

13 Intégrales de surfaces et thm. de Stokes

Stokes

Surfaces de \mathbb{R}^3

13.1 Rappel: nous connaissons 3 façons de décrire une surface S :

① Surface de niveau: si $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est continue,

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = 0 \right\}$$

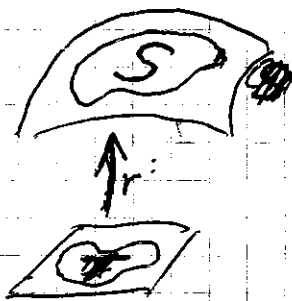
Ex: Sphère rayon R : $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \right\}$

② Graphe d'une fonction ^{continue} $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ où $D_f \subset \mathbb{R}^2$

Ex: $f: B(R, 0) \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

Le graphe de f est une hémisphère

③ Surface paramétrée: soit $\vec{r}: D_r \rightarrow \mathbb{R}^3$, où $D_r \subset \mathbb{R}^2$



$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$$

Ex $\vec{r}: \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$

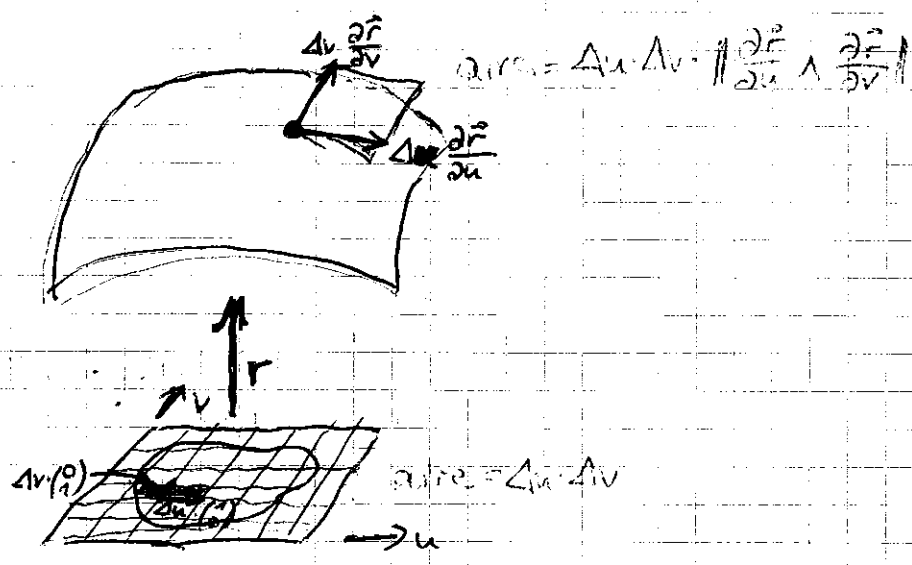
est une paramétrisation d'une sphère

13.2 Rq • Nous ~~regarderons~~ regarderons surtout ③

• étant donné $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, le graphe de f est paramétré $\vec{r}: \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{pmatrix}$, donc ② est un cas spécial de ③

~~Ex Calculons~~

Aire d'une surface paramétrée $S = \vec{r}(T)$



13.3 Déf Si $T \subset \mathbb{R}^2$ ouvert, et $r: T \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^1 , alors l'aire de la surface $S = r(T)$ est

$$\text{Aire}(S) = \iint_T \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| du dv$$

13.4 Ex • Si S est le graphe de $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, alors

$\vec{r}: \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \\ h(u,v) \end{pmatrix}$ est une paramétrisation, et

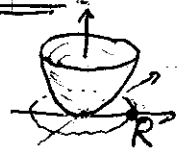
$$\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial h}{\partial u} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial h}{\partial v} \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -\frac{\partial h}{\partial v} \\ \frac{\partial h}{\partial u} \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2}$$

• Calculons l'aire de la sphère; avec $\vec{r}: \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$
 On trouve $\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right\| = \dots$ calcul (exercice)

= $\sin \varphi$

Donc Aire = $\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\theta d\varphi = 2\pi \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = \underline{4\pi}$

13.5 Exercice aire du parabololoide $\vec{r}: [0, R] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(r, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ \frac{1}{2} r^2 \end{pmatrix}$
 Rép: $\frac{2\pi}{3} \left((R^2 + 1)^{3/2} - 1 \right)$

