(v) $F(u(t))' = F'(u(t))\cdot u'(t)$

Corollaire
Si une courbe paramétrée $F(t)$ est dérivable et si $\|F(t)\|$ est constante alors $F(t)\cdot F'(t) = 0$. (Autrement dit, si la courbe $F(t)$ est sur une sphère centrée en 0, alors $F(t)$ et $F'(t)$ sont orthogonaux).

Exemple
$F(t) = (\cos t\,,\, \sin t)$

3 – Etude géométrique de $F'(t)$: tangente

Définition
Si $F(t) = (x_1(t)\,,\, \ldots\,,\, x_n(t))$ est dérivable et $F'(t) \neq 0$, on voit que $F'(t) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(t+h) - F(t)}{h}$.

Définition
Soit C la courbe tracée par F. Si $F'(t_0) \neq 0$ alors
la droite passant par $F(t_0)$ de vecteur directeur $F'(t_0)$ est appelée **droite tangente** à $F'(t_0)$ est un vecteur tangent à C en $F(t_0)$.

4 – Longueur d'une courbe

Définition

La **longueur de l'arc** de la courbe $F(t)$ entre $t = a$ et $t = b$ est donnée par $\displaystyle\int_a^b \|F'(t)\|\, dt$.

5 – Paramétrisation unitaire – Courbure

Cas $n = 3$

Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée.
On suppose que les dérivées $\gamma^{(n)}$ existent pour tout n et que $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout t.
On dit que γ est **régulière**.
Alors :

(i) $S(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\|\, du$ est la longueur de l'arc entre t_0 et t.

(ii) $\dfrac{dS}{dt} = \|\gamma'(t)\| > 0$

De ce qui précède découle :

Définition

$t \to s(t)$ admet une fonction réciproque $s \to t(s)$ avec $t'(s) = \dfrac{1}{\|\gamma'(t(s))\|}$.
On note $\Gamma(s)$ la fonction $\Gamma(s) = \gamma(t(s))$ et on l'appelle **paramétrisation unitaire** de γ car on a $\|\Gamma'(s)\| = 1$.

Définition

La courbure de $\Gamma(s)$ est donnée par $\rho(s) = \|\Gamma''(s)\|$.

Proposition

Si γ n'est pas une paramétrisation unitaire alors la **courbure** est donnée par $\rho(t) = \dfrac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}$.

Chapitre 3 : Fonctions de plusieurs variables

1 – Définitions

Définition
Une fonction f de D dans $\mathbb{R}$ (où D est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$) s'appelle fonction numérique de n variables.
D est le domaine de définition de f.
$\{f(x)\,/\,x \in D\}$ est l'image de f.
$\{(x\,,\,f(x))\,/\,x \in D\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ est appelé graphe de f.

Exemples
$f(x\,,\,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$
$f(x\,,\,y\,,\,z) = Ln(1-x^2-y^2-z^2)$

$f(x\,,\,y) = \sqrt{y^2-x^2}$

2 – Représentation géométrique

- Cas d'une fonction de deux variables $f(x\,,\,y)$
  a) On considère le graphe $G(f) = \{((x\,,\,y)\,,\,f(x\,,\,y))\,/\,(x\,,\,y) \in \mathbb{C}\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
  Exemple : $f(x\,,\,y) = x^2+y^2$.
  Le graphe est un paraboloïde de révolution.
  b) On considère les courbes de niveau $\{(x\,,\,y) \in D\,/\,f(x\,,\,y) = C\}$.
  Dans l'exemple précédent, les courbes de niveau sont les cercles $\{(x\,,\,y)\,/\,x^2+y^2 = C \geqslant 0\}$.
- Cas d'une fonction de plus de deux variables
  Le graphe étant dans $\mathbb{R}^4$, on ne peut le dessiner.
  Si $n = 3$, on utilise les surfaces de niveau $\{(x\,,\,y\,,\,z) \in D\,/\,f(x\,,\,y\,,\,z) = C\}$.
  Exemple : $f(x\,,\,y\,,\,z) = \sin(x^2+y^2+z^2)$.

3 – Etude de certaines surfaces quadratiques

On considère le graphe du polynôme quadratique de la forme $z = Lx^2 + 2Mxy + Ny^2$.

Exemple : $z = x^2+y^2$
$z = ax^2+by^2 \quad , \quad a>0$ et $b>0$
$z = x^2-y^2$

Proposition
Il existe des coordonnées orthogonales $X\,,\,Y\,,\,Z$ dans lesquelles $Z = k_1\,X^2 + k_2\,Y^2$.

Chapitre 4 : Fonctions continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

1 – Topologie de $\mathbb{R}^n$

Définition
Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$.
On appelle $B(a\,,\,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \|x - a\| < r\}$ la **boule ouverte** de centre a et de rayon r.

Exemple
Dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ on retrouve les intervalles, les disques, les boules ouvertes.

Proposition
Soient $A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$.
Alors une des trois conditions suivantes est vérifiée :

(i) $\exists r > 0$ tel que $B(a\,,\,r) \subset A$

(ii) $\exists r > 0$ tel que $B(a\,,\,r) \subset A^c$ où $A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$

(iii) $\forall r > 0$, $B(a\,,\,r)$ contient des points de A et de A^c.

Définition
L'**intérieur** de A (noté $\mathrm{int}(A)$ ou $\mathring{A}$) est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ vérifiant (i).
L'**extérieur** de A (noté $\mathrm{ext}\ A$) est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ vérifiant la condition (ii).
La **frontière** de A (notée ∂A) est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ vérifiant la condition (iii).
La **fermeture** de A (notée $\overline{A}$) est la réunion de A et de ∂A.

Exemples dans $\mathbb{R}^2$
$A = \{x \in \mathbb{R}^2 \,/\, \|x\| < 1\}$
$A = \{(n\,,\,0) \,/\, n \in \mathbb{Z}\}$

Définition
Un ensemble A de $\mathbb{R}^n$ est :

(i) **ouvert** si $\forall a \in A$, $\exists r > 0$ tel que $B(a\,,\,r) \subset A$

(ii) **fermé** si A^c est ouvert.

Proposition
A est ouvert si et seulement si $\mathring{A} = A$.
A est fermé si et seulement si $\overline{A} = A$.

Exemples
$A_1 = \{(x\,,\,y) \,/\, x^2 + y^2 < 1\}$ est ouvert.
$A_2 = \{(x\,,\,y) \,/\, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ est fermé.
$A_3 = A_1 \cup \{(1\,,\,0)\}$ n'est ni ouvert ni fermé.
$]0\,,\,1[\subset \mathbb{R}$ est ouvert dans $\mathbb{R}$.
$]0\,,\,1[\times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ n'est ni ouvert ni fermé.
$[0\,,\,1] \subset \mathbb{R}$ est fermé dans $\mathbb{R}$.
$[0\,,\,1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$.

Proposition

1. $\mathbb{R}^n$ et $\emptyset$ sont ouverts (et donc aussi fermés).
2. Toute réunion d'ouverts est un ouvert.
3. Toute intersection <u>finie</u> d'ouverts est un ouvert.

2 – Suites dans $\mathbb{R}^n$

Définition
Une suite $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ **converge** dans $\mathbb{R}^n$ vers $b \in \mathbb{R}^n$ si $\forall\varepsilon > 0\,,\, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $p \geqslant N$ entraîne $\|X_p - b\| < \varepsilon$.

Remarques
1. On dit que b est **la limite** de la suite (X_p) et on note $X_p \to b$.
2. $X_p \to b$ si et seulement si $\forall\varepsilon > 0$ la boule $B(b\,,\,\varepsilon)$ contient toute la suite sauf un nombre fini de X_p.

Proposition
A est fermé si et seulement si pour toute suite convergente contenue dans A et convergente, la limite est dans A.

3 – Limite et continuité de fonctions

Définition
Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ (où $D \subset \mathbb{R}^n$) a pour limite b en X_0 si $X_0 \in \overline{D}$ et si $\forall\varepsilon > 0\,,\, \exists\delta > 0$ tel que :
$X \in D \;\;,\;\; \|X - X_0\| < \delta \Rightarrow |f(X) - b| < \varepsilon$.

Notation
Dans ce cas $b = \lim\limits_{X\to X_0} f(X)$.

Définition
(i) $f : D \to \mathbb{R}$ est **continue en** $X_0 \in D$ si et seulement si $\lim\limits_{X\to X_0} f(X) = f(X_0)$.
(ii) f est **continue sur** D si et seulement si elle est continue en tout point de D.

Théorème
Si f et g sont continues alors $f + g$, fg , $\dfrac{f}{g}$ et $f \circ g$ sont continues lorsqu'elles sont définies.

Exemples
$f(x\,,\,y) = e^{xy}$ continue sur $\mathbb{R}^2$
$f(x\,,\,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus 0$

Théorème
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :
(i) f est continue sur $\mathbb{R}^n$.
(ii) $\forall b \in \mathbb{R}^n$, $\forall X_p$ avec $X_p \to b$ on a : $f(X_p) \to f(b)$ dans $\mathbb{R}$.
(iii) $\forall\theta$ ouvert de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(\theta) = \{X \in \mathbb{R}^n \,/\, f(X) \in \theta\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
(iv) $\forall F$ fermé de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(F) = \{X \in \mathbb{R}^n \,/\, f(X) \in F\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

Exemples
$f(x\,,\,y) = -\,x^2 + y$
$f(x\,,\,y\,,\,z) = x^2 - y^2 + z^2 + 1$

Remarque
Si $D \neq \mathbb{R}^n$, il faut modifier les points (iii) et (iv), et dire que $f^{-1}(\theta)$ est un ouvert de D et $f^{-1}(F)$ est un fermé de D.

Chapitre 5 : Ensembles compacts

1 – Rappels

Soit $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors :

(i) f est bornée sur $[a\,,\,b]$ s'il existe $M > 0$ tel que pour tout $\in [a\,,\,b]\,,\,|f(x)| \leqslant M$.

(ii) f atteint ses bornes inférieure et supérieure s'il existe c et d dans $[a\,,\,b]$ tel que $f(c) = \inf f(x)$ et $f(d) = \sup f(x)$.

