Université de Rennes 1 Année 2010–2011
UFR Mathématiques
Module VAR

Contrôle continu 1
28 septembre 2010 — Durée : 40 minutes

Aucun appareil électronique (calculatrice, téléphone portable...) et aucun document est autorisé. Toutes les réponses devront être justifiées, y compris dans les questions vrai/faux.

Exercice 1 Géométrie de $\mathbb{R}^3$

(a) Trouver l'équation du plan contenant le point $\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$ et perpendiculaire au vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

Solution : $1 \cdot (x-2) + 1 \cdot (y-0) + 2 \cdot (z-3) = 0$, équivalent : $x + y + 2z = 8$.

(b) Calculer l'angle entre les vecteurs $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$

Solution : Si θ est l'angle, alors $\cos(\theta) = \frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}} = \frac{1}{2}$, donc $\theta = \frac{\pi}{3}(= 60$ degrés$)$.

(c) Calculer l'aire du parallelogramme engendré par les deux vecteurs dans (b).

Solution : Aire $= ||\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}|| = ||\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}|| = \sqrt{12}$. Il y d'autres solutions possibles.

Exercice 2 Fonctions, continuité, topologie

(a) Dessiner des courbes de niveau de la fonction $f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\binom{x}{y} = x + y^2$

Solution : Les courbes de niveau sont des paraboles ouvertes vers la gauche.

(b) Le sous-ensemble $A = \{\binom{x}{y} \mid x > y \quad \text{et} \quad ||\binom{x}{y}|| < 1\}$ de $\mathbb{R}^2$ est-il ouvert ?

Solution : Oui, car il s'agit de l'intersection de deux sous-ensembles ouverts $A = B \cap C$. Ici, $B = f^{-1}(]0, +\infty[)$, où f est la fonction continue $\binom{x}{y} \mapsto x - y$, est ouvert car l'intervalle $]0, +\infty[$ est ouvert ; et C est la boule ouverte $B(\binom{0}{0}, 1)$.

(c) Donner la définition d'un sous-ensemble *ouvert* de $\mathbb{R}^n$.

Solution : Un sous-ensemble A de $\mathbb{R}^n$ est ouvert si chaque point de A est le centre d'une boule qui appartient entièrement à A. (Bien sûr, il y a d'autres façons qui sont au moins aussi bons, d'énoncer cette définition.)

Exercice 3 Courbes paramétrées

(a) Considérons la courbe paramétrée $\gamma\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}^3,\ s\mapsto \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3s\\ 4\sin(s)\\ 4\cos(s)\end{pmatrix}$.

Vous pouvez admettre que cette paramétrisation est unitaire. Calculer la courbure.

Solution : $||\gamma''(s)|| = ||\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0\\ -4\sin(s)\\ -4\cos(s)\end{pmatrix}|| = \frac{4}{5}$ pour tout s.

(b) Considérons la courbe paramétrée $\gamma\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}^3,\ t\mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}t\\ \sinh(t)\\ \cosh(t)\end{pmatrix}$.

Trouver une reparamétrisation unitaire de cette courbe.

Solution : c'était évidemment la question la plus difficile de l'examen. $||\gamma'|| = ||\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ \cosh(t)\\ \sinh(t)\end{pmatrix}|| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\cosh^2+\sinh^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2+2\sinh^2} = \sqrt{1+\sinh^2} = \cosh(s)$. Donc $\sigma(t) = \int_0^t \cosh(x)\,dx = \sinh(t)$. Donc $\tau(s) = \operatorname{argsinh}(s)$, et la reparamétrisation unitaire est $s \mapsto \gamma(\tau(s)) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\operatorname{argsinh}(s)\\ s\\ \sqrt{1+s^2}\end{pmatrix}$