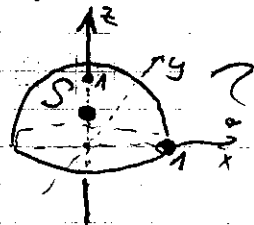


Intégrale d'une surface paramétrée $S = \vec{r}(T)$

Si $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ est t.g. $D_f \supset S$ et f est bornée sur S , on définit

13.6 Déf $\iint_S f \, dS := \iint_T f(\vec{r}(u,v)) \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| \, du \, dv$

13.7 Exemple Centre de gravité de la hémisphère de densité constante δ



Par symétrie, il est sur l'axe rouge, mais

quelle hauteur? Réponse: $\int_S \delta z \, dS / \int_S \delta \, dS$ ^{hauteur} / ^{masse}

Or, hémisphère = graphe de $h(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ pour $(x,y) \in D_h = \{x^2+y^2 \leq 1\}$

et $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{-x}{h(x,y)} = \frac{-x}{z}$ et $\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{-y}{h(x,y)} = \frac{-y}{z}$, donc

~~$\sqrt{1 + \frac{\partial h^2}{\partial x^2} + \frac{\partial h^2}{\partial y^2}}$~~ $\sqrt{1 + \left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2} = \frac{1}{z} \sqrt{z^2 + x^2 + y^2} = \frac{1}{z}$

Donc, $z_g = \frac{\int_S \delta z \cdot \frac{1}{z} \, dx \, dy}{\int_S \delta \, dx \, dy} = \frac{\int_{D_h} 1 \, dx \, dy}{2\pi} = \frac{1}{2}$
= aire du disque $D_h = \pi$

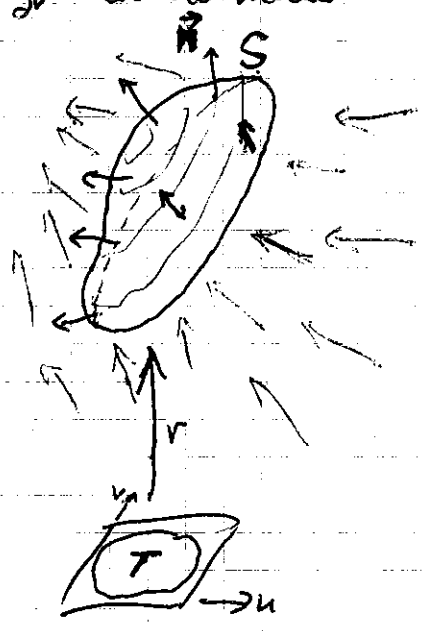
13.8 Prop L'intégrale $\iint_S f \, dS$ est bien-définie; elle est invariante quand on change de paramétrisation \vec{r} .

Dém admis.

Le flux d'un champ
intégral des courbes de vecteurs

13.9 Notation Soit $\vec{F}(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} F_1(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) \\ F_2(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) \\ F_3(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) \end{pmatrix}$ un champ de vecteurs défini

sur un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^3 qui contient une surface $S = r(T)$. Soit $\vec{N} = \frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v}$ la normale et $\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$ la normale unitaire.



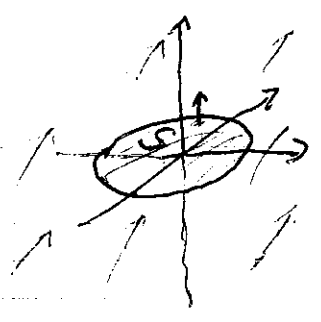
13.10 Déf Le flux de \vec{F} à travers S est l'intégrale $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$

13.11 Interprétation Si \vec{F} est le champ de vitesse du flot d'un liquide incompressible (eau), alors en temps t il y a un volume de $t \cdot \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$ qui traverse S

13.13 Ex ~~Soit $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, soit $\vec{F}(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ 0 \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$~~

Soit $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, ^{une const.} soit $\vec{F}(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ 0 \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$

Soit $T = \{(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}) \mid u^2 + v^2 \leq 1\}$ et $r: \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$
(donc $\vec{n}(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$)



$$\text{Flux} = \iint_S \cos(\theta) \, dS = \pi \cdot \cos(\theta)$$

13.14

Prop (Calcul pratique du flux) Le flux de \vec{F} à travers S est donné par

$$\iint_S \vec{F}(\vec{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) du dv$$

Dém $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_T \vec{F} \cdot \underbrace{\vec{n}}_{\frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}} \underbrace{\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\|}_{\|\vec{N}\|} du dv$
 déf de l'intégrale = $\iint_T \vec{F} \cdot \vec{N} du dv$ \square

13.15 Ex Soit $\vec{F}(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 1 \end{pmatrix}$ (tire-bouchon)

Soit ~~$S = \{ (x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=1, z \geq 0 \}$~~ S la demi-sphère

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0 \right\}$$

Flux = ?