Ceci n'est pas toujours vrai sur des intervalles de type $[a\,,\,b[$ non fermé.

2 – Généralisation

Définition
$X \subset \mathbb{R}^n$ est compact si X est fermé et borné (borné veut dire qu'il existe $R > 0$ tel que $X \subset B(0\,,\,R)$).

Exemples

Théorème (Bolzano-Weierstrass)
Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ compact.
Alors toute suite $(x_n) \subset X$ contient une sous-suite x_{n_k} qui converge vers un point de X.

Remarque
La réciproque de ce théorème est vraie.

3 – Fonctions continues sur un ensemble compact

Théorème
Soit $f : X \to \mathbb{R}$ (avec X compact) continue. Alors :

(i) f est bornée sur X.

(ii) f atteint ses bornes inférieure et supérieure.

Définition
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est uniformément continue si $\forall \varepsilon > 0\,,\,\exists \delta > 0$ tel que $\|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Théorème
Soit f continue de X dans $\mathbb{R}$ avec X compact.
Alors f est uniformément continue sur X.

Chapitre 6 : Dérivées partielles

1 – Rappels

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
La dérivée de f en x, si elle existe, est : $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

2 – Dérivée partielle

Définition
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
On définit la dérivée partielle de f par rapport à x_i par $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_1\,,\,\dots\,,\,x_i + h\,,\,x_{i+1}\,,\,\dots\,,\,x_n) - f(x_1\,,\,\dots\,,\,x_n)}{h}$
si cette limite existe.

Notation
Cela se note $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1\,,\,\dots\,,\,x_n)$, $f_{x_i}(x_1\,,\,\dots\,,\,x_n)$, $D_i f(x_1\,,\,\dots\,,\,x_n)$.
Dans le cas de deux variables on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,\,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h\,,\,y) - f(x\,,\,y)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,\,y) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x\,,\,y+k) - f(x\,,\,y)}{k}$$

Exemple
(1) $f(x\,,\,y) = e^{xy^2}$
(2) $f(x\,,\,y) = x^2 + 3y^2 - 2xy$
(3) $f(x\,,\,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
(4) $f(x\,,\,y\,,\,z) = xy^2 + z$

3 – Interprétation géométrique

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0\,,\,y_0)$ est la pente de la tangente à la courbe $z = f(x\,,\,y_0)$ en $(x_0\,,\,y_0)$.

4 – Gradient

Définition
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction ayant des dérivées partielles.
Son gradient en P, noté $\nabla f(P)$ est le vecteur $\nabla f(P) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(P)\,,\,\dots\,,\,\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(P)\right)$.

Exemple
(1) $f(x\,,\,y) = x^2\,y^3$
(2) $f(x\,,\,y\,,\,z) = x^2\,\sin(yz)$

Remarque
Le gradient peut être considéré comme un vecteur de $\mathbb{R}^n$ mais aussi comme une matrice $1 \times n$.

Théorème
Si f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ avec des gradients, alors :

(i) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$

(ii) $\nabla(cf) = c\,\nabla f$ où $c \in \mathbb{R}$

5 – Dérivées partielles et continuité

Une fonction peut avoir des dérivées partielles sans être continue ! !

Exemples

(1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x\,,\,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < y < x^2 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

a des dérivées partielles en $(0\,,\,0)$ mais n'y est pas continue.

(2) $f(x\,,\,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x\,,\,y) \neq (0\,,\,0) \\ 0 & \text{en}(0\,,\,0) \end{cases}$

admet des dérivées partielles en tout point mais n'est pas continue en $(0\,,\,0)$.

Pour "dépasser" cette difficulté, on définit la différentielle (ou dérivée totale) ou on considère les fonctions ayant des dérivées partielles continues encore appelées fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

6 – Dérivation composée

Théorème
Si g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = f(r(t))$ où f est $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et r dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$, alors g est dérivable et on a $g'(t) = \nabla f(r(t)) \cdot r'(t)$.

Exemple

$f(x\,,\,y) = xy^2$

$r(t) = (t\,,\,t^2)$

7 – Plan tangent

Définition
Soit la surface $z = f(x\,,\,y)$.
Le plan tangent à cette surface en $(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0)$ a pour équation :

$$(z - z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0\,,\,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0\,,\,y_0)(y - y_0)$$

Exemple
La sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Définition
Le plan tangent à la surface S d'équation $f(x\,,\,y\,,\,z) = C$ en $P \in S$ est le plan passant par P et orthogonal à $\nabla f(P)$.

8 – Accroissements finis

Théorème
Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, $X = (x_1\,,\,\ldots\,,\,x_n)$, $H = (h_1\,,\,\ldots\,,\,h_n)$.
Alors il existe $\theta \in]0\,,\,1[$ tel que $f(X+H) - f(X) = \nabla f(X+\theta H)\cdot H$.

9 – Dérivée selon un vecteur

Définition
Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $V \in \mathbb{R}^n$.
La dérivée selon le vecteur V en X est définie par $D_V\,f(X) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(X+tV) - f(X)}{t}$.

Remarque
Si $V = e_i$, on retrouve $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

Proposition
On a $D_V\,f(X) = \nabla f(X)\cdot V$.

Interprétation géométrique du gradient
La variation de f est la plus forte dans la direction de $\nabla f(X)$.

Chapitre 7 : La différentielle

1 – Cas des fonctions d'une variable

(i) f est dérivable en X_0 si $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(X_0+h)-f(X_0)}{h}$ existe.
Sa valeur ℓ est notée $f'(X_0)$.

(ii) On peut, de manière équivalente, écrire $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(X_0+h)-f(X_0)-\ell h}{h} = 0\,.$
On remarque que $h \to L(h) = \ell h$ est une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, que l'on appelle **différentielle** de f en X_0 et que l'on note $df(X_0)$.

(iii) Si f est dérivable en X_0, alors pour h petit : $f(X_0+h)$ est "voisin" de $f(X_0)+f'(X_0)h$.
Donc $h \to f(X_0)+f'(X_0)h$ est une application affine qui "approche" $f(X_0+h)$.

2 – Cas de fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

Définition
f est différentiable en X s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\lim_{\|H\|\to 0} \frac{f(X+H)-f(X)-L(H)}{\|H\|} = 0$$

L'application L est **la différentielle de** f **en** X et se note $df(X)$.

Remarque
Comme dans le cas $n=1$ on a $f(X+H)$ "voisin" de $f(X)+df(X)\cdot H$, on a $f(X+H)$ est "approché" par l'application affine $f(X)+df(X)\cdot H$.
La différentielle, lorsqu'elle existe, est unique.

Proposiition 1
Si f est différentiable en X, alors ses dérivées partielles existent et on a :

$$\begin{aligned} df(X)\cdot H &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(X)\,h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(X)\,h_n \\ &= \nabla f \cdot H \end{aligned}$$

Remarque
La matrice de l'application linéaire $df(X)$ dans la base canonique est le gradient $\nabla f(X)$.

Proposiition 2
Si f est différentiable en X alors f est continue en X.

Remarque
L'existence des dérivées partielles de f n'implique pas la différentiabilité.
Mais :

Théorème 1
Si f admet des dérivées partielles et si elles sont continues alors f est différentiable.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exemples et utilisation

3 – Règle de différentiation

Proposition 3
Si f et g sont différentiables on a :

(i) $d(f+g)(X) = df(X) + dg(X)$

(ii) $d(\lambda f)(X) = \lambda\, df(X)$

(iii) $d(fg)(X) = f(X)\, dg(X) + g(X)\, df(X)$

(iv) $d\left(\dfrac{f}{g}\right)(X) = \dfrac{g(X)\, df(X) - f(X)\, dg(X)}{g^2(X)}$

4 – Remarques

Si $f : U \to \mathbb{R}$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors :

(i) Si f est $\mathcal{C}^1$ sur U alors f est différentiable sur U et les dérivées $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ existent sur U.
Les réciproques ne sont pas vraies!!

(ii) Si f est différentiable en $X_0 \in U$ alors l'application affine $A(H) = f(X_0) + df(X_0) \cdot H$ a pour graphe l'espace tangent au graphe de f en X_0.

Exemple
Droite tangente
Plan tangent

5 – Dérivées partielles successives

Les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)$ sont des fonctions de $x_1, \ldots, x_n$, et il arrive souvent qu'elles sont eux-même dérivables.

Définition
On écrit, lorsqu'elle existe, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)$ et on dit qu'il s'agit d'une **dérivée partielle seconde** de f.

Exemple
$f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x^3y^4$. Alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 12x^2y^3 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$.

Théorème (Schwarz)
Si $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}$ existent et sont continues dans une boule autour de $(a_1 \ldots a_n)$ alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}$$

Chapitre 8 : Formule de Taylor et extrema par les fonctions de deux variables

1 – Rappel

La recherche des **extrema locaux** pour une fonction d'une variable :

(i) On recherche les points critiques ($f'(x) = 0$).

(ii) On étudie la dérivée seconde f'' si a est un point critique et si
$f''(a) > 0$ il y a un minimum local,
$f''(a) < 0$ il y a un maximum local,
$f''(a) = 0$ il faut approfondir l'étude.

2 – Extrema locaux de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

On suppose f de classe $\mathcal{C}^2$, c'est-à-dire que ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 existent et sont continues.

Définition
f a un **minimum** (resp. **maximum**) local en $(x_0\,,\,y_0)$ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que : $\forall (x\,,\,y) \in B((x_0\,,\,y_0)\,,\,\varepsilon)$ alors $f(x\,,\,y) \geqslant f(x_0\,,\,y_0)$ (resp. $f(x\,,\,y) \leqslant f(x_0\,,\,y_0)$).

Exemple
$f(x\,,\,y) = -x^2 - y^2$
$f(x\,,\,y) = x^2 + y^2$
$f(x\,,\,y) = x^2 - y^2$

Proposition 1
Si f admet un **extremum local** en $(x_0\,,\,y_0)$ alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0\,,\,y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0\,,\,y_0) = 0$.

Définition
Si en $(x_0\,,\,y_0)$ on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0\,,\,y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0\,,\,y_0) = 0$ on dit que $(x_0\,,\,y_0)$ est **un point critique**.

