IUT GEA, Rennes I
TD Mathématiques
2008–2009

Feuille d'exercices no 6

Exercice 1 Trouver les solutions des systèmes d'équations linéaires.

$$\textbf{(a)}\ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & z & = & -6 \\ x & + & y & + & z & = & 4 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 11 \end{array} \qquad \textbf{(b)}\ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ x & + & 3y & + & 3z & = & 4 \\ x & + & y & - & z & = & 2 \end{array}$$

$$\textbf{(c)}\ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ x & + & 3y & + & 3z & = & 4 \\ x & + & y & - & z & = & -2 \end{array}$$

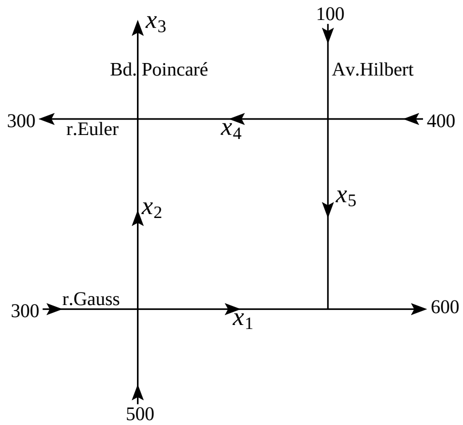
Solutions (a) (2,3,-1), (b) $(x, y, z) = (1 + 3z, 1 - 2z, z)$, avec $z \in \mathbb{R}$ libre, (c) pas de solutions

Exercice 2 Trouver toutes les solutions du système d'équations linéaires

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} -x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & & & = & -10 \\ -x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & -7 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & & & + & 3x_5 & = & 3 \\ 6x_1 & + & 18x_2 & + & 2x_3 & + & 8x_4 & + & 11x_5 & = & -13 \end{array}$$

Solution $(-16 - 3x_2 - 2x_4, x_2, 13 + 2x_4, x_4, 3)$

Exercice 3 Dans une ville il y a un quartier où toutes les rues sont à sens unique. Le réseau de la figure montre comment s'écoule le trafic (en nombre de véhicules par heure) dans ce quartier. En supposant que le flux total rentrant dans le quartier est égal au flux total sortant, calculez le flux dans chaque segment de chaque rue.



Solution La condition que les flux rentrant et sortant sont égaux implique que $-x_3 + 100 + 400 - 600 + 500 + 300 - 300 = 0$, donc $x_3 = 400$ Ensuite, à chaque croisement aussi le flux rentrant doit être égal au flux sortant, ce qui donne

$$\begin{array}{ccccccccc} & & x_2 & + & x_4 & & & = & 400+300 & = 700 \\ & & & & x_4 & + & x_5 & = & 100+400 & = 500 \\ x_1 & + & x_2 & & & & & = & 500+300 & = 800 \\ x_1 & & & & & + & x_5 & = & 600 & \end{array} \overset{\text{resoudre}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 - x_5 \\ 200 + x_5 \\ 500 - x_5 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

Donc il n'y a pas de solution unique, mais x_5 peut varier entre 0 et 500 (les flux doivent toujours être positifs ou nuls).

Exercice 4 Une entreprise fabrique trois produits, A, B, et C. Produire une pièce du produit A nécessite 2 heures de main d'oeuvre; pour le produit B c'est 3 heures et pour le produit C, 4 heures. Vu le nombre d'employés, l'entreprise peut utiliser 800 heures de main d'oeuvre par jour. Pour les trois produits on a besoin de deux types de matière première, X et Y. L'entreprise peut disposer de 75kg de matière X et de 300kg de matière Y par jour. Les besoins en matière X sont de 300g (pour le produit A), 200g (produit B) et 200g (produit C) par pièce. 1kg de matière Y est nécessaire pour fabriquer une pièce de chaque produit (A, B, ou C). Combien de pièces du produit A, B, et C est-ce que l'entreprise peut fabriquer ?
Réponse Selon l'énoncé, si x, y, z sont les nombres de pièces des trois produits, alors (x, y, z) est solution de

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 800 \\ 0,3 & 0,2 & 0,2 & 75 \\ 1 & 1 & 1 & 300 \end{array} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 Regardons un modèle extrèmement simplifié de l'économie d'un pays. Il y a deux industries : production d'énergie (E) et production de machinerie (M). Les consommateurs du pays ont besoin de 2000 unités d'énergie et de 750 unités de machinerie. Pour pouvoir produire x unités d'énergie, le secteur (E) a besoin de 0,1$\cdot x$ unités de machinerie (pour construire des centrales électriques, par exemple). Réciproquement, pour construire y unités de machinerie, le secteur (M) a besoin de 0,25$\cdot y$ unités d'energie. Calculer le nombre x d'unités d'énergie et y de machinerie qu'on doit produire en total pour satisfaire aux besoins du pays.
Solution Systeme: E: $x = 2000 + 0,25 \cdot y$ et M: $y = 750 + 0,1 \cdot x$, donc

$$\begin{array}{cccccc} x & - & 0,25 \cdot y & = & 2000 \\ -0,1 \cdot x & + & y & = & 750 \end{array}$$

La seule solution de ce système est $x = 2243,59,\ y = 974,36$.

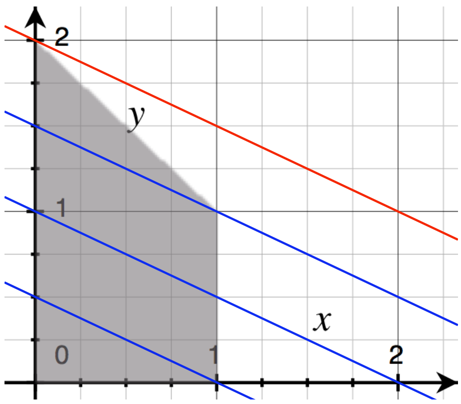
Exercice 6 Maximiser la fonction

$$f(x,y) = x + 2y$$

parmi tous les couples de nombre (x,y), sujet aux restrictions

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \qquad 0 \leqslant y \qquad x + y \leqslant 2$$

Solution L'ensemble des points (x,y) satisfaisant les inégalités est indiquée. Aussi, en bleu les droites $\{(x,y) \mid f(x,y) = 1\}$, $\{(x,y) \mid f(x,y) = 2\}$, $\{(x,y) \mid f(x,y) = 3\}$, et en rouge $\{(x,y) \mid f(x,y) = 4\}$, On voit que le point où f est maximal est $(x,y) = (0,2)$



Exercice 7 On essaie de *minimiser* la fonction

$$f(x,y) = x + y$$

parmi tous les couples de nombres (x,y), sujet aux restrictions

$$3x + y \geqslant 7 \qquad x + 2y \geqslant 4 \qquad x + 6y \geqslant 6 \qquad x + y \geqslant 2$$

Trouver le point (x,y) optimal.

Reponse $(x,y) = (2,1)$. La derniere inegalite n'est jamais active.