Solu: Soit $T = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mid u^2 + v^2 \leq 1 \right\}$, ~~$r(u,v) \mapsto$~~ $\begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{1-u^2-v^2} \end{pmatrix}$

Alors $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -u \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}$

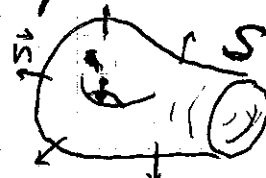
$$\vec{F}(\vec{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) = 1$$

$$= \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{donc flux} = \iint_T 1 du dv = \text{aire}(T) = \underline{\underline{\pi}}$$

13.16 Rq On peut définir le flux même pour des

surfaces S qui ne sont pas décrites par une seule paramétrisation r ,

la seule condition nécessaire est



qu'il existe un champ de vecteurs orthogonaux \vec{n} ,
 (c'est à dire que la surface S dans \mathbb{R}^3 a deux côtés.
 (\Rightarrow ça marche pas sur ~~le~~ un ruban de Möbius))

Une telle surface est dite orientable. ~~Chacune des~~ ^{Il y a} deux choix possibles ~~pour le~~ champ \vec{n} , et chacun s'appelle une orientation de S

Le théorème de Stokes

13.17 Motivation

Nous avons déjà vu: pour un champ de vect. \vec{F} dans \mathbb{R}^3 , on a

\vec{F} conservatif \Leftrightarrow (pour toute boucle γ) $\int \vec{F} d\vec{s} = 0 \iff \left(\text{rot } \vec{F} \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix} \right) = 0 \quad \forall \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix} \right) \right)$

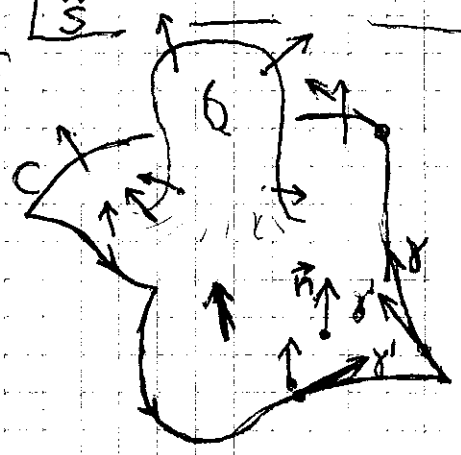
On veut une version quantitative.

13.19

Thm (Stokes) Soit \vec{F} un champ de vecteurs, ~~soit~~ défini sur un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^3 qui contient ^(la surface) S . Supposons que le bord de S consiste en une seule courbe C qui est C^1 par morceaux. Supposons S est orientée (par la donnée d'un champ de vecteurs \vec{n} perpendiculaires sur S), ~~entouré d'un champ orientable~~, et que $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une paramétrisation positive de C . Alors

$$\int_S (\text{rot } \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS = \int_C \vec{F} \, d\gamma$$

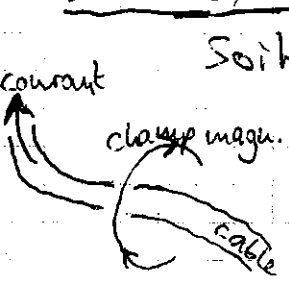
13.18 Def



Supposons le bord d'une surface ~~soit~~ orientée S est une courbe C qui est C^1 par morceaux.

Une paramétrisation γ de C est dite positive (par rapport à l'orientation de S) si, vu du côté vers lequel pointent les vecteurs \vec{n} , la surface est à gauche des vecteurs tangent γ' .