Remarque
Un extremum local est un point critique mais la réciproque n'est pas vraie.

3 – Formule de Taylor

Définition Soit $f(x, y)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. La **matrice hessienne** de f en (x_0, y_0) est la matrice $\mathrm{Hess}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$
où $A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0\,,\,y_0)$, $B = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_0\,,\,y_0)$, $C = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0\,,\,y_0)$.

Exemple
Calculer la matrice Hessienne de $f(x\,,\,y) = 4xy - x^4 - y^4$.

Théorème 1 (Formule de Taylor à l'ordre 2, en $X = (x_0, y_0)$)

$$f(X + H) = f(X) + \nabla f(X) \cdot H + \frac{1}{2} H^t \ \mathrm{Hess}(x_0, y_0) \ H + \|H\|^2 \varepsilon(H)$$

Théorème 2
Soient $f(x\,,\,y)$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $(x_0\,,\,y_0)$ un point critique. Soit $\triangle = AC - B^2 = \det(\text{Hess}(x_0, y_0))$. Alors :
si $\triangle > 0$ et $A > 0\,,$ f a un minimum local en $(x_0\,,\,y_0)$
si $\triangle > 0$ et $A < 0\,,$ f a un maximum local en $(x_0\,,\,y_0)$
si $\triangle < 0$, f n'a ni maximum ni minimum, elle a un point selle
si $\triangle = 0$ on ne peut conclure.

4 – Extrema de f sur un compact $K \subset \mathbb{R}^2$

Rappel
f étant continue sur un compact a des minima et maxima sur ce compact.

On procède de la manière suivante :

(i) On cherche les points critiques et les extrema locaux dans $Int(K)$.
(ii) On analyse f sur ∂K.

Exemple
Etude de $f(x\,,\,y) = x^2 - y^2$ sur $K = \{(x\,,\,y) \in \mathbb{R}^2\,/\,x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

5 – Extrema liés (multiplicateur de Lagrange)

Il s'agit de trouver les extrema de $f(x\,,\,y\,,\,z)$ lorsque $(x\,,\,y\,,\,z)$ appartient à une surface S définie par $g(x\,,\,y\,,\,z) = C$.

Exemple
Maximiser $x^2\,y^2\,z^2$ lorsque $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Définition
Un point $P = (x_0\,,\,y_0\,,\,z_0)$ est un minimum (resp. maximum) local pour f, lié à la contrainte $g(x\,,\,y\,,\,z) = C$ si :

(i) $g(P) = C$
(ii) Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(P) \leqslant f(Q)$ (resp. $f(P) \geqslant f(Q)$) pour tout $Q \in S \cap B(P\,,\,\varepsilon)$.

Théorème (de Lagrange)
Soit $f(x\,,\,y\,,\,z)$ et $g(x\,,\,y\,,\,z)$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\nabla g \neq 0$ sur S.
Alors si f admet un **extrema lié** en $(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0)$ on a : $\nabla f(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0) = \lambda\,\nabla g(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ est appelé multiplicateur de Lagrange.

Remarque
Si P est un extremum lié, on a $\nabla f(P)$ parallèle à $\nabla g(P)$.
La réciproque n'est pas vraie.

Exemple
Sur l'exemple précédent on montre la méthode de résolution.

Chapitre 9 : Etude de fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$

1 – Quelques exemples

1. De $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$:
   (a) $F(x\,,\,y) = (e^x\,\cos y\,,\,e^x\,\sin y)$
   (b) $F(r\,,\,\theta) = (r\,\cos\theta\,,\,r\,\sin\theta)$
2. De $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$: $F(X) = \dfrac{X}{\|X\|}$.
3. De $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$: $F(x\,,\,y) = (x\,,\,y\,,\,x^2+y^2)$.
4. De $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ linéaire : $F(x_1\ldots x_n) = A(x_1\ldots x_n)$ où A est une matrice n colonnes et m lignes.
   On peut exprimer F en termes de composantes $F(x_1\ldots x_n) = (f_1(x_1\ldots x_n)\,,\,\ldots\,,\,f_m(x_1\ldots x_n))$.

2 – Limite et continuité

Dans l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^m$ on remplace les habituelles valeurs absolues par des normes.

3 – Différentielle

Définition
F de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est **différentiable** en $X \in \mathbb{R}^n$ s'il existe une **application linéaire** L de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ telle que :

$$\lim_{\|H\|\to 0} \frac{F(X+H) - F(X) - L\cdot H}{\|H\|} = 0\,.$$

L est la **différentielle** de F en X et se note : $dF(X)$.

Théorème 1
F est différentiable en X si et seulement si ses composants sont différentiables et on a :

$$dF(X)\cdot H \;=\; (\nabla f_1(X)\cdot H\,,\,\ldots\,,\,\nabla f_m(X)\cdot H)\,.$$

Définition
La matrice

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(X) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(X) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(X) \end{bmatrix}$$

est la matrice de $dF(X)$ et est appelée **matrice jacobienne** de F en X et se note : $J(F)(X)$.

Théorème 2
Si F a des composantes de classe $\mathcal{C}^1$ alors elles sont différentiables et F est également différentiable.

Exemple

(i) Trouver la matrice jacobienne de F en $(1\,,\,1)$ de : $F(x\,,\,y) = (x^2 + y^2\,,\,e^{xy})$.

(ii) Trouver la différentielle de $F(x\,,\,y\,,\,z) = (x\,,\,y\,,\,z)$.

(iii) Trouver la différentielle de $F(r\,,\,\theta) = (r\,\cos\theta\,,\,r\,\sin\theta)$.

4 – Propriétés de la différentielle

Proposition
Si F de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est linéaire, alors $dF(X) = F$.

Proposition
Si F est différentiable en X alors F est continue en X.

5 – Différentielles des fonctions composées

Si F est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, si G est une fonction de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^q$, alors $G \circ F$ est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^q$.

Théorème 3
Si F est différentiable en X, et si G est différentiable en $F(X)$, alors $G \circ F$ est différentiable en X et on a :

$$d(G \circ F)(X) \quad = \quad dG(F(X)) \circ dF(X)\,.$$

Exemple
$F(x\,,\,y) = (x^2 + y^2\,,\,e^{xy})$
$G(u\,,\,v) = (xy\,,\,\sin x\,,\,x^2\,y)$

Chapitre 10 : Fonctions implicites – Inversion locale

1 – Fonctions implicites : cas $f(x\,,\,y)=0$

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. On considère la courbe de niveau $\{f(x\,,\,y)=0\}=L_0$.

Définition
On dit que la fonction $y=\varphi(x)$ est **définie implicitement par** $f(x\,,\,y)=0$ si $f(x\,,\,\varphi(x))=0$, c'est-à-dire si $(x\,,\,\varphi(x))\in L_0$.
Alors on dit que $y=\varphi(x)$ est une **fonction implicite** de $f(x\,,\,y)=0$.

Exemple
$f(x\,,\,y)=\ln(xy)-\sin x\quad$ avec $xy>0$
$f(x\,,\,y)=x^2+y^2-1$

Théorème (des fonctions implicites)
Soient $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $(x_0\,,\,y_0)$ un point tel que $f(x_0\,,\,y_0)=0$.
Si $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0\,,\,y_0)\neq 0$ alors :

(i) Il existe une fonction implicite $y=\varphi(x)$ de classe $\mathcal{C}^1$, définie sur l'intervalle ouvert $B(x_0\,,\,\varepsilon)$, tel que $f(x\,,\,\varphi(x))=0$ et $y_0=\varphi(x_0)$.

(ii) La dérivée de φ est donnée par $\varphi'(x)=\dfrac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,\,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,\,\varphi(x))}$ en tout point où $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x\,,\,\varphi(x))\neq 0$.

Exemple : étude au point $(1\,,\,1)$ de $f(x\,,\,y)=x^2\,y+3y^3\,x^4-4$

2 – Fonctions implicites : cas $f(x_1\,\ldots\,x_n)=0$

Théorème
Si $f\colon\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et si $\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\,(X_0)\neq 0$ alors :

(i) La fonction implicite $x_n=\varphi(x_1\,\ldots\,x_{n-1})$ existe sur une boule ouverte $B((x_{1,0}\,\ldots\,x_{n-1,0})\,,\,\varepsilon)$ et on a : $f(x_1\,\ldots\,x_{n-1}\,,\,\varphi(x_1\,\ldots\,x_{n-1}))=0$.

(ii) $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}\;=\;\dfrac{-\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1\,\ldots\,x_{n-1}\,,\,\varphi(x_1\,\ldots\,x_{n-1}))}{\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1\,\ldots\,x_{n-1}\,,\,\varphi(x_1\,\ldots\,x_{n-1}))}$

3 – Inversion locale

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, F une application de U dans $\mathbb{R}^n$ et $V=F(U)\subset\mathbb{R}^n$.

Définition
F est **inversible** sur U s'il existe une application G de V dans $\mathbb{R}^n$ telle que $G\circ F=\mathbf{1}_U$ et $F\circ G=\mathbf{1}_V$.

Exemples

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad$ avec $f(x) = x^3$

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad$ avec $f(x) = x^2$

(3) Si $A \in \mathbb{R}^n$, soit F de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ avec $F(X) = X + A$.

(4) $U = \{(r\,,\,\theta)\ /\ r > 0\,,\,0 < \theta < \pi\}$
$F(r\,,\,\theta) = r\,\cos\theta\,,\,r\,\sin\theta$

Définition
F de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est **localement inversible** en $X \in \mathbb{R}^n$ s'il existe des ouverts U et V avec $X \in U$ et $F(X) \in V$ et $F(U) = V$ tel que F est inversible sur U.

Théorème (de l'inversion locale)
Soit F de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$.
On a équivalence entre :

(i) La matrice jacobienne $J_X(F)$ est inversible (c'est-à-dire $\det J_X(F) \neq 0$).

(ii) F est localement inversible en X.

