Université de Rennes 1
UFR Mathématiques
Module VAR

Année 2008–2009

Examen de Rattrapage
Juin 2009 — Durée : 2 heures

Aucun appareil électronique (calculatrice, téléphone portable...) et aucun document est autorisé. Toutes les réponses devront être justifiées (sauf mention contraire).

Exercice 1 **(a)** Calculer l'aire du rectangle dont deux côtés sont donnés par les vecteurs $(1,1,3)$ et $(2,0,1)$. Rép: $||(1,5,-2)|| = \sqrt{30}$

(b) On regarde la courbe dans le plan $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} 2\cdot\cos(e^t) \\ 2\cdot\sin(e^t) \end{pmatrix}$. Cette courbe est-elle unitaire ? Dessiner l'image de la courbe et déterminer sa courbure. Rép: non, sa vitesse au moment t est $2e^t$. L'image est un cercle de rayon 2, donc sa courbure est $\frac{1}{2}$.

(c) Soit $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un sous-ensemble du plan. Qu'est-ce que l'énoncé "*A est ouvert*" veut dire ? (Donner la définition – pas de justification exigée.)

(d) On considère la surface S dans $\mathbb{R}^3$, donnée par

$$S = \{(x,y,z) \mid \exp(xy) - xz + 1 = 0\}$$

Trouver une équation du plan tangent au point $(1,0,2)$. Rép: $(x-1, y, z-2)\cdot(-2,1,-1) = 0$

(e) Donner un exemple d'un champ de vecteurs $\vec{F}$ sur $\mathbb{R}^3$ tel que $rot(\vec{F})(x,y,z) = (2,0,0)$. Rép: $(x,-z,y)$

(f) On regarde la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sinh(x\cdot y) \\ \sinh(x+y) \end{pmatrix}$. Calculer sa différentielle et déterminer où la fonction est localement inversible. Rép: Df est donnée par la matrice $\begin{pmatrix} y\cdot\cosh(xy) & x\cdot\cosh(xy) \\ \cosh(x+y) & \cosh(x+y) \end{pmatrix}$ ce qui est inversible ssi $x \neq y$

(g) Trouver les maxima et minima de la fonction $g\colon (x,y) \mapsto (x^2 - y)$ parmi tous les points satisfaisant $x^2 + y^2 = 1$. Avec la méthode Lagrange on arrive à trois extrema liés : deux maxima à $(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2})$ et un minimum à $(0,1)$.

Exercice 2 On va étudier la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x^2 + y^2 + xy + x^3$.

(a) Déterminer les points critiques de f. $(0,0)$ et $(-1/2, 1/4)$.

(b) La fonction f, est-elle harmonique ? Calcul: non

(c) Déterminer l'approximation de Taylor de degré 2 au point $(x_0, y_0) = (\frac{-1}{2}, \frac{1}{4})$. (Vous pouvez admettre : $f(\frac{-1}{2}, \frac{1}{4}) = \frac{1}{16}$.) Décrire la nature du point critique $(\frac{-1}{2}, \frac{1}{4})$. Rép: $f(\frac{-1}{2} + x, \frac{1}{4} + y) = \frac{5}{16} - x^2 + xy + 2y^2$. Il s'agit d'un point selle, car $\Delta = (-1)\cdot 2 - \frac{1^2}{4} < 0$.

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ Dans cet exercice on va utiliser deux méthodes différentes pour calculer l'aire de la région du plan

$$R \;=\; \{(x,y) \mid -2 \leqslant x \leqslant 2,\; x^2 \leqslant y \leqslant 2 + \tfrac{x^2}{2}\}$$

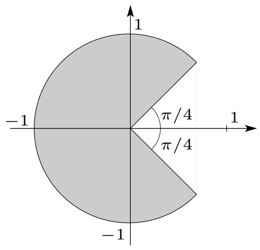
(a) Dessinez une esquisse de la région R et calculez son aire par la méthode habituelle (en utilisant une intégrale double). Rép: 16/3

(b) On considère le champ de vecteurs $\vec{F}(x,y) = \frac{1}{2}(-y,x)$ sur $\mathbb{R}^2$ et les deux chemins

$$\gamma_1\colon\; [-2,2] \to \mathbb{R}^2,\; t \mapsto (t,t^2) \quad \text{et} \quad \gamma_2\colon\; [-2,2] \to \mathbb{R}^2,\; t \mapsto (t, 2+\tfrac{t^2}{2})$$

Calculer l'intégrale de $\vec{F}$ lelong γ_1 et lelong γ_2. Rép: $8/3$ et $-8/3$

(c) À partir des résultats de (b), calculer l'aire de R. Justifiez votre calcul ! Rép: utiliser Green-Riemann



$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ On considère le secteur du disque indiqué dans la figure.

(a) Calculer l'intégrale de la fonction $f(r,\theta) = r \cdot \cos(\theta)$ sur ce domaine.

(b) Où est le barycentre d'une plaque métallique d'épaisseur constante et avec cette même forme? Rép: au point $(-\frac{\sqrt{2}}{3}, 0)$