Université de Rennes 1 — Année 2008–2009
UFR Mathématiques
Module VAR

Contrôle continu 1
30 septembre 2008 — Durée : 40 minutes

Exercice 1 Ceci est le seul exercice où vous n'êtes pas obligés de justifier vos réponses.

(a) Trouver l'équation du plan passant par $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, avec vecteurs directeurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Rép Un vecteur normal sur le plan est $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc l'équation est $-2(x-1) + 0(y-2) + 1(z-1) = 0$ ou $-2x + z = -1$.

(b) Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Donner la définition de l'*adhérence* $\overline{A}$ de A.
Rép $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \epsilon > 0 \Longrightarrow B(\vec{x}, \epsilon) \cap A \neq \emptyset\}$

(c) Quelle est l'adhérence du sous-ensembe $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}$? **Rép** $A \cup \{0\}$.

(d) Quelle est la courbure de la courbe $\gamma(t) = \binom{2+5\cos(t)}{3+5\sin(t)}$? **Rép** $\frac{1}{5}$ (car cercle de rayon 5)

(e) Soit $f(x, y) = x{\cdot}y$. Dessiner les courbes de niveau correspondantes aux hauteurs 0 et 1.
Rép Au niveau $h = 0$ il y a la réunion des deux axes de coordonnées. Au niveau $h = 1$ il y a le graphe de la fonction $y = \frac{1}{x}$.

Exercice 2 Regardons la courbe paramétrée

$$\gamma\colon [1, +\infty[\to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2}\left(t\sqrt{t^2-1} - \ln(t + \sqrt{t^2-1})\right) \end{pmatrix}$$

Vous avez le droit d'utiliser sans démonstration que pour

$$f(t) = \tfrac{1}{2}\left(t\sqrt{t^2-1} - \ln(t + \sqrt{t^2-1})\right) \qquad \text{on a} \qquad f'(t) = \sqrt{t^2-1}$$

(a) Déterminer $\|\gamma'(t)\|$ et la longueur d'arc de γ entre $\binom{1}{0}$ et $\binom{t}{f(t)}$.
Rép $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + (f'(t))^2} = t$. Conc longueur d'arc $s(t) = \int_1^t x\, dx = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$.

(b) Trouver une reparamétrisation unitaire de la courbe γ.
Rép Fonction réciproque $t = \sqrt{2s+1}$, donc reparamétrisation $\widetilde{\gamma}(s) = \begin{pmatrix} \sqrt{2s+1} \\ \frac{1}{2}(\sqrt{2s(2s+1)} - \ln(\sqrt{2s} + \sqrt{2s})) \end{pmatrix}$

Exercice 3 Considérons la fonction $f(x, y) = x^y$ (qui est définie pour $x > 0$, $y \neq 0$).

(a) Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 2$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 0$.
Rép $f(x, y) = \exp(y \cdot \ln(x))$, donc $\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot x^{y-1} = 2 \cdot 1^1 = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \ln(x) \cdot x^y = \ln(1) \cdot 1^2 = 0$.

(b) Donner la fonction $g(x,y)$ qui est la meilleure approximation de f par une fonction affine en $(1,2)$ (c.à.d. le plan tangent).
Rép $g(x,y) = f(1,2)+2(x-1)+0(y-2) = -1+2x$ – remarquez que c'est le plan discuté en Exercice 1(a).