Cours de LICENCE
VAR : Fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples, courbes paramétrées
Deuxième partie : Calcul intégral

Chapitre 1 : Intégration des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

1 – Rappel : Intégration des fonctions d'une variable

Soit $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ bornée.

a) Cas où f est en escalier.
Il existe une partition $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ telle que f est constante sur chaque intervalle $]t_i\,,\,t_{i+1}[$ $(f(x) = C_i)$.
Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n-1} C_i\,(t_{i+1} - t_i)$.

b) Si f est bornée on l'approche par des fonctions en escalier.

Définition
f est **intégrable** sur $[a\,,\,b]$ s'il existe un nombre unique I tel que pour toutes fonctions en escalier $u\,,\,v$ sur $[a\,,\,b]$ vérifiant $u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$ on a :

$$\int_a^b u(x)\,dx \quad \leqslant \quad I \quad \leqslant \quad \int_a^b v(x)dx$$

et si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des fonctions en escalier u_ε et v_ε vérifiant :

$$u_\varepsilon(x) \quad \leqslant \quad f(x) \quad \leqslant \quad v_\varepsilon(x)$$

et

$$0 \quad \leqslant \quad \int_a^b v_\varepsilon(x)\,dx - \int_a^b u_\varepsilon(x)\,dx \quad < \quad \varepsilon$$

Notation : I s'appelle l'intégrale de f sur $[a\,,\,b]$ et se note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

2 – Intégration des fonctions de plusieurs variables

Soit $f : [a_1\,,\,b_1] \times [a_2\,,\,b_2] \times\ \ldots\ \times [a_n\,,\,b_n] \to \mathbb{R}$.
Ici on considère le cas $R = [a\,,\,b] \times [c\,,\,d] \subset \mathbb{R}^2$.

a) f est en escalier.
Il existe une partition de $[a\,,\,b] \times [c\,,\,d]$:
$a = s_0 < s_1 < s_2 < \ \ldots\ < s_m = b$
$c = t_0 < t_1 < \ \ldots\ < t_n = d$
telle que f est constante à l'intérieur de chaque rectangle $]s_i\,,\,s_{i+1}[\times]t_j\,,\,t_{j+1}[$ (où elle vaut C_{ij}).
On définit $\displaystyle\iint_R f(x\,,\,y)\,dx\,dy = \sum_{i\,,\,j} C_{ij}\,(s_{i+1} - s_i)\,(t_{j+1} - t_j)$.

b) f est bornée sur $R = [a\,,\,b] \times [c\,,\,d]$.
On approche f par des fonctions en escalier.

Définition
f est **intégrable** sur R s'il existe un nombre unique I tel que pour toutes fonctions en escalier $u(x\,,\,y)$ et $v(x\,,\,y)$, telles que $u(x\,,\,y) \leqslant f(x\,,\,y) \leqslant v(x\,,\,y)$, on a :

$$\iint_R u(x\,,\,y)\,dx\,dy \quad \leqslant \quad I \quad \leqslant \quad \iint_R v(x\,,\,y)\,dx\,dy$$

et si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions en escalier u_ε et v_ε telles que :

$$u_\varepsilon(x\,,\,y) \quad \leqslant \quad f(x\,,\,y) \quad \leqslant \quad v_\varepsilon(x\,,\,y)$$

et

$$0 \quad \leqslant \quad \int_R v_\varepsilon(x\,,\,y)\,dx\,dy - \int_R u_\varepsilon(x\,,\,y)\,dx\,dy \quad < \quad \varepsilon$$

Notation : I s'appelle l'intégrale de f sur R et se note $\displaystyle\iint_R f(x\,,\,y)\,dx\,dy$.

Proposition (Propriétés de l'intégrale double)

1. Si f est continue sur R alors f est intégrable.
2. Si f est positive sur R alors $\displaystyle\iint_R f(x\,,\,y)\,dx\,dy$ est le volume sous le graphe de f au-dessus de R.
3. $\displaystyle\iint_R (\alpha f + \beta g)\,(x\,,\,y)\,dx\,dy = \alpha \iint_R f(x\,,\,y)\,dx\,dy + \beta \iint_R g(x\,,\,y)\,dx\,dy$.
4. Si $R = R_1 \cup R_2$ avec $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ alors :

$$\iint_R f(x\,,\,y)\,dx\,dy = \iint_{R_1} f(x\,,\,y)\,dx\,dy + \iint_{R_2} f(x\,,\,y)\,dx\,dy$$

Théorème
Si f est continue sur R alors $\displaystyle\iint_R f(x\,,\,y)\,dx\,dy$ existe.

3 – Calcul des intégrales doubles

Théorème de Fubini
Si f est continue sur $R = [a\,,\,b] \times [c\,,\,d]$ alors :

$$\iint_R f(x\,,\,y)\,dx\,dy \quad = \quad \int_a^b \left(\int_c^d f(x\,,\,y)\,dy \right) dx \quad = \quad \int_c^d \left(\int_a^b f(x\,,\,y)\,dx \right) dy$$

Exemple

(1) $\displaystyle\iint_R (x^2 + y^2)\,dx\,dy \qquad R = [0\,,\,1] \times [0\,,\,1]$

(2) $\displaystyle\iint_R (1 + x + y)\,dx\,dy \qquad R = [0\,,\,1] \times [0\,,\,1]$

Interprétation géométrique du théorème
Notion de volume sous une surface

4 – Intégration sur les régions bornées de $\mathbb{R}^2$

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ où $D \subset \mathbb{R}^2$ est non rectangulaire.
On considère un rectangle R tel que $D \subset R$ et on définit $\overline{f}$ sur R avec :

$$\overline{f}(x\,,\,y) = \begin{cases} f(x\,,\,y) & \text{si } (x\,,\,y) \in D \\ 0 & \text{si } (x\,,\,y) \notin D \end{cases}$$

Définition
Avec les notations précédentes on pose, si cela a un sens :

$$\iint_D f(x\,,\,y)\,dx\,dy \quad = \quad \iint_R \overline{f}(x\,,\,y)\,dx\,dy$$

On peut se ramener à deux types de domaine D :

Type 1 : $D = \left\{ (x\,,\,y) \quad / \quad \begin{array}{c} a \leqslant x \leqslant b \\ g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x) \end{array} \right\}$ où g_1 et g_2 sont continues.

Type 2 : $D = \left\{ (x\,,\,y) \quad / \quad \begin{array}{c} c \leqslant y \leqslant d \\ h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(y) \end{array} \right\}$.

Théorème de Fubini

a) Si f est continue sur D de type 1, alors f est intégrable et on a :

$$\iint_D f(x\,,\,y)\,dx\,dy \quad = \quad \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x\,,\,y)\,dy \right) dx$$

b) Si f est continue sur D de type 2, alors f est intégrable et on a :

$$\iint_D f(x\,,\,y)\,dx\,dy \quad = \quad \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x\,,\,y)\,dx \right) dy$$

Exemples

(1) $\displaystyle\iint_D (x + 2y)\,dx\,dy$: D est la région entre les deux paraboles $y = 2x^2$ et $y = 1 + x^2$.

(2) $\displaystyle\iint_D e^{x^2}\,dx\,dy$ sur le triangle $D = \left\{ (x\,,\,y) \quad / \quad \begin{array}{c} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant x \end{array} \right\}$.

Définition
Si D est un domaine borné, on appelle **aire de** D : $\text{aire}(D) = \displaystyle\iint_D 1\,dx\,dy$.

5 – Intégrale double et changement de variables

Rappel à une variable :

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad \int_c^d f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

où g est bijection de $[c\,,\,d]$ sur $[a\,,\,b]$.

Proposition
Si $G(u\,,\,v) = (x(u\,,\,v)\,,\,y(u\,,\,v))$:

$$\iint_{G(S)} f(x\,,\,y)\,dx\,dy \quad = \quad \iint_S f(x(u\,,\,v)\,,\,y(u\,,\,v))\;|\det \mathrm{Jac}(G(u\,,\,v))|\;du\,dv$$

avec $\mathrm{Jac}(G(u\,,\,v)) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ & \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$.

Cas des coordonnées polaires
$x = x(r\,,\,\theta) = r\cos\theta$
$y = y(r\,,\,\theta) = r\sin\theta$

$$J(G) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\,r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

d'où $\displaystyle\iint_{R=G(S)} f(x\,,\,y)\,dx\,dy \;=\; \iint_S f(r\cos\theta\,,\,r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta.$

Exemples

(1) Calcul de l'aire d'un disque.

(2) $\displaystyle\iint_D e^{(-\,x^2-y^2)}\,dx\,dy$ où D est le disque unité.

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\,x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,.$

(4) $\displaystyle\iint_R e^{(y-x)/y+x}\,dx\,dy$ où $R = \begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$ avec $x + y \leqslant 2$.

6 – Justification du théorème de changement de coordonnées

7 – Intégrales triples

$$\iiint_R f(x\,,\,y\,,\,z)\,dx\,dy\,dz$$

Exemples

Changement de variables en dimension 3.

Chapitre 2 : Champs de vecteurs et intégrales curvilignes

1 – Définition

Définition
Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert.
Un **champ de vecteurs** sur U est une application F de U dans $\mathbb{R}^n$ de classe C^1.
F associe à chaque point un vecteur.

Exemples

(1) $F(x\,,\,y) \;=\; (-\,y\,,\,x)$

(2) $F(x\,,\,y) \;=\; (1\,,\,0)$

(3) $F(x\,,\,y\,,\,z) \;=\; (x\,,\,y\,,\,z)$

(4) $F(X) = \dfrac{X}{\|X\|}$ si $X \neq 0$

(5) Si f est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, soit $F(x) = \bigtriangledown f(x)$.
Ce champ de vecteurs est appelé champ de gradients.

2 – Intégrale curviligne

Définition
Soient $r : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée de classe C^1 et F un champ de vecteurs défini sur l'image de r (qui est une courbe C).
Alors on pose :

$$\int_C F\,dr \;=\; \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t)\,dt$$

Cette quantité s'appelle **intégrale curviligne** de F sur C.

