Université de Rennes 1 Année 2008–2009
UFR Mathématiques
Module VAR

Examen Terminal
Mardi 16 décembre 2008 — Durée : 2 heures

Aucun appareil électronique (calculatrice, téléphone portable...) et aucun document est autorisé. Toutes les réponses devront être justifiés (sauf mention contraire).

Exercice 1 Dans ce premier exercice, aucune justification est exigée. Les cinq parties sont complètement indépendantes.

(a) Calculer l'angle entre les vecteurs $(1\ \ 1\ \ 0)$ et $(0\ \ 1\ \ 1)$ dans $\mathbb{R}^3$. Soln : $\arccos(0.5) = \pi/3$

(b) Soit $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points dans $\mathbb{R}^2$, et soit $\vec{b}$ un point dans $\mathbb{R}^2$. Qu'est ce que l'énoncé

"La suite $(\vec{x}_n)$ converge vers $\vec{b}$ "

veut dire ? (Donnez la définition) Solution : $\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n > N, ||\vec{x}_n - \vec{b}|| < \epsilon$.

(c) Supposons que $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ avec $f(1,2) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 3$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 4$. Supposons que $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction telle que $g(1) = 2$ et $f(x, g(x)) = 0$ pour tout x. Qu'est-ce que le théorème des fonctions implicites permet de déduire ? $g'(2) = -\frac{3}{4}$.

(d) Remplissez les bonnes bornes d'intégration dans la formule suivante, et faites un dessin du domaine d'intégration

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt[3]{x}} f(x,y)\ dy\ dx \ = \int_?^? \int_?^? f(x,y)\ dx\ dy = \int_0^1 \int_{y^3}^{\sqrt{y}} f(x,y)\ dx\ dy$$

(e) Soit $r\colon [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}^3$ une paramétrisation de classe $\mathcal{C}^2$ d'une surface S. Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continue. Donnez la formule générale qui définit l'*intégrale de f sur la surface S*

$$\iint_S f \ \ dS = \ ? \ = \int_a^b \int_c^d f(r(u,v))\ ||\frac{\partial r}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial r}{\partial v}(u,v)||\ dv\ du$$

Exercice 2 Considérons la courbe paramétrée $\gamma(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos(t) \\ e^t \sin(t) \end{pmatrix}$.

(a) Calculer la longueur d'arc de cette courbe entre $\gamma(0)$ et $\gamma(T)$.

(b) Déterminer une reparamétrisation unitaire de γ. (a) $||\gamma'(t)|| = \sqrt{2}e^t$, donc la longueur d'arc est $\sqrt{2}(e^T - 1)$. (b) La fonction réciproque est $t(s) = \ln\left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right)$. La reparamétrisation est donc $\delta(s) = \gamma(t(s)) = (\frac{s}{\sqrt{2}} + 1) \begin{pmatrix} \cos(\ln(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1) \\ \sin(\ln(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1) \end{pmatrix}$.

Exercice 3 On regarde la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto xy - x - x^2y$.

(a) Déterminer les points critiques de f. Solution : $\nabla f = (y - 1 - 2xy \quad x - x^2)$, ce qui s'annule pour $(x,y) = (1,-1)$ et $(0,1)$.

(b) Déterminer la nature du point critique $\binom{0}{1}$ (maximum local, minimum local ou point selle). Calculer le développement de Taylor jusqu'à l'ordre 2 autour de ce point. Solution : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) = -2y = -2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,1) = 1 - 2x = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1) = 0$. Donc $det(Hess) = -1$ (point selle) et $F(u, 1+v) = 0 + 0u + 0v - 4u^2 + uv + 0v^2 = -4u^2 + uv$.

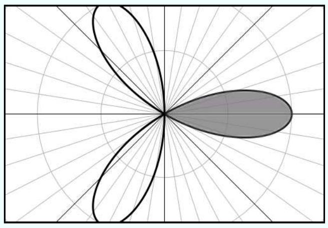
(c) Calculer la dérivée directionnelle de f au point $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la direction de $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Solution : $\nabla f(0,0) = (-1,0)$, donc réponse $\frac{-1}{\sqrt{2}}$

Exercice 4 Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto \frac{1}{2}x^2 + y^2 + 2z^2 - 4$, et $S = \{(x,y,z) \mid f(x,y,z) = 0\}$.

(a) Déterminer une équation pour le plan tangent à S au point $(2,0,1)$. Solution : $\nabla f(2,0,1) = (x, 2y, 4z) = (2,0,4)$. Donc le plan tangent : $\{(r,s,t)\ |(r-2)\cdot 2 + (t-1)\cdot 4 = 0\}$, ou, mieux encore : $r = 4 - 2t$.

(b) On regarde la fonction $g(x,y,z) = xz + y^2$. Trouver les maxima et minima de g sur S. Solution : utiliser Lagrange. Points critiques: $(x,y,z) = (0,\pm 2,0)$ et $(x,y,z) = (\pm 2, 0, \pm 1)$. On a $g(0,2,0) = g(0,-2,0) = 4$, $g(1,0,2) = g(-1,0,-2) = 2$, et $g(-1,0,2) = g(1,0,-2) = -2$, donc Minima $(2,0,-1)$ et $(-2,0,1)$ et Maxima $(0,2,0)$ et $(0,-2,0)$.

Exercice 5 Calculer l'aire d'une des trois feuilles délimitées par la courbe $r = \cos(3\theta)$
Solution : $\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \int_0^{\cos(3\theta)} r\ dr\ d\theta = \frac{\pi}{12}$



Exercice 6 **(a)** Calculez le rotationnel du champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ suivant. Si possible, trouvez une fonction potentiel de ce champ.

$$\vec{F}(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x+z \\ y \cdot z \\ 3y \end{pmatrix}$$

Solution : $rot(\vec{F}) = (3 - y, 1, 0)$, donc il n'y a pas de potentiel

(b) Déterminez si le champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ suivant possède une fonction potentiel. Si oui, déterminez-en une !

$$\vec{F}(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \sin(y) - \sin(x) \\ \cos(y) \cdot x \end{pmatrix}$$

Solution : oui, car $\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x} = \cos(y) - \cos(y) = 0$. Par une intégrale curviligne on trouve $f(x,y) = \sin(y)\cdot x + \cos(x)$ **(c)** Déterminer l'intégrale curviligne du champ de vecteurs $\vec{F}$ de la question **(b)** sur le chemin dessiné. (Indication : pas de calcul nécessaire !) L'intégrale curviligne va être égal à f(point initial du chemin)$-f$(point terminal du chemin)$= 0$.