13.20 Exemple Quatrième équation de Maxwell \equiv (cas spécial système reste le même)



Soit \vec{H} = champ magnétique (ampère/mètre)

~~densité du courant~~
 \vec{j} = densité du courant (ampère/mètre²)

I_S = courant total traversant la surface S (ampère)

$\boxed{\text{rot } \vec{H} = \vec{j}}$ (écriture différentielle)

On en déduit : $\oint_{\partial S} \vec{H} \cdot d\vec{l} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \iint_S \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{S}$
 $\stackrel{\text{Maxwell 4}}{=} \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$

$\boxed{\oint_{\partial S} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_S}$ (écriture intégrale)

(• Autre exemple, de calcul, par ex. de Edwards & Penney??)

13.21 Idée de la dém. du thme de Stokes

~~thm~~ ^{Lemme 1} le thme est vrai si S est une surface planaire contenue dans le plan $x-y$.

Dém. du lemme 1: Si $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$, alors

$\iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS = \iint_S \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dS$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Green-Riemann

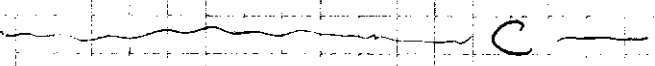

$\oint_C \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \cdot dy$

$= \oint_C \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \cdot dy = \oint_C \vec{F} \cdot dy \quad \square$

car le vecteur $\gamma'(t)$ est toujours contenu dans le plan $x-y$;
 $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \end{pmatrix}$

Lemme 2 Plus généralement, le ~~théorème~~ thme est vrai si S est une surface planeaire.

Dém du lemme Soit $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une isométrie (rotation et/ou translation) qui envoie S vers une surface ^{qui est} planeaire et contenue dans le plan $x-y$.

Soient \tilde{F} le champ de vect obtenu par transport de F par h
 \tilde{C} la courbe 
 $\tilde{\gamma}$ la courbe paramétrée etc. 

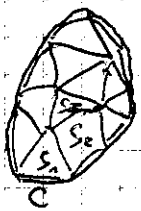
On peut démontrer (adms)

$$\iint_{\tilde{S}} \text{rot } \tilde{F} \cdot \tilde{n} \, d\tilde{S} = \iint_S \text{rot } F \cdot n \, dS$$


$$\oint_{\tilde{C}} \tilde{F} \, d\tilde{\gamma} = \oint_C F \, d\gamma$$

Le lemme 2 ~~est démontré~~ découle maintenant du lemme 1 ~~précédent~~. □

Lemme 3 Le thme est vrai si S est obtenu en recollant un nombre fini de surfaces planeaires (maillage de S par morceaux planeaires)



Dém $\iint_S \text{rot } F \cdot n \, dS = \sum_{i=1}^N \iint_{S_i} (\text{rot } F) \cdot n \, dS$

~~$= \sum_{i=1}^N \oint_{C_i} F \, d\gamma_i$~~  ~~stannident~~

$= \oint_C F \, d\gamma$ □

Or, toute surface S peut être arbitrairement bien approchée par une surface comme dans le lemme 3. Ceci rend le thme de Stokes très plausible □

Divergence et le théorème de Gauss - Ostrogradsky

13.22 Déf Pour un champ de vecteurs $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1(x,y,z) \\ F_2(x,y,z) \\ F_3(x,y,z) \end{pmatrix}$ ~~de classe C^1~~
~~de classe C^1~~ de classe C^1 , défini sur un ouvert
 la divergence de \vec{F} est ~~la divergence~~

$$\text{div}(\vec{F})(x,y,z) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(x,y,z)$$

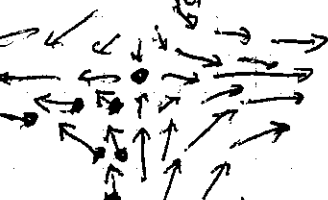
~~à retenir~~ Mémoisez : $\boxed{\text{div}(\vec{F}) := \nabla \cdot \vec{F}}$

13.24 Théorème (Gauss-Ostrogradsky)

Soit $V \subset \mathbb{R}^3$ un volume délimité par une surface S ~~compacte~~ sans bord et ~~orientée~~ orientée par un champ de vecteurs \vec{n} unitaire et perpend. à S pointant vers l'extérieur de V .
 Soit \vec{F} un champ de vecteurs de classe C^1 .