Exemples
$r(t) = (t\,,\,t^n)\;,\; 0 \leqslant t \leqslant 1$
$F(x\,,\,y) = (-\,y\,,\,x)$

Interprétation : notion de travail d'une force

Proposition
Les principales propriétés sont :

$$\int_C (aF_1 + bF_2)\,dr = a\int_C F_1\,dr + b\int_C F_2\,dr$$

Si C est paramétré dans un sens par r, dans l'autre par s, on a : $\displaystyle\int_C F\,dr = -\int_C F\,ds\,.$

Si $C = C_1 + C_2$ alors : $\displaystyle\int_C F\,dr = \int_{C_1} F\,dr + \int_{C_2} F\,dr\,.$

3 – Champs de gradient et indépendance de chemin

Définition
F champ de vecteurs est un **champ de gradient** s'il existe f de U dans $\mathbb{R}$ telle que $F = \bigtriangledown f$.

Exemple
$F(x\,,\,y) = (y\,,\,x)$

Théorème 1
Si F est un champ de gradient alors $\displaystyle\int_C F\,dr$ ne dépend que des extrémités de C.

Théorème 2
On a équivalence entre :

- F est un champ de gradient.
- $\displaystyle\int_C F\,dr$ ne dépend que des extrémités de C et ceci pour tout chemin de C.

Proposition
Si $F = (F_1\,,\,F_2\,,\,\ldots\,,\,F_n)$ est un champ de gradient alors :

$$\forall i\,,\,\forall j \quad , \quad \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

Théorème 3
Soit F un champ de vecteurs sur U.
Si U est un ouvert étoilé alors F est un champ de gradient si et seulement si $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial F_j}{\partial x_i}$ pour tout i et tout j.

Chapitre 3 : Théorème de Green-Riemann

Soit $S \subset \mathbb{R}^2$ un domaine compact délimité par une courbe fermée, simple et C^1 par morceaux.
On oriente $C = \partial S$ en disant que le sens direct est celui qui laisse S à gauche.

Théorème (de Green-Riemann)
Soient S un domaine compact, $C = \partial S$ son bord orienté positivement.
Si $F(x\,,\,y) = (f_1(x\,,\,y)\,,\,f_2(x\,,\,y))$ alors $\displaystyle\int_C F\,dr = \iint_S \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dx\,dy\,.$

Notation
Voici une autre façon, équivalente, d'énoncer la conclusion du théorème de Green-Riemann :
Si $F = (P\,,\,Q)$: $\displaystyle\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy\,.$
En plus, au lieu de $\displaystyle\int_C$ on écrit parfois $\displaystyle\oint_C$ pour rappeler que le chemin C est une boucle.

Exemples

Corollaire
Aire $S = \displaystyle\int_C x\,dy = \frac{1}{2}\int -y\,dx + x\,dy\,.$

Application de Green-Riemann
Si $G(u\,,\,v) = (x(u\,,\,v)\,,\,y(u\,,\,v))$ est un changement de variables d'un domaine R à un domaine $G(R)$ alors :

$$\iint_{G(R)} dx\,dy \quad = \quad \iint_R |\det J(G)|\,du\,dv$$

Chapitre 4 : Intégrales de surface

1 – Surface de $\mathbb{R}^3$

On peut décrire une surface de $\mathbb{R}^3$ de trois manières :

a) Surface de niveau
$S = \{(x\,,\,y\,,\,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; f(x\,,\,y\,,\,z) = 0\}$ où f est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
Exemple : $f(x\,,\,y\,,\,z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$.

b) Graphe d'une fonction $z = f(x\,,\,y)$
Exemple : $z = x^2 + y^2$.

c) Surface paramétrée
Soit $r : T \to \mathbb{R}^2$ où $T \subset \mathbb{R}^2$: $r(u\,,\,v) = \{x(u\,,\,v)\,,\,y(u\,,\,v)\,,\,z(u\,,\,v)\}$.
Exemple : sphère, cône en coordonnées sphériques ou cylindriques.

2 – Aire de $S = r(T)$

On a Aire $(T) = \displaystyle\iint 1\,du\,dv$.

Définition
On pose : Aire $(S) = \displaystyle\iint_T \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} \right\| du\,dv$.

1) Si r est injective alors $S = r(T)$ est une surface paramétrée **simple**.
2) Si $\left\| \dfrac{\partial r}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial r}{\partial v} \right\| \neq 0$ sur T, alors $S = r(T)$ est dite **lisse** (on suppose r de classe C^1).

Cas particulier : S est définie par $z = f(x\,,\,y)$ alors Aire$(S) = \displaystyle\iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy.$

Exemple
Aire du paraboloïde
Aire de la sphère

3 – Intégrale de surface

Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est bornée sur $S = r(T)$. Alors :

Définition
On appelle **intégrale de surface** $\displaystyle\iint_{r(T)} f\,dS \;=\; \iint_T f(r(u\,,\,v)) \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} \right\| du\,dv.$

Exemple
Calcul d'aire
Recherche de centre de gravité

4 – Changement de paramétrisation

Proposition
L'intégrale de surface est inchangée quand on change de paramétrisation.

5 – Champs de vecteurs

Soient $F(x\,,\,y\,,\,z) = (P(x\,,\,y\,,\,z)\,,\,Q(x\,,\,y\,,\,z)\,,\,R(x\,,\,y\,,\,z))$ défini sur $S = r(T)$.
Soit $N = \dfrac{\partial r}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial r}{\partial v}$ la normale à S, et $n = \dfrac{N}{\|N\|}$ la normale unitaire.

Définition
On appelle **flux de F à travers S** l'intégrale $\displaystyle\iint F \cdot n\; dS$.

Proposition
On a $\displaystyle\iint_S F \cdot n\; dS = \iint_T F(r(u\,,\,v)) \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v}\right) du\,dv$.

Exemple
Calculer le flux de $(y\,,\,-x\,,\,1)$ à travers la demi sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2\,,\; z \geqslant 0$.

Notation : le flux se note $\displaystyle\iint P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy\,.$

6 – Théorème de Stokes

Définition
Soit $F = (P(x\,,\,y\,,\,z)\,,\,Q(x\,,\,y\,,\,z)\,,\,R(x\,,\,y\,,\,z))$ un champ de vecteurs de classe C^1 dans $\mathbb{R}^3$. Le **rotationnel** de F est
$\operatorname{rot}(F) = \left(\dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z}\,,\; \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x}\,,\; \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)$.
Formellement, avec la notation $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, on peut définir $\operatorname{rot}(F) = \nabla \wedge F$.

Théorème (Stokes)
Soit F un champ de vecteurs de classe C^1, défini sur un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^3$ qui contient S. Supposons que le bord de S est une courbe C. Alors on a :
$\displaystyle\int_S (\operatorname{rot} F) \cdot n\; dS = \int_C F\,d\alpha\,.$

Remarque
Dans le cas où $S \subset \mathbb{R}^2$, on retrouve Green-Riemann.

Exemple
Vérification de Stokes avec S paraboloïde $z = 4x^2 - y^2\,,\; z \geqslant 0$: $F(x\,,\,y\,,\,z) = (z - y\,,\,z + x\,,\,-x - y)$.

7 – Interprétation physique - Notion de flux conservatif

8 – Démonstration du théorème de Stokes dans le cas où S est donnée par $z = f(x\,,\,y)$

9 – Divergence - Théorème de Gauss Ostrogradsky

Définition
Soit $F = (F_1, F_2, F_3)$ un champ de vecteurs de classe C^1 dans $\mathbb{R}^3$. La **divergence** de F est $\operatorname{div}(F) = \dfrac{\partial F_1}{\partial x} + \dfrac{\partial F_2}{\partial y} + \dfrac{\partial F_3}{\partial z}$.
Formellement, on peut écrire $\operatorname{div}(F) = \nabla \cdot F$.

Théorème
Soit $V \subset \mathbb{R}^3$ un volume délimité par une surface S fermée et orientée.
Soient n le vecteur unitaire normal vers l'extérieur et F un champ de vecteurs de classe C^1.
Alors :

$$\iiint_V \operatorname{div}(F)\,dx\,dy\,dz \quad = \quad \iint_S F \cdot n\,dS$$

Exemple
Calcul du flux de $F(x\,,\,y\,,\,z) = (x\,,\,0\,,\,0)$ à travers la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

LICENCE
VAR : Fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples, courbes paramétrées

Feuille d'Exercices 1

Exercice 1.1
Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. Montrer les identités suivantes :

(a) $x \cdot y = \dfrac{1}{4}\ (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$

(b) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\ (\|x\|^2 + \|y\|^2)$

Exercice 1.2
Trouver l'équation du plan $P \subset \mathbb{R}^3$ passant par $A = (4, 2, -1)$ et orthogonal à $\vec{n} = (1, -1, 3)$.

Exercice 1.3
Trouver l'équation du plan $P \subset \mathbb{R}^3$ passant par les trois points suivants : $(2, 1, 1)$, $(3, -1, 1)$, $(4, 1, -1)$.

Exercice 1.4

1. Si $x, y \in \mathbb{R}^3$ tel que $x \wedge y = \vec{0}$ et $x \cdot y = 0$, montrer qu'au moins un des vecteurs x ou y est nul.
2. Si $x \neq \vec{0}$, $x \wedge y = x \wedge z$ et $x \cdot y = x \cdot z$, montrer que $y = z$.

Exercice 1.5
Soient $x = (x_1\ , \ x_2)$, $y = (y_1\ , \ y_2)$ et $P \subset \mathbb{R}^2$ le parallèlogramme engendré par x, y .
Utiliser le produit vectoriel afin de montrer que l'aire de P est donnée par $|\det(x, y)| = |x_1\, y_2 - x_2\, y_1|$.

Exercice 1.6
Considérons la parallèlépipède $P \subset \mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs x , y , z .

1. Montrer que le volume de P est donné par le "produit mixte" $(x \wedge y) \cdot z$.
2. Déduire que vol(P) est également donné par $|\det(x, y, z)|$.

Exercice 1.7
Considérons $F(t) = \left(\dfrac{2t}{1+t^2}\ ,\ \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\ ,\ 1\right)$.
Montrer que l'angle entre $F(t)$ et $F'(t)$ est constant.

Exercice 1.8
Considérons l'hélice $F(t) = (a\ \cos t\ ,\ a \sin t\ ,\ bt)$ avec $a, b > 0$.
Montrer que l'angle entre l'axe Oz et la droite tangente est constante et $\cos\theta = b/\sqrt{a^2 + b^2}$.

