

PROBABILITÉS 1

FEUILLE 6 : VARIABLES ALÉATOIRES.

Exercice 1. La loi de la variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

| | | | | | |
|--------------|------|-------|------|-------|------|
| x_i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $P(X = x_i)$ | 0,25 | p_2 | 0,18 | p_4 | 0,37 |

- (a) Déterminer les valeurs de p_2 et p_4 , sachant que les événements $(X = 2)$ et $(X = 4)$ sont équiprobables.
- (b) Déterminer la médiane, l'espérance, la variance et l'écart-type de X .

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire. Que peut-on dire si la variance de X est 0 ?

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire. On appelle variable aléatoire centrée réduite associée à X , la V.A. X^* définie par :

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}.$$

Trouver $E(X^*)$ et $V(X^*)$.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire telle que $E(X) = 1$ et $V(X) = 5$. Calculer $E((2 + X)^2)$ et $V(4 + 3X)$.

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire sur (Ω, P) . On appelle **fonction de répartition** de X , la fonction F_X définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} : F_X(x) = P(X \leq x).$$

- (a) Soit X la variable aléatoire comme dans l'Exercice 1. Trouver F_X .
- (b) La fonction de répartition d'une v.a. Y est la suivante :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.5, & 0 \leq x < 1 \\ 0.6, & 1 \leq x < 2 \\ 0.8, & 2 \leq x < 3 \\ 0.9, & 3 \leq x < 3.5 \\ 1, & x \geq 3.5 \end{cases}$$

Calculer la loi de probabilité de Y .

- Exercice 6.** On lance deux dés honnêtes. On note X le plus grand des numéros obtenus, et Y , le plus petit.
- (a) Déterminer les lois de X et Y
 - (b) Calculer $E(X)$ et $E(Y)$.
 - (c) Calculer $V(X)$ et $V(Y)$.
- Exercice 7.** (a) On jette quatre fois une pièce équilibrée. Les résultats sont supposés indépendants. Donner la loi de probabilité de la variable X qui compte le nombre de piles obtenus.
- (b) Même question, mais avec une pièce déséquilibrée : $P(\text{pile}) = p$.
- Exercice 8.** Une urne contient 5 boules rouges et 10 boules bleues. On tire avec remise une boule après l'autre, jusqu'à obtenir une boule bleue. On note X le nombre de tirages. Quelle est la loi de X ? Calculer l'espérance et la variance de X .