Alors
$$\iiint_V \text{div}(\vec{F}) \, dx \, dy \, dz = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$

13.23 Exemple • Si $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une source)

alors $\text{div}(\vec{F})(0,0,0) = 3$
 • Si $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix}$  (Autant de flot vers $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ que partant vers $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$)

alors $\text{div}(\vec{F})(0,0,0) = 0$
 • Si $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ z \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un puits)

~~alors~~ alors $\text{div}(\vec{F})(0,0,0) = -3$

Idee / $\text{div}(\vec{F})(x,y,z) > 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est une source

Interprétation
 $\text{div}(\vec{F})(x,y,z) < 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un puits

13.25 Exemple Première équation de Maxwell

Alors $\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$ (écriture différentielle)

Soit \vec{E} = champ électrique

ρ = densité de charge

ϵ_0 = perméabilité du vide (une constante naturelle)

Q_S = charge électrique enfermée par S

(Par exemple charge positive = sources du champ électrique)

On en déduit:

$$\begin{aligned} \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS &\stackrel{\text{Gauss}}{=} \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} \, dV \\ &\stackrel{\text{Maxwell}}{=} \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} \, dV \\ &= \frac{Q_S}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

$\boxed{\int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{Q_S}{\epsilon_0}}$ (écriture intégrale)

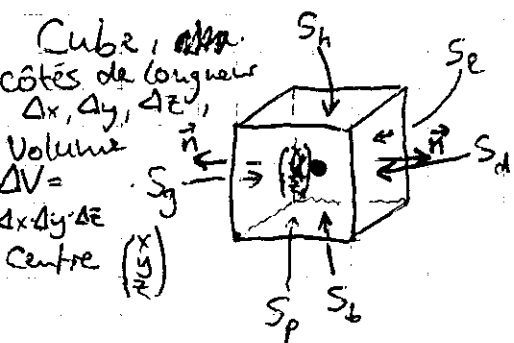
13.26 ~~Rq~~ ^{B.24} Le théorème est très plausible!

il dit: Le flux de F à travers de S est égal à la "sourcedité" (sourceditude?) de F , intégrée sur la région bornée par S .

^{de B.24} Dém (idée) On peut ~~approcher~~ ~~en~~ ~~utilisant~~

approcher V par une réunion de plein de petits cubes qui se touchent dans leur faces. Comme dans la démon de Green-Riemann et de Stokes, les contributions au flux de deux faces qui se touchent vont s'annuler.

il suffit donc de démontrer le théorème dans le cas spécial où V est un petit cube, et S la réunion de ses 6 faces.



Quand le cube est très petit, on ^{peut} faire qu'une toute petite erreur si l'on approxime ~~le cube~~ $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$

par un champ où les fonctions $F_1, F_2, F_3: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sont affines.

Or, si F_1, F_2, F_3 sont affines, on a

$$\iint_{S_d} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \int_{-\frac{\Delta z}{2}}^{\frac{\Delta z}{2}} \int_{-\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} F_1 \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y+s, z+t \right) \, ds \, dt$$

$$= F_1 \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \Delta y \cdot \Delta z \quad \text{cb}$$

$$\iint_{S_g} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \dots = F_1 \left(x - \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

Donc $\iint_{S_d} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS + \iint_{S_g} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = (F_1(x + \frac{\Delta x}{2}) - F_1(x - \frac{\Delta x}{2})) \cdot \Delta y \cdot \Delta z$

$$= \frac{F_1(x + \frac{\Delta x}{2}) - F_1(x - \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} \cdot \Delta V$$

$$\approx \frac{\partial F_1}{\partial x} \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2} \right) \Delta V$$

↑
 Δx petit

Pareil pour les 4 faces restantes. En sommant sur les 6 faces

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) \Delta V = \text{div} \left(\vec{F} \right) \Delta V$$

$$= \iiint_V \text{div} \vec{F} \, dV$$

↑
div \vec{F} constant parce que \vec{F} affine

c.q.f.d.

~~...~~

Stokes R

13.25 Rq (hors programme et incompréhensible ~~proposé~~) ^{à ce stade}

Les thmes de Green-Riemann, Stokes, et Gauss-Ostrogradsky sont ~~des~~ tous des cas spciaux du thorme suivant :

Thm Soit φ une k -chaîne de classe C^2 , définie sur un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$, et soit ω une $(k-1)$ -forme différentielle de classe C^1 définie sur V , alors

$$\int_{\varphi} d\omega = \int_{\partial\varphi} \omega$$