Exercice 1.9
Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ une courbe telle que $F(t_0) = X_0 \neq \vec{0}$ soit le point le plus proche de l'origine.
Montrer que $F'(t_0)$ est orthogonal à $F(t_0)$.

Exercice 1.10
Si $F(t)$ et $\|F(t)\|$ sont intégrables sur $[a, b]$, montrer que :

$$\| \int_a^b F(t)\, dt \| \leqslant \int_a^b \|F(t)\|\, dt$$

Déduire que le chemin le plus court entre deux points A et B dans $\mathbb{R}^n$ passe par le segment $\overline{AB}$.

Exercice 1.11
On considère $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire

$$\begin{aligned}(x_1\,,\,x_2)\circ(y_1\,,\,y_2) &\equiv (x_1\,,\,x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= x_1\, y_1 + 2x_2\, y_2\end{aligned}$$

1. Calculer la longueur de $V_1 = (1, 1)$ et $V_2 = (1, -1)$ ainsi que l'angle entre V_1 , V_2.
2. Montrer que ce produit scalaire vérifie les propriétés PS1-PS5 du cours.

Courbure

Exercice 1.12
Considérons l'hélice $\gamma(t) = (\cos t\,,\, \sin t\,,\, t)$.

1. Calculer l'abscisse curviligne $s(t) = \displaystyle\int_0^t \|\gamma'(u)\|\, du$.
2. Trouver la paramétrisation unitaire $\gamma(s) = \gamma(t(s))$ de l'hélice.
3. Calculer la courbure $\rho(s)$ de $\gamma(s)$.

Exercice 1.13
Soit $\gamma(s)$ une courbe paramétrée unitaire dans le plan $\mathbb{R}^2$.
Montrer que $\rho(s) = \left|\dfrac{d\phi}{ds}\right|$ où $\phi(s)$ est l'angle entre le vecteur tangent $\gamma'(s)$ et le vecteur $e_1 = (1, 0)$.

Exercice 1.14
Soit $\gamma(t) \in \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée.
Il est parfois utile de pouvoir calculer ρ directement, sans passer par une paramétrisation unitaire de γ.
Montrer que $\rho = \|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\| \,/\, \|\gamma'(t)\|^3$.

Exercice 1.15
Trouver la courbure de la spirale $\gamma(t) = (e^{-t}\cos t\,,\, e^{-t}\sin t\,,\, 0)$.
Que se passe-t-il lorsque $t \to \infty$?

Exercice 1.16
Soit $\gamma(s) \subset \mathbb{R}^3$ telle que $\|\gamma(s)\| = \|\gamma'(s)\| = 1$, $\forall s$. (Géométriquement, ceci veut dire que la courbe γ se ballade sur la sphère de rayon 1 et de centre $(0, 0, 0)$, et qu'elle est de vitesse 1.)
Montrer que $\rho(s) \geqslant 1$.
(Indication : utiliser produit scalaire + inégalité de Cauchy-Schwarz)

Produit Scalaire

Exercice 1.17

Calculer l'angle entre les vecteurs $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ dans $\mathbb{R}^n$.

Que se passe-t-il lorsque $n \to \infty$?

Exercice 1.18
Notons par $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ l'ensemble des fonctions continues $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ est un espace vectoriel.
2. Montrer que $\langle f, g\rangle \equiv \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([0, 2\pi])$.
   ($\mathcal{C}([0, 2\pi])$ est-il de dimension finie ou infinie selon vous ?)
3. Montrer que les fonctions $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\dfrac{\cos mx}{\sqrt{\pi}}$, $\dfrac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$ $(n, m = 1, 2, ...)$ sont orthogonaux sur $[0, 2\pi]$.
   (On peut calculer directement. Autrement, on peut montrer que $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{inx}e^{-imx}dx = \delta_{nm}$.)

LICENCE
VAR : Fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples, courbes paramétrées

Feuille d'Exercices 2

Exercice 2.1
Donner l'ensemble de définition et l'image de $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2 - y^2}$.

Exercice 2.2
Dessiner le graphe de $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$.

Exercice 2.3
Dessiner le graphe de $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13$.

Exercice 2.4
Dessiner la surface $S = \{(x,y,z) | z = -y^2\} \subset \mathbb{R}^3$.

Exercice 2.5
Tracer les courbes de niveau pour les fonctions suivantes :

(a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ (on pourra utiliser les coordonnées polaires)
(b) $f(x,y) = x^2 - y^2$
(c) $f(x,y) = e^{xy}$

Exercice 2.6
Montrer que la fonction $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ est continue en $(0,0)$.

Exercice 2.7
Si $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont continues, montrer que $f + g$ est continue.

Exercice 2.8
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction ayant la propriété : "$f^{-1}(I)$ est ouvert pour tout intervalle ouvert I dans $\mathbb{R}$".
Montrer que f est continue.

Exercice 2.9
Lesquels des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ sont ouverts ?

(a) $\{(x,y) \mid |x| < 1 \text{ et } |y| < 1\}$
(b) $\{(x,y) \mid xy < 1\}$
(c) $\{(x,y) \mid y > x^2 \text{ et } |x| < 2\}$
(d) $\{(x,y) \mid x > y\}$

Exercice 2.10
Donner l'intérieur, l'extérieur et la frontière des sous-espaces de $\mathbb{R}^2$ suivants :

(a) $\{(x,y) \mid 1 < x^2 + y^2 \leqslant 2\}$

(b) $\left\{\left(x \ , \ \sin \dfrac{1}{x}\right) \mid x > 0\right\}$

(c) $\{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 2.11
Soit $X \subset \mathbb{R}^n$. Montrer que ∂X est fermé.

LICENCE
VAR : Fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples, courbes paramétrées

Feuille d'Exercices 3

Exercice 3.1
Lesquels des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}^2$) sont compacts ?

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$
(b) $[0\ ,\ +\infty[$
(c) les rationnels, $\mathbb{Q}$
(d) $\mathbb{Q} \cap [0,1]$
(e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
(f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } y = x^2\}$
(g) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{x}\right\}$

Exercice 3.2
Soient $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ compacts. Montrer que $X \cap Y$ et $X \cup Y$ sont compacts.

Exercice 3.3
Soient $X \subset \mathbb{R}^n$ compact, $f : X \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $f(X) \subset \mathbb{R}$ est compact.

Exercice 3.4
Soient $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ compacts. Montrer que $X \times Y \subset \mathbb{R}^{m+n}$ est compact.

Exercice 3.5
Calculer les dérivées partielles de $f(x,y) = \mathrm{Ln}(xy)$.

Exercice 3.6
On appelle fonction homogène d'ordre α toute fonction vérifiant $f(\lambda x\ ,\ \lambda y) = \lambda^\alpha\ f(x,y)\ ,\ \forall \lambda > 0\,.$
Montrer que $f(x,y)$ homogène vérifie l'identité d'Euler : $x\ \dfrac{\partial f}{\partial x} + y\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$.

Exercice 3.7
Les côtés d'une boîte (longueur, largeur et hauteur) grandissent à une vitesse de 1 cm/sec., 2 cm/sec. et 3 cm/sec. respectivement.
A quelle vitesse le volume s'accroît-il lorsque longueur = 2 cm, largeur = 3 cm et hauteur = 6 cm ?

Exercice 3.8
Soit $g(t) = f(x_0 + \alpha t\ ,\ y_0 + \beta t)$. Calculer $g'(0)\,.$

Exercice 3.9
Trouver l'équation du plan tangent à la surface donnée par le graphe de $f(x,y) = x^2 + y^2$ au point (2,2,8).

Exercice 3.10
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On pose $g(x,y) = f(x-y\ ,\ y-x)$. Calculer $\dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y}$.

LICENCE
VAR : Fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples, courbes paramétrées

Feuille d'Exercices 4

Exercice 4.1
Soit f la fonction définie sur $\{(x\,,\,y)\,/\,y \neq 0\}$ par : $f(x\,,\,y) = \dfrac{1+x^2+y^2}{y}\,\sin y$.
Montrer que cette fonction est continue et étudier ses prolongements possibles.

Exercice 4.2
Même question pour $g(x\,,\,y) = \dfrac{1+x+y}{x^2-y^2}$ définie sur $\{(x\,,\,y)\,/\,x^2 \neq y^2\}$.

Exercice 4.3
Même question pour $h(x\,,\,y) = \dfrac{|y|}{x^2}\;e^{-\frac{|y|}{x^2}}$.

Exercice 4.4
Soit E l'ensemble des éléments $(x\,,\,y)$ de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $1 \leqslant |x|+|y| \leqslant 2$.
Montrer que E est fermé.
La formule $f(x\,,\,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ définit-elle sur E une fonction continue ?
Trouver les points où f atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure.

Exercice 4.5
On considère la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x\,,\,y) = \sup\left\{\dfrac{x}{1+|y|}\,,\,\dfrac{y}{1+|x|}\right\}$.
Cette fonction est-elle continue ?

Exercice 4.6
On donne deux fonctions g et h de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et on suppose que la dérivée de h ne s'annule pas.
Montrer que la fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x\,,\,y) = \dfrac{g(x)-g(y)}{h(x)-h(y)}$ où $h(x) \neq h(y)$ a un prolongement continu sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4.7
Parmi les applications suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, dire (en vous justifiant) lesquelles sont continues et lesquelles sont discontinues. (Indication : dans plusieurs cas, on peut utiliser des coordonnées polaires.)

$f_1(x\,,\,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ $\qquad f_2(x\,,\,y) = y\,\sin x$ $\qquad f_3(x\,,\,y) = (x^2+y^2)\,\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$

$f_4(x\,,\,y) = y\,\sin\dfrac{1}{x}$ $\qquad f_5(x\,,\,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ $\qquad f_6(x\,,\,y) = \dfrac{y}{x^2}\;e^{-\frac{|y|}{x^2}}$

Exercice 4.8
Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On note φ l'application définie sur $\{(x\,,\,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y \neq 0\}$ par : $\varphi(x\,,\,y) = (x+y)\; f\left(\dfrac{x}{y}\right)$.
Montrer que φ est continue.
Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que φ puisse être prolongée continuement sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4.9
Etudier la continuité de la fonction f définie par :
$f(x\,,\,y) = x^2$ si $|x| \leqslant |y|$
$f(x\,,\,y) = y^2$ si $|x| > |y|$

Exercice 4.10
Montrer que la fonction f définie par : $f(x\,,\,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ a une limite lorsque $\|(x\,,\,y)\|$ tend vers l'infini.

