

# PROBABILITÉS 1

## FEUILLE 7 : LOIS DISCRÈTES CLASSIQUES.

TABLE 1. Tableau récapitulatif des lois discrètes classiques

Dénomination	Loi	Espérance	Variance
Loi de Bernoulli $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)$	$X(\Omega) = \{0, 1\}$ $P(X = 1) = p$ $P(X = 0) = q$	$\mathbb{E}(X) = p$	$\mathbb{V}(X) = pq$
Loi Binomiale $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$	$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$	$\mathbb{E}(X) = np$	$\mathbb{V}(X) = npq$
Loi Uniforme $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$	$X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ $P(X = k) = \frac{1}{n}$	$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$	$\mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$
Loi Géométrique $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$	$X(\Omega) = \llbracket 1, +\infty \rrbracket$ $P(X = k) = pq^{k-1}$	$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$	$\mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2}$
Loi de Poisson $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$	$X(\Omega) = \llbracket 0, +\infty \rrbracket$ $P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	$\mathbb{E}(X) = \lambda$	$\mathbb{V}(X) = \lambda$

**Exercice 1.** On tire au hasard 5 cartes d'un jeu de 32 cartes avec remise. Soit  $X$ , la variable aléatoire égale au nombre de rois obtenus. Donner la loi de  $X$ , son espérance et sa variance.

**Exercice 2.** On considère toujours le jeu de cartes précédent. On effectue une série infinie de tirages successifs, en remettant chaque fois la carte tirée.

- (a) Soit  $Y$ , le rang d'apparition du premier roi. Donner la loi de  $Y$ , son espérance et sa variance.
- (b) Soit  $Z$ , le nombre de cartes autres qu'un roi qu'il aura fallu tirer pour obtenir le premier roi. Donner, sans calcul, la loi de  $Z$ , son espérance et sa variance.

- Exercice 3.** Soit  $X$  une variable aléatoire de Poisson avec paramètre  $\lambda$ . Quelle est la valeur de  $\lambda$  qui maximise  $P(X = k)$ ,  $k \geq 0$  ?
- Exercice 4.** Pour une variable aléatoire  $X$  binomiale d'espérance 6 et de variance 2.4 trouver  $P(X = 5)$ .
- Exercice 5.** Admettons que le nombre d'erreurs par page dans un livre suive la loi de Poisson de paramètre  $\lambda = 0.5$ . Vous ouvrez le livre. Calculer la probabilité qu'il y a au moins 3 erreurs sur cet page.
- Exercice 6.** Une urne contient des jetons numérotés de 1 à  $n$ . On les tire un à un sans remise jusqu'à obtenir le plus petit. On note  $X$  le nombre de tirages ainsi effectués. Déterminer la loi de  $X$ ,  $\mathbb{E}(X)$ ,  $\mathbb{V}(X)$  et  $F_X(x)$ .
- Exercice 7.** Une urne contient  $2^n$  papiers sur lesquels sont reproduits les  $2^n$  parties d'une ensemble  $E$  à  $n$  éléments. On tire un papier au hasard. Soit  $X$ , la variable aléatoire égale au cardinal de la partie tirée. Déterminer la loi de  $X$ , et donner sans calcul les valeurs de  $\mathbb{E}(X)$  et  $\mathbb{V}(X)$ .
- Exercice 8.** Une urne contient 10 boules vertes et 8 boules bleues. On effectue des tirages successifs, avec remise. Soit  $X$ , la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la 2<sup>e</sup> boule bleue. Trouver la loi, l'espérance et la variance de  $X$ .