Université de Rennes 1 Année 2008–2009
UFR Mathématiques
Module VAR

Contrôle continu 3
24 novembre 2008 — Durée : 40 minutes

Exercice 1 On considère la surface dans $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$\{(x,y,z) \mid f(x,y,z) = 12\} \quad \text{où} \quad f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto x^2 + y^4 + 2z^2$$

(a) Démontrer que ceci définit implicitement $z = \phi(x,y)$ dans un voisinage du point $(x,y,z) = (3,1,1)$. **Solution** Selon le théorème des fonction implicites, il suffit de constater que $\frac{\partial f}{\partial z}(3,1,1) = 4z = 4 \neq 0$.

(b) Démontrer que $\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{3}{2}$ et $\frac{\partial \phi}{\partial y} = -1$ en $(x,y) = (3,1)$.
Solution On calcule $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}(3,1,1) = \frac{-2x}{4z} = \frac{-6}{4}$. Le calcul pour $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ est semblable.

(c) En déduire une équation pour le plan tangent à la surface au point $(3,1,1)$.
Solution $z = 1 - \frac{3}{2}(x-3) - (y-1)$

Exercice 2 Dans cet exercice, aucune justification est exigée. Les trois parties sont complètement indépendantes.

(a) Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction, et $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Qu'est-ce que l'énoncé "f est localement inversible en $\vec{x}$" veut dire ? (Donnez la définition)
Solution Il existe un voisinage $U \subseteq \mathbb{R}^n$ de $\vec{x}$ et $V \subseteq \mathbb{R}^n$ de $f(\vec{x})$ tel que $f\colon U \to V$ est une bijection.

(b) Remplissez les bonnes bornes d'intégration dans la formule suivante, et faites un dessin du domaine d'intégration

$$\int_0^1 \int_{x^4}^{\sqrt{x}} f(x,y)\, dy\, dx \;=\; \int_?^? \int_?^? f(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt[4]{y}} f(x,y)\, dx\, dy$$

(c) Soit V un domaine dans $\mathbb{R}^3$. Supposons que V est l'espace occupé par un objet, fabriqué en un seul matériel, de poids spécifique constant $= 1$. Alors le moment d'inertie par rapport à la rotation autour de l'axe z se calcule en coordonnées sphériques par la formule

$$\iiint_V \ldots ? \ldots \; dr\, d\phi\, d\theta = \iiint_V (r \cdot \sin(\phi))^2 \cdot r^2 \sin(\phi)\, dr\, d\phi\, d\theta$$

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ Calculer l'aire de la région de $\mathbb{R}^2$ indiquée dans la figure. (Le bord intérieur de la région est donné par $r = 1$, et le bord extérieur par $r = 2 + \cos(\theta)$.)

Solution Aire $= \int_{-\pi}^{\pi} \int_1^{2+\cos(\theta)} r\ dr\ d\theta \overset{sym.}{=} 2 \int_0^{\pi} \int_1^{2+\cos(\theta)} r\ dr\ d\theta = \frac{2}{2} \int_0^{\pi} (2+\cos(\theta))^2 - 1^2\ d\theta$
$= \int_0^{\pi} (3 + 4\cos(\theta) + \cos^2(\theta))\ d\theta = \int_0^{\pi} (3 + 4\cos(\theta) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\theta))\ d\theta = \int_0^{\pi} 3 + \frac{1}{2}\ d\theta = \frac{7}{2}\pi$