Exercice 4.11
Montrer que l'application définie par :

$$
\begin{array}{ll}
f(x\,,\,y) = \dfrac{x^4}{y(y-x^2)} & \text{si } y \neq 0 \text{ et } y - x^2 \neq 0 \\
f(x\,,\,y) = 0 & \text{si } y = 0 \text{ ou si } y - x^2 = 0
\end{array}
$$

n'est pas continue en $(0\,,\,0)$ mais que ses restrictions à toute droite passant par l'origine sont continues en ce point.

LICENCE
VAR : Fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples, courbes paramétrées

Feuille d'Exercices 5

Exercice 5.1
Trouver l'équation du plan tangent à la surface $S = \{(x, y, z) \mid xyz = 1\}$ en $(2, 1, \frac{1}{2})$.

Exercice 5.2
Considérons les sphères $S_1 : (x - c)^2 + y^2 + z^2 = 3$ et $S_2 : x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1$.
Trouver une valeur de c pour laquelle, à tout point d'intersection de S_1 et S_2, les plans tangents sont orthogonaux.

Exercice 5.3
Soit $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$.
Dans quelle direction f s'accroît-elle le plus rapidement au point $(-1, 1)$?
Trouver la dérivée directionnelle dans cette direction.

Exercice 5.4
Trouver une dérivée directionnelle de $f(x, y, z) = 3x - 5y + 2z$ en $(2, 2, 1)$ dans la direction de la normale (extérieure) à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Exercice 5.5
Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur la boule $B(X_0\,;\, r) \subset \mathbb{R}^n$.
Si $\dfrac{\partial f}{\partial X_1} = \cdots = \dfrac{\partial f}{\partial X_n} = 0$ sur $B(X_0\,;\, r)$, montrer que f est constante sur la boule.

Exercice 5.6
Soient $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application linéaire, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application telle que $|g(x)| \leqslant \|x\|^2$.
Posons $f(x) = L(x) + g(x)$.
Montrer que $Df(0) = L$.

Exercice 5.7
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \|x\|^2$.
Déterminer les points x pour lesquels f est différentiable, ainsi que la différentielle.

LICENCE
VAR : Fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples, courbes paramétrées

Feuille d'Exercices 6

Exercice 6.1
Déterminer tous les extrema locaux et absolus ainsi que les points de selle de la fonction $f(x,y) = xy(1-x^2-y^2)$ sur le carré $\{(x,y) \,|\, 0 \leqslant x \leqslant 1\ ,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.

Exercice 6.2
La température sur la sphère $x^2+y^2+z^2 = 4$ est donnée par $T(x,y,z) = 2 + xz + y^2$.
Trouver les points les plus chauds et ceux les plus froids.

Exercice 6.3
Cet exercice a pour but de démontrer l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leqslant \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \quad \text{pour des nombres } a_i \geqslant 0$$

1. Utiliser la méthode de Lagrange pour trouver la valeur maximale de $f(x_1\ ,\ \ldots\ ,\ x_n) = x_1^2 \cdots x_n^2$ sur la sphère de rayon $r > 0$: $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = r^2$. Pourquoi f admet-elle une valeur maximale ?
2. Déduire de la question précédente que $x_1^2 \cdots x_n^2 \leqslant \left(\dfrac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}\right)^n$.
3. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique.

Exercice 6.4
Trouver la différentielle de $f(x,y) = (x^2+y^2)^{1/2}$ en $(1,1)$.

Exercice 6.5
Trouver la différentielle de $f(x,y) = 2x + 3y$ en $(x_0\ ,\ y_0)$.

Exercice 6.6
Estimer $(0.99 \cdot e^{0.02})^8$.

Exercice 6.7
Trouver les points critiques de :
(a) $f(x,y) = (x^2+y^2)\, e^{-(x^2+y^2)}$
(b) $f(x,y) = x\, e^y$

Exercice 6.8
Trouver les extrema de $f(x,y) = x^2 + 5y^2 - 6x + 10y + 6$.

Exercice 6.9
Sans calcul, trouver la nature de $(0,0)$ pour la fonction $f(x,y) = -\,xy + xy^2 + x^2y^2$.

Exercice 6.10
Trouver les extrema locaux ainsi que les points de selle pour $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3$. Déterminer l'approximation de Taylor de f jusqu'à l'ordre 2 en tout point.

Exercice 6.11
La température dans $\mathbb{R}^3$ est donnée par $T(x,y,z) = x - 2y + z$.
Trouver les points sur la sphère $x^2+y^2+z^2 = 1$ où T est maximale.

LICENCE
VAR : Fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples, courbes paramétrées

Feuille d'Exercices 7

Exercice 7.1
Décrire l'image de la bande $\{(x,y)\,|\,0 \leqslant y \leqslant 2\pi\}$ par l'application $f(x,y) = (e^x \cos y\ ,\ e^x \sin y)$.

Exercice 7.2
Calculer la matrice jacobienne de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par : $f(r,\varphi,\theta) = (r \sin\varphi \cos\theta\ ,\ r \sin\varphi \sin\theta\ ,\ r \cos\varphi)$.

Exercice 7.3
Calculer la matrice jacobienne $\mathrm{Jac}(f)$ de $f(x,y) = (x+y\ ,\ x^2 y)$ et trouver les points où le déterminant de $\mathrm{Jac}(f)$ est nul.

Exercice 7.4
Calculer $df(x)$ de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par : $f(x) = Mx + B$, M étant une matrice $(3,3)$ et $B \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 7.5
Soit $h(x) = g(f(x))$ avec $f = (f_1\ ,\ \ldots\ ,\ f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Montrer que $\nabla h(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_k}\,(y)\ \nabla f_k(x)\ ,\ y = f(x)$.

Exercice 7.6
Trouver les points de $\mathbb{R}^2$ tels que $f(x,y) = (x^2 - y^2\ ,\ 2xy)$ soit localement inversible.

Exercice 7.7
Montrer que $f(x,y) = x\,e^y - y + 1 = 0$ définit une fonction $y = \varphi(x)$ implicitement en $(-1,0)$ et calculer $\varphi'(-1)$.

Exercice 7.8
Regardons la fonction $f(u,v) = (x,y)$ avec $x = (v^2 - u^2)/2$ et $y = uv$.

1. Déterminer dans quels points cette fonction est localement inversible.
2. Nous observons que $f(1,2) = (\frac{3}{2}, 2)$ et que f est localement inversible dans $(1,2)$. Dans un voisinage de $(u,v) = (1,2)$ on peut donc écrire $u = u(x,y)$ et $v = v(x,y)$. Trouver les formules pour $\partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial v/\partial x$ et $\partial v/\partial y$ au point $(\frac{3}{2}, 2)$.

Exercice 7.9

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ différentiable en x . Montrer que $df(x)(1) = \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.
2. Réciproquement, supposons que $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = b$. Posons $T(h) = bh$, $\forall h \in \mathbb{R}$.
   Montrer que $df(x)(h) = T(h) = bh$.

Exercice 7.10
Soit $\varphi(y) = \displaystyle\int_1^2 \sin(y\, e^x)\, dx$. Calculer $\varphi'(y)$.

Exercice 7.11
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\,tx}}{1+t^2}\ dt$.
Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$. Calculer $f(0)$ et $f'(0)$.

Exercice 7.12
Soit $f(x,y,z) = e^{(x^2+y^2+z^2)}$.

1. Déterminer les points de continuité de f.
2. Décrire les ensembles de niveau de f si $c = -1$, $c = 1$, $c = 2$.

Exercice 7.13
Soit $f(x,y) = y\, e^{xy}$.

1. Calculer $\nabla f(x,y)$.
2. Dans quelle direction $f(x,y)$ s'accroît-elle le plus vite à partir du point $(1,1)$?
   Donner le vecteur unitaire de cette direction.

Exercice 7.14
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 3$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 5$.
Calculer $g'(0)$ lorsque $g(t) = f(2t + t^2 + e^t\ ,\ \sin t + \cos t)$.

Exercice 7.15
Trouver tous les points P sur la surface $S : 2x^2 - y^2 + z^2 = 25$ pour lesquels le plan tangent T_pS est orthogonal à l'axe Oz.

Exercice 7.16
Considérer la fonction $f(x,y) = x^3 - 3x^2 + y^2$.

1. Déterminer les points critiques de f ainsi que leur nature.
2. Trouver les extrema de f sur le carré $\{(x,y) \mid -2 \leqslant x, y \leqslant 2\}$.

Exercice 7.17
Trouver la valeur maximale de $f(x,y,z) = x + z$ sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (par la méthode de Lagrange).

Exercice 7.18
Soit $f(x,y) = (xy\, ,\, e^{xy})$.
Calculer la matrice jacobienne de f et déterminer le rang de cette matrice en tout point (x,y).
En quels points f est-il localement inversible ?
Donner l'image du vecteur (a,b) pour $df(1,0)$.

LICENCE
VAR : Fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples, courbes paramétrées

Feuille d'Exercices 8

Exercice 8.1
Evaluer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\iint_R xy(x+y)\,dxdy \qquad R : [0,1]\times[0,1]$

(b) $\displaystyle\iint_R \sin(x+y)\,dxdy \qquad R : [0,\pi/2]\times[0,\pi/2]$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{x} x\sin y\,dydx$

Exercice 8.2
Dessiner les régions suivantes :

(a) $\{(x,y) \mid x+y\leqslant 1\ ,\ x\geqslant 0\ ,\ y\geqslant 0\}$

(b) $\{(x,y) \mid |x|+|y|\leqslant 1\}$

(c) $\{(x,y) \mid x^2\leqslant y\leqslant x\ ,\ 0\leqslant x\leqslant 1\}$

Exercice 8.3
Calculer $\displaystyle\iint_R x\cos(x+y)\,dxdy$, R région triangulaire de sommets à $(0,0)$, $(\pi,0)$, (π,π).

