Université de Rennes 1
UFR Mathématiques
Module VAR

Année 2008–2009

Contrôle continu 2
20 octobre 2008 — Durée : 40 minutes

Aucun appareil électronique (calculatrice, téléphone portable...) et aucun document est autorisé. Toutes les réponses devront être justifiés.

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Est-ce que cette fonction est continue ?

Solution OUI ! Justification : le seul point où il y a un doute est le point $(x,y)=(0,0)$. On re-écrit la fonction en coordonnées polaires $f(r,\theta)=\frac{r^3(\cos^3(\theta)-sin^3(\theta)}{r^2}=r(\cos^3(\theta)-sin^3(\theta))$ pour $r\neq 0$. Quand (x,y) tend vers $(0,0)$, on a que r tend vers 0, et donc $f(r,\theta)$ tend vers 0.

Exercice 2 Considérons la fonction $f(x,y)=x^2+y^2-\frac{1}{6}x^3$.

(a) Trouver tous les points critiques de cette fonction, et déterminer leur nature (maximum, minimum, point selle).

Solution $\nabla f=\binom{2x-x^2/2}{2y}$, ce qui s'annulle en $(x,y)=(0,0)$ et $(x,y)=(4,0)$. La Hessienne est donnée par $H(x,y)=\begin{pmatrix}2-x & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$. En particulier, $H(0,0)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, et $\Delta=4$ et $A>0$, donc le point critique $(0,0)$ est un minimum local. Ensuite, $H(4,0)=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, et $\Delta<0$, il s'agit donc d'un point selle.

(b) Trouver la meilleure approximation de f par une fonction quadratique au point $(4,0)$.
Solution

$$\begin{aligned} g\left((4,0)+(h_1,h_2)\right) &= f(4,0)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(4,0)\cdot h_1^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(4,0)\cdot h_1h_2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(4,0)\cdot h_2^2\right)\\ &= \frac{16}{3}-h_1^2+h_2^2\end{aligned}$$

(c) Calculer la dérivée de f selon le vecteur $\vec{v}=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ au point $(2,-1)$.

Solution $D_{\vec{v}}f=\nabla f(2,-1)\cdot\vec{v}=(2,-2)\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=0$.

Exercice 3 En utilisant un multiplicateur de Lagrange, démontrer que le point le plus proche de l'origine sur le graphe de la fonction $y = \frac{1}{x^2}$ est le point

$$(x, y) = (\sqrt[6]{2}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$$

Indication : trouver le minimum de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$, lié à la condition $g(x, y) = 1$, où $g(x, y) = x^2 y$.

Solution On a $\nabla f = \binom{2x}{2y}$ et $\nabla g = \binom{2xy}{x^2}$ Dans un minimum on doit avoir $\nabla f = \lambda \nabla g$, donc

$$2x = 2\lambda xy \quad \text{et} \quad 2y = \lambda x^2$$

En multipliant la première équation par y et la deuxième par x, on obtient

$$2\lambda xy^2 = 2xy = \lambda x^3, \quad \text{et donc} \quad 2y^2 = x^2.$$

Donc $1 = g(x, y) = x^2 y = 2y^3$ et donc $y = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Exercice 4 (a) La fonction $f(x, y) = e^{-x} \sin(y)$ est-elle harmonique ?

Solution $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{-x} \sin(y) - e^{-x} \sin(y) = 0$, donc OUI.

(b) (Pas de justification exigée) Soit $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction. Les deux implications suivantes sont-elles correctes ?

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \overset{?}{\Longrightarrow} f \text{ est différentiable} \overset{?}{\Longrightarrow} f \text{ est continue}$$

Solution Les deux sont correctes

(c) (Pas de justification exigée) Le théorème de Schwarz dit : *Si* $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *est une fonction telle que ...., alors* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Complétez la phrase !

Solution ...telle que $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existent et sont continues, alors....