Exercice 8.4
Calculer l'aire de la région $\{(x,y) \mid y\leqslant x\leqslant y^2\ ,\ 1\leqslant y\leqslant 2\}$.

Exercice 8.5
Evaluer $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_y^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,dxdy\,.$

Exercice 8.6
Evaluer $\displaystyle\iint_R x^2\,dxdy$ lorsque $R=\{(x,y) \mid x\geqslant 0\ ,\ 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\}$.

Exercice 8.7
Soit f définie sur $R=[0,1]\times[0,1]$ comme suit :

$$f(x,y)=\begin{cases}1-x-y & \text{si } x+y\leqslant 1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Calculer $\displaystyle\iint_R f\,.$

LICENCE
VAR : Fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples, courbes paramétrées

Feuille d'Exercices 9

Exercice 9.1

1. Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2+1)^{3/2}}$, $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant a\}$.
2. Laissant $a \to \infty$, montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy\,dx}{(x^2+y^2+1)^{3/2}} = 2\pi$.

Exercice 9.2

Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^3}\,dx\,dy$, $D = \{(x,y) \mid 4 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 9\}$.

Exercice 9.3

1. Soient R le rectangle de sommets $(1,2)$, $(1,5)$, $(3,2)$, $(3,5)$ et $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire donnée par la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
   Trouver l'aire de $G(R)$.
2. Même question avec l'application linéaire G donnée par la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$.

Exercice 9.4

Soit $(x,y) = G(u,v) = (u+v\,,\,u^2-v)$. Soit $A = \{(u,v) \mid u \geqslant 0\,,\, v \geqslant 0\,,\, u+v \leqslant 2\}$.
Calculer $\displaystyle\iint_{G(A)} \frac{1}{\sqrt{1+4x+4y}}\,dx\,dy$.

Exercice 9.5

On considère $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-y^2)^{1/2} dy\,dx$.

1. Décrire la région sur laquelle on intègre et montrer qu'elle est de type I et de type II.
2. Echanger l'ordre d'intégration et évaluer.

Exercice 9.6

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^1 dz\,dy\,dx$. Décrire la région sur laquelle on intègre.

Exercice 9.7

Calculer $\displaystyle\iiint_D \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $D = \{(x,y,z) \mid 1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 4\}$.

Exercice 9.8

Calculer l'intégrale double $\iint_S xy^2\ dx\ dy$ où S est limité par la parabole $y^2 = 2px$ et la droite $x = p$.

Exercice 9.9

Calculer l'intégrale double $\iint_S xy\ dx\ dy$ où le domaine d'intégration S est limité par les axes de coordonnées et par l'arc d'astroïde d'équations $x = R\cos^3 t$, $y = R\sin^3 t$ avec $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$.

Exercice 9.10

Calculer l'intégrale double $\iint_S (x^2 + y^2)\ dx\ dy$ où le domaine d'intégration S est limité par le demi-cercle de rayon a et de centre (0,0), et situé au-dessus de l'axe des x.

Exercice 9.11

Calculer l'intégrale double $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2 - y^2}\ dy\ dx$.

Exercice 9.12

Calculer l'intégrale double $\iint_S \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\ dx\ dy$ où S est la boucle du lemniscate d'équations $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ et $x \geqslant 0$.

Exercice 9.13

Calculer l'aire de la surface limitée par les paraboles d'équations $y^2 = 10x + 25$ et $y^2 = -6x + 9$.

Exercice 9.14

Calculer l'intégrale triple $\iiint_V x^2 dx\ dy\ dz$ où V est l'ellipsoïde d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leqslant 1$.
Indication : même dans le cas $a = b = c = 1$, cet exercice est intéressant. Rappel : $\sin^3(\phi) = \frac{1}{4}(3 \cdot \sin(\phi) - \sin(3\phi))$

Exercice 9.15

Calculer l'intégrale triple $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ dx\ dy\ dz$ où V est la boule de centre (0,0,0) et de rayon R.

Exercice 9.16

Calculer l'intégrale triple $\iiint_V \dfrac{1}{(1 + x + y + z)^3}\ dx\ dy\ dz$ où V est limité par les plans de coordonnées et par le plan d'équation $x + y + z = 1$.

Exercice 9.17

Calculer l'intégrale triple $\iiint_V (x+y+z)^2 \, dx \, dy \, dz$ où V est la portion commune au paraboloïde $\{2az \geqslant x^2+y^2\}$ et à la boule $\{x^2+y^2+z^2 \leqslant 3a^2\}$.

Exercice 9.18

Calculer l'intégrale triple $\iiint_V z \, dx \, dy \, dz$ où V est le domaine limité par le plan $z=0$ et par le demi-ellipsoïde supérieur $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Exercice 9.19

Calculer l'intégrale triple $\iiint_V z \, dx \, dy \, dz$ où V est le domaine limité par le plan $z=h$ et par le cône d'équation $z^2=\frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)$.

Exercice 9.20

Calculer l'intégrale triple $\iiint_V dx \, dy \, dz$ où V est le domaine limité par les surfaces d'équations $x^2+y^2+z^2=2Rz$ et $x^2+y^2=z^2$, et contenant le point $(0,0,R)$.

Exercice 9.21

Calculer l'intégrale triple $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2} \, dz \, dy \, dx$.

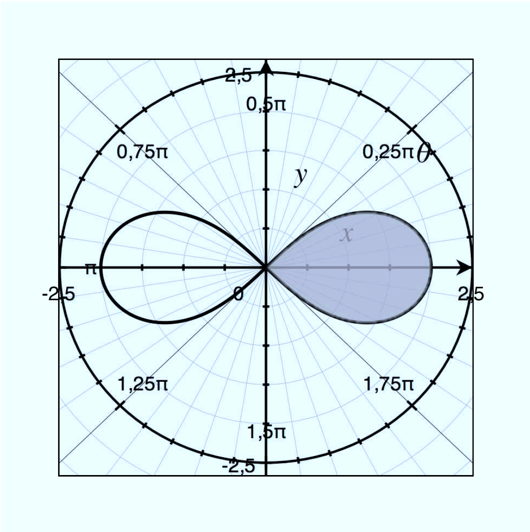
Exercice 9.22
Calculer le volume du corps limité par le plan xOy, le cylindre $x^2+y^2=ax$ et la sphère $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Exercice 9.23
Calculer l'aire du paraboloide

$$\{(x,y,\frac{x^2+y^2}{2}) \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$$

Indication : utiliser des coordonnées polaires, c.à.d. la paramétrisation $f:(r,\theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\cos(\theta), \frac{r^2}{2})$. La réponse est $\frac{2\pi(\sqrt{8}-1)}{3}$.

Exercice 9.24
(a) Calculer l'aire d'une feuille de la région du plan déterminé par l'équation $r^2 \leqslant 4\cdot\cos(2\theta)$ (voir le dessin).
(b) Par rapport à l'axe de rotation $\{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$, quel est le moment d'inertie d'une plaque de poids spécifique constant $=1$ de la forme $\{(r,\theta,z) \mid r^2 \leqslant 4\cdot\cos(2\theta), z=0\}$



Exercice 9.25
(a) Soit B la boule de centre $(0, 0, 1)$ et de rayon 1. Expliquer pourquoi en coordonnées polaires cette boule est donnée par $\{(r, \phi, \theta) \mid 0 \leqslant r \leqslant 2\cos(\phi))\}$.
(b) Soit C le cône $\{(r, \phi, \theta \mid 0 \leqslant \phi \leqslant \frac{\pi}{6}\}$. Dessiner $B \cap C$, et calculer son volume.
(c) Calculer le barycentre de $B \cap C$.

LICENCE
VAR : Fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples, courbes paramétrées

Feuille d'Exercices 10

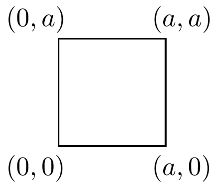
Exercice 10.1
Calculer les intégrales curvilignes $\int_C F \cdot dr$ lorsque :

(a) $F(x, y) = (x^2 - 2xy\,,\, y^2 - 2xy)$
C : graphe de $y = x^2$ entre $(-1, 1)$ et $(1, 1)$

(b) $F(x, y, z) = (y^2 - z^2\,,\, 2yz\,,\, -x^2)$
C : tracée par $r(t) = (t\,,\, t^2\,,\, t^3)$ avec $0 \leqslant t \leqslant 1$

Exercice 10.2
Calculer $\int_C F \cdot dr$ lorsque :

$F(x, y) = (x^2 - y^2\,,\, 2xy)$



C : le carré (pour $a > 0$)
et le chemin est traversé dans le sens géométrique.

Exercice 10.3
Calculer $\int_C F \cdot dr$ lorsque :

$F(r, \theta) = (-4 \sin\theta\,,\, 4 \sin\theta)$ et C : spirale de $(1, 0)$ à $(0, 0)$ le long de $r = e^{-\theta}$

Exercice 10.4
F est-il un champ de gradient ? Si oui, construire une fonction potentielle :
(a) $F(x, y) = (x, y)$
(b) $F(x, y, z) = (2xy^3\,,\, x^2z^3\,,\, 3x^2yz^2)$
(c) $F(x, y) = (xy \cos xy + \sin xy\,,\, x^2 \cos xy)$
(d) $F(x, y, z) = (x + z\,,\, -y - z\,,\, x - y)$

Exercice 10.5
Trouver une fonction potentielle pour $F(x) = \|x\|^p\, x$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \overline{0}$.
(On traitera le cas $p = -2$ séparément.)

Exercice 10.6
On considère $F(x, y) = \left(\dfrac{-y}{x^2 + y^2} \;,\; \dfrac{x}{x^2 + y^2} \right)$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{0}$.

1. Montrer que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{0}$.
2. Calculer $\int_C F \cdot dr$, C tracée par $r(t) = (\cos t\,,\, \sin t)$ avec $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.
3. Les deux précédentes questions sont-elles contradictoires ?